



**HAL**  
open science

# Evaluation de la variabilité des propriétés vibratoires de structures sandwichs viscoélastiques dépendant de la fréquence

Mohamed Hamdaoui, Frédéric Druesne, El Mostafa Daya

► **To cite this version:**

Mohamed Hamdaoui, Frédéric Druesne, El Mostafa Daya. Evaluation de la variabilité des propriétés vibratoires de structures sandwichs viscoélastiques dépendant de la fréquence. 12e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2015, Giens, France. hal-01511929

**HAL Id: hal-01511929**

**<https://hal.science/hal-01511929>**

Submitted on 21 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Evaluation de la variabilité des propriétés vibratoires de structures sandwichs viscoélastiques dépendant de la fréquence

M.Hamdaoui<sup>1</sup>, F.Druesne<sup>2</sup>, E.M.Daya<sup>1</sup>

<sup>1</sup> LeM3, Université de Lorraine, {mohamed.hamdaoui,el-mostafa.daya}@univ-lorraine.fr

<sup>2</sup> Laboratoire Roberval, Université de Technologie de Compiègne, fdruesne@utc.fr

**Résumé** La méthode de stabilité modale est combinée avec la méthode de Monte-Carlo pour quantifier la variabilité de l'amortissement et de la fréquence de vibration de structures sandwichs viscoélastiques dépendant de la fréquence. Au nominal, la méthode asymptotique numérique est utilisée pour calculer les modes propres et les valeurs propres. Les valeurs propres perturbées sont déterminées en résolvant une équation complexe non-linéaire via une méthode de Newton-Raphson avec différentiation automatique.

**Mots clés** Variabilité, Stabilité modale, Sandwich viscoélastique, Vibration

## 1. Introduction

Les propriétés d'amortissement des structures sandwichs viscoélastiques connaissent une variabilité induite par les conditions opérationnelles et/ou de fabrication [1]. Il est donc important de quantifier cette variabilité pour une meilleure maîtrise de leur utilisation. Dans ce cadre, la méthode de référence reste la simulation de Monte-Carlo combinée à des modèles éléments finis permettant de calculer les propriétés vibratoires de structures viscoélastiques. Cependant, la lente convergence de la méthode de Monte-Carlo induit un coût CPU important, ce qui a conduit au développement de méthodes alternatives comme la méthode des éléments finis stochastiques [3,4] qui restent malgré tout lourdes à mettre en œuvre pour des analyses de variabilités. Dans le cadre des éléments finis stochastiques différents auteurs ont proposé des solutions pour réduire le coût de calcul pour les structures sandwichs viscoélastiques. Guedri *et al.* [5] ont proposé une méthode de perturbation modale associée à la méthode asymptotique numérique pour calculer la variabilité des courbes de réponse de structures viscoélastiques. AMG Lima *et al.* [6] ont développé un schéma de condensation modal associé à une méthode quasi-Monte-Carlo pour déterminer la variabilité de courbes de réponses de sandwichs viscoélastiques. Dans le présent travail, nous nous intéressons à une méthode rapide basée sur le concept de ré-analyse modale, soit la méthode de stabilité modale (Modal Stability Procedure, MSP) [7]. La méthode MSP suppose que les modes sont peu sensibles aux perturbations en entrée du modèle. Par ailleurs, c'est une méthode non-intrusive dédiée à des modèles éléments finis de type "boite noire" et un espace de paramètres variables de haute dimension. Dans le présent travail, la méthode MSP est couplée à la méthode de Monte-Carlo pour déterminer les propriétés modales de poutres sandwichs viscoélastiques dont les propriétés dépendent de la fréquence. Le module de Young des faces élastiques et le module de cisaillement d'élasticité retardée de la couche viscoélastique subissent des variations données par une loi log-normale. Le modèle éléments finis [2,10] et la méthode asymptotique numérique [8] sont évoqués en section 2. La formulation MSP est présentée en section 3. Le cas test est décrit en section 4 et les résultats sont présentés en section 5.

## 2. Modèle éléments finis

La formulation éléments finis classique pour une poutre sandwich viscoélastique en vibrations libres est utilisée. Une cinématique en zig-zag [9] est considérée. Le comportement viscoélastique est décrit par un module de Young complexe dépendant de la fréquence. Tous les matériaux sont supposés

linéaires, homogènes et isotropes. En vibrations libres harmoniques, on obtient un problème aux valeurs propres non-linéaire [2,10] de la forme

$$(K_0(\omega) - E(\omega)K_v(\omega) - \omega^2 M)U = 0 \quad (1) \quad (1)$$

avec  $K_0, K_v$  les matrices de rigidité élastique et viscoélastique respectivement,  $M$  la matrice de masse et  $E(\omega)$  le module de Young viscoélastique. L'équation (1) est résolue par l'approche Diamant [8] qui implémente la méthode asymptotique numérique avec différentiation automatique. La poutre est maillée avec 200 éléments. Un ordre de troncature de 20, un nombre maximal d'itérations de 15 et une tolérance de  $10^{-10}$  sont utilisés.

### 3. Méthode de stabilité modale

La méthode de stabilité modale néglige la variabilité des modes en supposant que le mode perturbé est égal au mode nominal. Après avoir déterminé les modes nominaux  $(U_0^1, U_0^2, \dots, U_0^p)$  et les valeurs propres nominales  $(\omega_0^1, \omega_0^2, \dots, \omega_0^p)$ , l'hypothèse de stabilité modale est testée en faisant  $N^{mac}$  simulations préliminaires exactes avec Diamant. Pour chaque mode nominal on calcule

$$MAC^i = \frac{(U_0^i, U_p^i)^2}{(U_0^i, U_0^i) * (U_p^i, U_p^i)}. \text{ Si la norme et la phase de ce nombre sont proches de 1 et 0}$$

respectivement, l'hypothèse de stabilité modale est acceptée. On calcule aussi deux indicateurs d'erreurs de la MSP: l'erreur relative commise sur la fréquence  $\mathcal{E}_f^i$  et l'erreur relative commise sur

$$\text{l'amortissement } \mathcal{E}_\eta^i \text{ définis par } \mathcal{E}_f^i = \left\| \frac{(f_p^{i \text{Diamant}} - f_p^{i \text{MSP}})}{f_p^{i \text{Diamant}}} \right\|_\infty \text{ et } \mathcal{E}_\eta^i = \left\| \frac{(\eta_p^{i \text{Diamant}} - \eta_p^{i \text{MSP}})}{\eta_p^{i \text{Diamant}}} \right\|_\infty. \text{ Dans}$$

l'équation (1) on pose alors  $U = U_0$  et en multipliant à gauche par  ${}^t U_0$  on obtient au niveau élémentaire l'équation (2)

$$(\omega^i)^2 = \frac{\sum_{e=1}^{e=N} {}^T \{U_0^i\}^e * \{K_0\}^e * \{U_0^i\}^e}{\sum_{e=1}^{e=N} {}^T \{U_0^i\}^e * \{M\}^e * \{U_0^i\}^e} + E(\omega) * \frac{\sum_{e=1}^{e=N} {}^T \{U_0^i\}^e * \{K_v\}^e * \{U_0^i\}^e}{\sum_{e=1}^{e=N} {}^T \{U_0^i\}^e * \{M\}^e * \{U_0^i\}^e} \quad (2)$$

Dans le cas de la poutre on a  $\{M\}^e = (2\rho_f S_f + \rho_c S_c)m^e$

$$\{K\}^e = ((I_c E^*(\omega) + \frac{E_f S_f h_c^2}{2})k_1^e - \frac{E_f S_f h_c h_f}{2}k_2^e + (2E_f I_f + \frac{E_f S_f h_f^2}{2})k_3^e + \frac{S_c E^*(\omega)}{2(1+\nu_c)}) \text{ avec}$$

$E^*(\omega) = E(\omega) + E(0)$ . Les quantités indicées par  $_f$  sont reliées aux faces élastiques et les quantités indicées par  $_c$  sont reliées à la couche viscoélastique.  $E$  représente le module de Young,  $h$  représente l'épaisseur,  $I$  est le moment quadratique,  $S$  est la surface de la section,  $\rho$  est la masse volumique et  $\nu$  est le coefficient de Poisson. Pour chaque tirage Monte-Carlo, l'équation (2) est résolue en utilisant une méthode de Newton-Raphson. On prendra  $P$  égal à 6 et  $N^{mac}$  égal à 50.

#### 4. Cas test

Une poutre symétrique trois couches d'épaisseur 5 mm simplement supportée et comprenant une couche de 1 mm de matériau viscoélastique est utilisée. La longueur de la poutre est  $L = 300$  mm et la largeur est  $b = 30$  mm. Les faces sont composées d'aluminium de module de Young  $E_f$  (69 GPa), de coefficient de Poisson égal à 0.3 et de densité égale à  $2766 \text{ kg/m}^3$ . Le matériau viscoélastique est du

3MISD112 dont le module de Young complexe est  $E(\omega) = 2(1 + \nu_c)G_0 \sum_{k=1}^{k=3} \frac{\delta_k \omega}{\omega - i\Omega_k}$  avec  $\nu_c = 0.5$  et  $G_0 = 0.5 \times 10^6 \text{ Pa}$  et

$\delta_1 = 0.746, \delta_2 = 3.265, \delta_3 = 43.284, \Omega_1 = 468.7 \text{ Hz}, \Omega_2 = 4742.4 \text{ Hz}, \Omega_3 = 71532.5 \text{ Hz}$ . Le Tableau 1 précise les valeurs nominales, les coefficients de variation et les lois des variables matériaux.

Variable	Nominal	Coefficient de variation (CoV)	Loi
$E_f$	$\mu_{E_f} = 69 \times 10^9 \text{ Pa}$	$\delta_{E_f} = 5\%$	Log-normale
$G_0$	$\mu_{G_0} = 0.5 \times 10^6 \text{ Pa}$	$\delta_{G_0} = 5\%$	Log-normale

Tableau 1. Variables aléatoires, valeurs nominales, coefficients de variation et lois.

#### 5. Résultats

Les nombres de MAC calculés ont une norme variant entre 0.99 et 1 et une phase de l'ordre de 0.001. Ces résultats montrent que l'hypothèse de stabilité modale peut être acceptée. Les indicateurs d'erreurs sont aussi calculés dans le Tableau 2. La méthode MSP se révèle raisonnablement précise.

Mode	$\mathcal{E}_f^i$	$\mathcal{E}_\eta^i$
1	0.356 %	5.47 %
2	0.166 %	1.97 %
3	0.118 %	1.22 %
4	0.0776 %	0.954 %
5	0.0531 %	0.751 %
6	0.0412 %	0.608 %

Tableau 2. Indicateurs d'erreur de la MSP vs Diamant

Les résultats MSP + Monte-Carlo (100000 tirages) sont donnés dans le Tableau 3.

Mode	Ammortissement	Fréquence
1	Moyenne = 22%, CoV = 9.8%, CI = 1.4e-4	Moyenne = 58.16 Hz, CoV = 3.9%, CI = 1.4%
2	Moyenne = 16.7% , CoV = 10.9%, CI = 1.14e-4	Moyenne = 205.9 Hz , CoV = 4.4%, CI = 5.6%
3	Moyenne = 14.4% , CoV = 11.5%, CI = 1.0e-4	Moyenne = 448.5 Hz , CoV = 4.64%, CI = 13%
4	Moyenne = 11.2% , CoV = 11.8%, CI = 8.7e-5	Moyenne = 788 Hz , CoV = 4.7%, CI = 23%
5	Moyenne = 10% , CoV = 11.8%, CI = 7.4e-5	Moyenne = 1221 Hz , CoV = 4.74%, CI = 36%
6	Moyenne = 8.9% , CoV = 11.7%, CI = 6.5e-5	Moyenne = 1747 Hz , CoV = 4.78%, CI = 51.7%

Tableau 3. Moyenne, CoV et Intervalles de confiances (CI)

## 6. Conclusion

L'analyse de la variabilité des propriétés vibratoires d'une poutre sandwich à coeur viscoélastique (3MISD112) est entreprise en couplant la méthode MSP avec la méthode de Monte-Carlo. Le calcul des nombres de MAC montre que l'hypothèse de stabilité modale est vérifiée et les indicateurs d'erreur soulignent la précision de la méthode. La rapidité de la méthode MSP permet l'utilisation d'un grand nombre de tirages permettant ainsi d'avoir une très bonne précision au niveau de l'estimation des moyenne et coefficient de variation. En perspective, l'application de la méthode à des structures industrielles comme les pare-brises de voiture ainsi que l'étude de la variabilité en température sur les propriétés vibratoires des sandwichs viscoélastiques.

## 7. Références bibliographiques

### Références

- [1] Byung C. Jung, Dooho Lee, Byeng D. Youn and Soobum Lee, A statistical characterization method for damping material properties and its application to structural-acoustic system design, *Journal of Mechanical Science and Technology* 25 (8) (2011) 1893~1904, doi : 10.1007/s12206-011-0517-6
- [2] M. Bilasse, M.; Daya, E. M.; Azrar, L. Linear and nonlinear vibrations analysis of viscoelastic sandwich beams, *Journal of Sound and vibration*, Volume: 329, Issue: 23, Pages: 4950-4969,2010.
- [3] George Stefanou, The stochastic finite element method: Past, present and future, *Comput.Methods Appl. Mech. Engrg.* 198 (2009) 103161051.
- [4] Manolis Papadrakakis, Vissarion Papadopoulo, Robust and efficient methods for stochastic finite element analysis using Monte Carlo simulation, *Comput. Methods Appl. Mech.Engrg.* 134 (1996) 325-340.
- [5] M. Guedri, A.M.G.Lima, N.Bouhaddi, D.A.Rade, "Robust design of viscoelastic structuresbased on stochastic finite element models", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Volume 24, Issue 1, January 2010, Pages 59677.
- [6] A.M.G. de Lima, D.A. Rade and N. Bouhaddi, Stochastic modeling of surface viscoelastic treatments combined with model condensation procedures, *Shock and Vibration* 17 (2010) 4296444, DOI 10.3233/SAV-2010-0538
- [7] Frédéric Druesne, Mohamed Bader Boubaker, Pascal Lardeur, Fast methods based on modal stability procedure to evaluate natural frequency variability for industrial shell-type structures, *Finite Elements in Analysis and Design* Volume 89, 15 October 2014, Pages 93-106
- [8] M. Bilasse, I. Charpentier, E. M. Daya, Y. Koutsawa, A generic approach for the solution of nonlinear residual equations. part ii: Homotopy and complex nonlinear eigenvalue method, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 198 (49-52) (2009) 3999 6 4004.doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2009.09.015.
- [9] D. K. Rao, Frequency and loss factors of sandwich beams under various boundary conditions, *Journal of Mechanical Engineering Science* 20 (5) (1978) 2716282.
- [10] M.Hamdaoui, G.Robin, M. Jrad, E.M.Daya, Optimal design of frequency dependent three-layered rectangular composite beams for low mass and high damping, *Composites Structures* (2014), DOI:10.1016/j.compstruct.2014.09.062.