



HAL
open science

Sur la méthode de redistribution de masse pondérée pour un problème élastodynamique avec des contraintes unilatérales

Farshid Dabaghi, Pavel Krejčí, Adrien Petrov, Jérôme Pousin, Yves Renard

► **To cite this version:**

Farshid Dabaghi, Pavel Krejčí, Adrien Petrov, Jérôme Pousin, Yves Renard. Sur la méthode de redistribution de masse pondérée pour un problème élastodynamique avec des contraintes unilatérales. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01514298

HAL Id: hal-01514298

<https://hal.science/hal-01514298>

Submitted on 26 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Sur la méthode de redistribution de masse pondérée pour un problème élastodynamique avec des contraintes unilatérales.

F. Dabaghi¹, P. Krejčí², A. Petrov¹, J. Pousin¹, Y. Renard¹

¹ ICJ, INSA de Lyon, {farshid.dabaghi,adrien.petrov,jerome.pousin,Yves.Renard}@insa-lyon.fr

² Académie des Sciences de la République Tchèque, krejci@math.cas.cz

Résumé — On considère une barre élastique homogène vibrant longitudinalement dont une de ses extrémités est libre de bouger, tant qu'elle ne touche pas un obstacle rigide et l'autre extrémité est fixée. Le problème mathématique peut être formulé comme une équation des ondes monodimensionnelles soumise à une condition limite unilatérale. La méthode de redistribution de masse pondérée est introduite et sa convergence est prouvée. Ensuite, différents choix de redistribution de masse sont présentés et analysés. **Mots clés** — solution numérique, contact, méthode de redistribution de masse.

1 Le modèle mathématique

Nous nous intéressons au mouvement d'une barre élastique de longueur L dont l'une des extrémités est encastrée et l'autre est libre de bouger tant qu'elle ne touche pas un obstacle rigide. On considère le déplacement vertical $u(x, t)$ de cette barre qui dépend du point matériel x et de l'instant t , et satisfaisant :

$$u_{tt} - u_{xx} = f \quad \text{dans} \quad (0, L) \times (0, T), \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$u(\cdot, 0) = u^0 \quad \text{et} \quad u_t(\cdot, 0) = v^0 \quad \text{sur} \quad (0, L), \quad (2)$$

et des conditions aux limites

$$u(L, \cdot) = 0, \quad \text{et} \quad 0 \leq u(0, \cdot) \perp u_x(0, \cdot) \leq 0 \quad \text{sur} \quad [0, T]. \quad (3)$$

L'orthogonalité a ici le sens suivant ; si nous avons suffisamment de régularité, cela signifie que le produit $u(0, \cdot)u_x(0, \cdot)$ est nul presque partout sur la frontière. Si ce n'est pas le cas, l'inégalité est intégrée sur un ensemble approprié de fonctions de test, ce qui conduit à une formulation faible pour la condition unilatérale. Nous allons définir la formulation faible associée au problème (1)–(3) est donné par :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{trouver } u \in \mathbf{K} \text{ tel que} \\ - \int_0^L v^0(v(\cdot, 0) - u^0) dx - \int_0^T \int_0^L u_t(v_t - u_t) dx dt \\ + \int_0^T \int_0^L u_x(v_x - u_x) dx dt \geq \int_0^T f(v - u), \\ \text{pour tous } v \in \mathbf{K} \text{ pour lesquels il existe } \zeta > 0 \text{ avec } v = u \text{ pour } t \geq T - \zeta. \end{array} \right. \quad (4)$$

où

$$\mathbf{K} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in \mathbf{U} : u(\cdot, t) \in \mathbf{V} \text{ p.p. } t \text{ et } u(0) \geq 0\},$$

$$\mathbf{V} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in H^1(0, L) : u(L) = 0\} \text{ et } \mathbf{U} \stackrel{\text{def}}{=} \{u \in L^2(0, T; \mathbf{V}) : u_t \in L^2(0, T; L^2(0, L))\}.$$

L'existence et l'unicité pour une équation des ondes homogène [1] et une équation des ondes non homogène [2] sont prouvées en utilisant la méthode des caractéristiques et la régularisation de Yosida. Notons que l'existence et l'unicité pour une solution est établie pour l'équation des ondes avec des contraintes unilatérales dans le cas particulier d'un demi-espace sont établies dans [5]. Il n'a pas été possible d'étendre ces résultats à des domaines bornés en utilisant la même approche. Cependant en utilisant la compacité par compensation, Kim a montré dans [3], l'existence d'une solution dans un domaine borné. Enfin l'unicité ainsi que la conservation de l'énergie restent des problèmes ouverts en dimension supérieure à 1.

2 Discrétisation éléments finis et convergence de la méthode des redistributions de masse pondérée

Nous allons introduire maintenant des problèmes discretisés en temps et en espace approchant la formulation faible (4). Dans un premier temps, un problème semi-discretisé en espace est introduit. Ce problème utilise la méthode des éléments finis affines de Lagrange associé à une méthode des multiplieurs de Lagrange et il est donné par :

$$\begin{cases} \text{trouver } U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tels que} \\ MU_{tt} + SU = -\lambda e_0 + F \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \\ 0 \leq u_0 \perp \lambda \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \\ U(0) = U^0 \quad \text{et} \quad U_t(0) = V^0, \end{cases} \quad (5)$$

où M et S sont respectivement les matrices de masse et de rigidité. La méthode de redistribution de masse est alors introduite (cf. [4]). Cette méthode est basée sur une redistribution de masse de manière à ce qu'il n'y ait pas d'inertie au niveau du nœud de contact, supprimant ainsi l'opérateur différentiel en temps au nœud de contact. En d'autres termes, la matrice de masse M est remplacée par la matrice suivante

$$M^{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \bar{M} \end{pmatrix},$$

où $\bar{M}_{ij} = M_{i+1, j+1}$ pour tous $i, j = 1, \dots, n-2$. Par conséquent, le problème semi-discretisé modifié est introduit de la manière suivante :

$$\begin{cases} \text{trouver } U : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ et } \lambda : [0, T] \rightarrow \mathbb{R} \text{ such that} \\ \bar{M}\bar{U}_{tt} + \bar{S}\bar{U} = -C u_0 + \bar{F} \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \\ S_{00}u_0 + C^T \bar{U} = -\lambda + F_0 \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \\ 0 \leq u_0 \perp \lambda \leq 0 \quad \text{p.p.} \quad t \in [0, T], \\ U(0) = U^0 \quad \text{et} \quad U_t(0) = V^0. \end{cases} \quad (6)$$

La différence fondamentale avec les travaux [1, 2] réside dans le fait que la masse enlevée au nœud de contact est maintenant redistribuée sur les autres nœuds et non plus juste supprimée. Donc, la masse totale du matériau est préservée. Par ailleurs, une fonction pondérée permettant de redistribuer la masse du nœud de contact sur les autres nœuds tout en éliminant la masse du nœud de contact est introduite. La matrice de masse modifiée M^{mod} est maintenant définie par $M_{ij}^{\text{mod}} \stackrel{\text{def}}{=} \int_0^L \varphi_i \varphi_j w_{h,ij} dx$ tel que $w_{h,0i} = w_{h,i0}$ pour tout $i = 0, \dots, n-1$ et $w_{h,ij} = 1 + o(h)$ for all $i, j = 1, \dots, n-1$ où w_h est une fonction pondérée et φ_i est la fonction de base de la méthode des éléments finis.

La convergence de la méthode des redistributions de masse pondérée pour le problème élastodynamique en dimension 1 est établie et une estimation d'erreur en temps pour la méthode de Crank–Nicolson permettant de résoudre le problème semi-discret modifié (6), est obtenue.

3 Simulation numériques

Dans les simulations numériques, nous avons considéré trois répartitions de masses correspondants respectivement à la non répartition de la masse du nœud de contact (Mod 1), à la répartition de la masse du nœud de contact uniformément sur les autres nœuds (Mod 2) ainsi qu'à la répartition de la masse du nœud de contact sur le nœud précédant le nœud de contact (Mod 3) (cf. Figure 1). Par ailleurs, la solution exacte (Exact solution) est également obtenue (cf. Figure 1). La solution approchée est d'autant meilleure que la répartition de la masse du nœud de contact est faite sur un autre nœud proche du nœud de contact. En particulier, la meilleure approximation est obtenue dans le cas où toute la répartition de masse est faite sur le nœud qui précède le contact (cf. Figure 1 (Mod 3)). Pour les simulations numériques, nous avons utilisé trois méthode d'intégration en temps ; les méthodes de Crank–Nicolson, d'Euler implicite et de Paoli–Schatzman dans le cas particulier où $(\beta, e) = (\frac{1}{4}, 0)$ (cf. [2]).

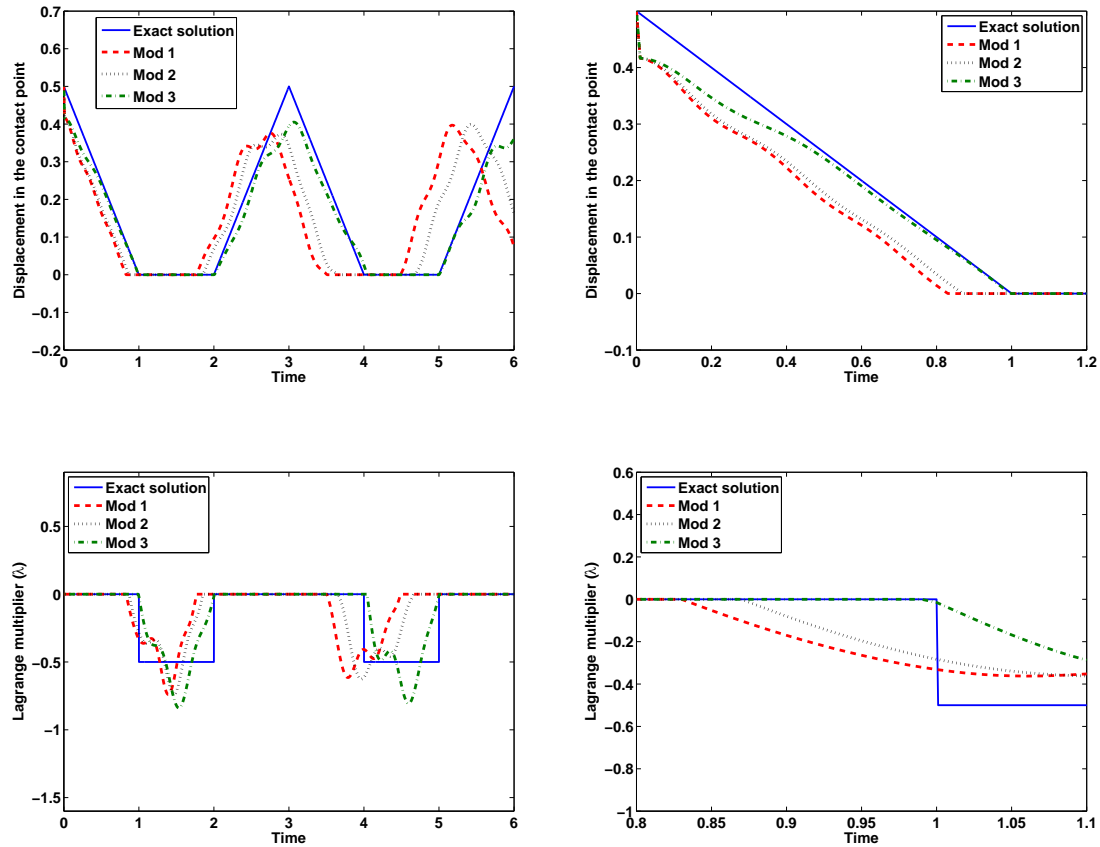


FIGURE 1 – Comparaison de la solution analytique (u, λ) et des solutions approchées (U_h^n, λ^n) obtenu en utilisant des matrices de masse modifiées dans le nœud de contact.

Références

- [1] F. Dabaghi, A. Petrov, J. Pousin and Y. Renard. Convergence of mass redistribution method for the wave equation with a unilateral constraint at the boundary. *ESAIM : Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48, pp 1147–1169, 2014.
- [2] F. Dabaghi, A. Petrov, J. Pousin and Y. Renard. Numerical approximations of a one dimensional elastodynamic contact problem based on mass redistribution method. (hal-00917450)
- [3] J. U. Kim. A boundary thin obstacle problem for a wave equation. *Comm. Partial Differential Equations*, 14(8–9) :1011–1026, 1989.
- [4] H. B. Khenous, P. Laborde and Y. Renard. Mass redistribution method for finite element contact problems in elastodynamics. *Eur. J. Mech. A Solids*, 27(5), 918-932, (2008).
- [5] G. Lebeau and M. Schatzman. A wave problem in a half-space with a unilateral constraint at the boundary. *J. Differential Equations*, 53(3) :309–361, 1984.