



HAL
open science

Robustesse et recherche opérationnelle en aide à la décision (RO-AD)

Bernard Roy

► **To cite this version:**

Bernard Roy. Robustesse et recherche opérationnelle en aide à la décision (RO-AD). Annales de l'ISUP, 2012, 56 (2-3), pp.5-16. hal-01511234

HAL Id: hal-01511234

<https://hal.science/hal-01511234>

Submitted on 21 Mar 2022

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

ROBUSTESSE ET RECHERCHE OPÉRATIONNELLE EN AIDE À LA DÉCISION (RO-AD)

PAR BERNARD ROY¹

LAMSADE, Université Paris-Dauphine

Résumé. L'article débute par une présentation succincte de ce dont s'occupe la discipline RO-AD : deux exemples sont ensuite présentés. Le sens dans lequel le qualificatif « robuste » est utilisé en RO-AD est précisé en section 3 où il est également expliqué pourquoi la recherche de robustesse constitue une préoccupation importante dans cette discipline. Pour bien répondre à cette préoccupation, il importe de convenablement prendre en compte deux nécessités qui sont présentées dans la section suivante. La section 5 est consacrée au schéma dans lequel se situent actuellement les réponses classiques apportées à cette préoccupation. Les deux dernières sections avant la conclusion donnent un aperçu sur des approches moins classiques.

Abstract. Robustness for Operational Research and Decision-aiding (ORDA)². The article begins with a succinct presentation of that which the discipline of ORDA seeks to accomplish and then goes on to develop two examples. The meaning of the qualifier robust, as used in our paper, is detailed in section three that explains why the search for robustness is a major concern. To meet the concern properly, the two necessities presented in section four must be appropriately taken into consideration. Section five deals with the schema encompassing current standard answers. The two last sections before the conclusion provide an overview of less traditional approaches.

Comme en témoigne ce numéro spécial des annales, la préoccupation de robustesse est présente dans de nombreuses disciplines. C'est notamment le cas en Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision (RO-AD). Je commencerai par présenter ce dont s'occupe cette discipline et introduirai deux exemples qui me serviront par la suite. J'expliquerai ensuite pourquoi la robustesse constitue une préoccupation importante en RO-AD. Cela me conduira à mettre l'accent sur deux nécessités qui doivent être prises en compte pour bien répondre à cette préoccupation. Je présenterai ensuite le schéma dans lequel se situent actuellement la plupart des travaux ainsi que la façon dont le concept de solution robuste est le plus souvent pris en compte. Je terminerai en parlant des travaux plus récents qui sortent du schéma précédent : autres définitions de solutions robustes et autres formes de réponses (conclusions robustes).

1. La RO-AD : du quoi s'agit-il ? Pendant la guerre 39-45, les militaires des forces alliées ont mobilisé un certain nombre de scientifiques (essentiellement des mathématiciens) pour éclairer des décisions de nature stratégique et tactique sur les théâtres d'opérations. Cela a été baptisé Recherche Opérationnelle (RO). Après la guerre, ces scientifiques ont transposé dans le domaine des entreprises ce qu'ils avaient fait dans le domaine militaire. C'est ainsi que se sont développées la programmation linéaire, la théorie des jeux, la théorie des files d'attente,... Dès la fin des années 40, en Angleterre,

¹ Professeur émérite

² or ROAD, French acronym for *recherche opérationnelle et aide à la décision*

aux Etats-Unis et un peu plus tard en France, des sociétés de conseil ont fait figurer le terme Recherche Opérationnelle dans leur raison sociale. Mise à part sa composante purement mathématique, la RO est intimement liée à l'Aide à la Décision (AD) comme le souligne l'intitulé « Société Française de Recherche Opérationnelle et Aide à la Décision » de l'association qui a pour vocation de rassembler chercheurs et praticiens du domaine.

Celles et ceux qui, dans les entreprises ou dans les médias, emploient le terme « Aide à la Décision » ne font pas nécessairement référence à une activité de caractère scientifique. En revanche, lorsqu'en RO-AD on parle d'aide à la décision, c'est obligatoirement avec une approche scientifique des problèmes qui impliquent décision. La définition suivante est communément admise et souvent reproduite :

L'aide à la décision est l'activité de celle ou celui qui, prenant appui sur des modèles clairement explicités mais non nécessairement formalisés, aide à obtenir des éléments de réponses aux questions que se pose un intervenant dans un processus de décision. Ces éléments doivent concourir à éclairer la décision, communiquer à son sujet, élaborer des recommandations ou encore à favoriser un comportement de nature à accroître la cohérence entre l'évolution du processus de décision d'une part, les objectifs et les systèmes de valeurs au service desquels cet intervenant se trouve placé d'autre part (cf. Roy, 2008).

Concernant la Recherche Opérationnelle, je ne peux pas donner de définition car il n'y en a pas qui fasse consensus. La première a été « la recherche opérationnelle est ce que fait la société de recherche opérationnelle du New Jersey ». (pour plus de précisions, le lecteur intéressé pourra consulter Faure *et al.*, 2009 et Vallin, Vanderpooten, 2006).

Voici, parmi beaucoup d'autres, quelques domaines d'applications de la RO-AD :

- ordonnancement de tâches dans un atelier ou sur un chantier,
- organisation de tournées de livraison ou de ramassage,
- élaboration de tableaux de marche ou d'habillage d'horaires dans une société de transport,
- gestion de l'eau dans les barrages,
- affectation de parcelles de territoires à des catégories de risques,
- affectation de cellules cancéreuses à des types de pathologies,
- routage des communications dans un réseau téléphonique,
- conception de circuits intégrés,
- ...

Je crois utile d'attirer ici l'attention du lecteur sur les points suivants. Celle ou celui, couramment appelé **l'analyste**, qui pratique l'aide à la décision prend appui sur des hypothèses de travail et des modèles afin de pouvoir obtenir, sur des bases scientifiques, des **résultats**. Ceux-ci peuvent prendre des formes variées : solutions satisfaisantes ou optimales, propositions de compromis, constats d'incohérence ou d'incompatibilité, énoncés de conclusions, voire de recommandations,... Il importe de ne pas perdre de vue que l'AD n'a pas pour objet de dicter au décideur « la bonne décision ». Elle ne prétend pas découvrir des vérités cachées. L'activité d'aide à la décision doit être conçue en vue de son insertion dans le processus de décision afin de le faire évoluer en conformité avec les objectifs des diverses parties prenantes et à faciliter la communication entre ces parties prenantes.

2. Deux exemples concrets

a) Détermination des caractéristiques d'un réseau d'adduction d'eau dans une zone à urbaniser

J'ai été confronté à ce problème à une époque où il n'était pas encore question de robustesse en RO-AD. J'étais alors directeur scientifique de la société SEMA (Metra International). Un ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, René Loué, est venu me demander ce que je pensais de la façon dont les ingénieurs du corps des Ponts utilisaient un modèle de recherche opérationnelle pour déterminer la structure ainsi que les principales caractéristiques d'un réseau d'adduction d'eau destiné à desservir une zone à urbaniser. Ce modèle, très sophistiqué, devait permettre de définir le réseau optimal apte à satisfaire au moindre coût une demande de consommation d'eau bien définie, année après année sur une période de 30 ans, dans chacun des quartiers de la zone. A partir du plan d'occupation des sols prévu pour chacun des quartiers et des prévisions de consommation d'eau des ménages et des entreprises, les ingénieurs avaient déterminé le volume d'eau jugé le plus probable que le réseau aurait à distribuer année après année dans chacun des quartiers.

Selon René Loué, les plans d'occupation des sols avaient toute chance de se transformer ; la façon dont la demande d'eau pouvait évoluer était également très mal connue. Compte tenu de cette mauvaise connaissance et des à peu près de la modélisation, René Loué jugeait que l'optimum trouvé était parfaitement illusoire. Si dans quelques années, en certains points du territoire, la demande dépasse fortement celle qui avait été déterminée comme la plus probable (demande à laquelle le réseau a été ajusté au mieux), il faudra défoncer les rues pour modifier les canalisations, en ajouter de nouvelles et modifier certaines autres caractéristiques du réseau. Si au contraire la demande réelle s'avère très inférieure à celle jugée probable, on aura fait des dépenses d'investissement inutiles. Rechercher les caractéristiques du réseau qui, pour une demande jugée connue (année après année et quartier par quartier), conduit à un coût d'investissement et d'exploitation minimum n'est sans doute pas la bonne façon de formuler le problème. Il faut plutôt chercher à appréhender le réseau qui pourrait être le plus apte à résister à une gamme de demandes jugées vraisemblables en prenant en compte les coûts qui résulteront de l'adaptation à la demande réelle. Cela nécessite en premier lieu de ne pas se limiter à un unique scénario de demande jugée la plus probable mais d'introduire une gamme de scénarios plausibles. Il faut en second lieu que le modèle prenne en compte ce que coûtera l'adaptation du réseau initialement conçu à celui des scénarios qui se réalisera.

b) Choix de la meilleure proposition suite à un appel d'offres

Je vais présenter ce type de problème en me référant à un cas concret à la résolution duquel j'ai collaboré il y a un peu plus de vingt ans. A cette époque, la Poste française avait décidé d'équiper ses centres de tri régionaux de machines de tri paquets. Ces machines n'étaient pas encore très au point. C'est pourquoi la Poste a lancé un appel d'offres international en vue de la réalisation d'un prototype. L'appel d'offres comportait un cahier des charges très précis et limitait le coût de la machine de série à un « coût objectif spécifié ». La Poste a reçu quinze réponses.

Chaque réponse a été évaluée sur 12 critères : le coût du prototype, le délai annoncé, le nombre de directions de tri, le nombre de paquets triés à l'heure, le taux de paquets rejetés ou mal triés, le niveau de bruit, la facilité du maniement des sacs, la surface occupée, la confiance dans le fournisseur quant à sa capacité à respecter ses engagements et enfin trois critères plus techniques. Chaque offre étant ainsi caractérisée par ses 12 évaluations,

comment choisir la meilleure ? Ici, il n'y a pas un critère unique à optimiser. Il ne paraît pas réaliste de vouloir en concevoir un qui prendrait en compte les 12 évaluations compte tenu de l'hétérogénéité des dimensions sur lesquelles les offres sont évaluées. Quelle que soit la procédure retenue pour éclairer le choix, deux aspects du problème doivent être pris en compte :

- i) La façon d'évaluer les propositions sur chacun des critères comporte inévitablement une part d'incertitude, voire d'arbitraire.
- ii) Le décideur souhaite que certains critères jouent un rôle plus important que d'autres.

Je reviendrai par la suite sur chacun de ces deux aspects qui ne sont pas spécifiques au problème particulier considéré ici.

3. La robustesse en RO-AD : de quoi s'agit-il ? Comme le laissent entrevoir les deux exemples précédents, le caractère scientifique de la démarche en RO-AD est limité par la présence d'à peu près et l'existence de zones d'ignorances qui affectent aussi bien la modélisation que ce qu'il est convenu d'appeler les données. Voici quelques exemples de ces à peu près et zones d'ignorances :

- la modélisation oblige à simplifier la réalité : il y a souvent plusieurs façons de le faire et on n'en retient qu'une seule ;
- telle donnée dont la valeur est discutable est prise en compte comme si elle était certaine ;
- une variable aléatoire est supposée gaussienne principalement pour faciliter les calculs ;
- une autre source d'à peu près qui passe souvent inaperçue concerne la façon de traiter les nombres comme s'ils représentaient une quantité : un délai double sera, dans le calcul, compté comme deux fois plus pénalisant alors que, en fait, il l'est peut-être beaucoup plus ou beaucoup moins ;
- lorsqu'on modélise un système de contraintes (technique, économique, social,...), on ignore souvent jusqu'où on peut aller pour rester dans les limites (de pression, de budget, de capacité,...) qui marquent ou marqueront dans l'avenir la frontière du possible ou de l'acceptable ;
- en présence de critères multiples, on fait généralement appel à la métaphore du poids pour différencier le rôle que doivent jouer les différents critères ; or, ces poids ne renvoient le plus souvent à aucune réalité objective et la façon dont ils opèrent dans le modèle est généralement loin d'être limpide.

Pour apporter des réponses utiles au décideur, il importe de prendre en compte ces à peu près et zones d'ignorances (souvent englobés sous le terme général d'incertitudes). En effet, ne pas en tenir compte pourrait conduire à des résultats illusoire.

En RO-AD, **robuste** est un qualificatif qui se rapporte à une aptitude à résister à des « à peu près » ou à des « zones d'ignorances » afin de se protéger d'impacts jugés regrettables tels que résultats beaucoup plus mauvais que ceux escomptés ou dégradation de propriétés qui devaient être préservées.

Le qualificatif robuste s'applique à des entités variées : solutions, conclusions, recommandations, méthodes,... La robustesse concerne avant tout une **préoccupation**. Cette préoccupation doit être présente tout au long du processus d'aide à la décision, y compris au moment de la formulation du problème. Ceci, déjà évoqué à la fin du 2.a, est égale-

ment mis en évidence par l'exemple pédagogique suivant, lequel fait en outre ressortir la part de subjectivité que la préoccupation de robustesse comporte.

Pour aller de A à B , Madame D hésite entre trois solutions :

- *Métro* : cette solution nécessite un changement mais le métro est fréquent et elle est capable d'estimer la durée du trajet avec une petite marge d'incertitude ;
- *Bus puis train* : le passage du bus qui l'amène à la gare n'est pas très régulier ; en outre, elle ne connaît pas l'heure des trains mais ils sont beaucoup plus rapides que le métro ; il s'ensuit que cette solution est plus rapide que la solution métro mais qu'elle peut être aussi significativement plus longue s'il faut attendre le bus puis le train ;
- *Voiture* : en l'absence d'embouteillages, c'est la solution la plus rapide des trois.

Si le déplacement de A à B est exceptionnel et si Madame D tient absolument à ne pas être en retard, la solution métro, bien qu'étant la plus longue, lui apparaîtra comme la plus robuste. S'il s'agit au contraire d'un déplacement régulier et si Madame D considère que des petits retards (pourvu qu'ils ne soient pas trop fréquents) sont tolérables, elle peut estimer que, en moyenne, le temps avec le métro est très supérieur à celui avec chacune des deux autres solutions. La solution la plus robuste est donc à choisir parmi ces dernières : même si les embouteillages sont peu fréquents, Madame D peut redouter que ceci occasionne des résultats intolérables qui lui semblent beaucoup moins vraisemblables avec la solution bus-train. C'est donc cette dernière qui lui apparaîtra comme étant la plus robuste.

Dans ce qui suit, j'appellerai **représentation formelle (RF)** le modèle sur lequel l'aide à la décision prend appui ainsi que les procédures qui sont utilisées pour exploiter ce modèle afin d'obtenir des résultats. J'appellerai **réalité vécue (RV)** la réalité dans le cadre de laquelle les décisions prises seront mises à exécution et jugées.

Les décisions pour lesquelles l'aide à la décision s'exerce devront être mises à exécution dans un contexte réel qui ne sera sans doute pas rigoureusement conforme au modèle sur lequel l'

aide a pris appui. En outre, ces décisions pourront être jugées en faisant référence à un système de valeurs qui ne sera pas nécessairement en parfait accord avec celui qui aura été utilisé pour concevoir et exploiter le modèle. Une parfaite conformité entre RF et RV paraît donc pratiquement impossible. Cette absence de conformité provient de l'existence des à peu près et zones d'ignorances. La préoccupation de robustesse conduit à prendre en compte au mieux dans RF, au moins en ce qui concerne ceux qui, s'ils étaient ignorés, rendraient l'aide à la décision inapte à protéger le décideur contre les impacts qu'il juge regrettables.

Dans un contexte décisionnel donné, l'analyste doit, pour bien répondre à cette préoccupation de robustesse, s'efforcer de concevoir RF en tenant compte de deux nécessités que je vais maintenant expliciter.

4. Deux nécessités pour bien répondre à la préoccupation de robustesse.

Première nécessité : inventorier avec soin et convenablement prendre en compte dans RF tous les points de fragilité.

Par définition, un **point de fragilité** est un endroit du modèle ou d'une procédure exploitant ce modèle où se nichent des à peu près ou des zones d'ignorances. Prendre en compte un point de fragilité, c'est retenir à son sujet soit une unique option, soit un ensemble d'options possibles. Une **option** correspond à une façon particulière, précise de traiter l'à peu près ou la zone d'ignorance. Une option peut par exemple correspondre à :

- une valeur certaine attribuée à une donnée mal connue ou à un paramètre mal défini,
- un jeu de valeurs fixant le poids attribué à chacun des critères considérés,
- une distribution de probabilités particulière pour caractériser une variable aléatoire,
- une hypothèse simplificatrice permettant de prendre en compte un phénomène complexe,
- une façon particulière de construire un critère pour prendre en compte n point de vue,
- une valeur possible attribuée à un paramètre technique intervenant dans une procédure d'exploitation,
- un choix d'une solution parmi celles qui sont dans le voisinage d'un optimum.

Etant donné un point de fragilité recensé, l'analyste doit se demander si, en ne retenant à son sujet qu'une seule option, il ne court pas le risque que les résultats fournis par le traitement du modèle masquent l'existence d'impacts que le décideur peut juger regrettables. Si tel est le cas, il doit s'efforcer de concevoir un ensemble d'options aptes à mettre en évidence les diverses éventualités. Cet ensemble peut être discret (quelques valeurs possibles, plusieurs jeux de poids, deux ou trois distributions de probabilités, deux ou trois hypothèses envisageables) ou continu (intervalles de valeurs possibles, familles de distributions de probabilités caractérisées par des paramètres prenant leurs valeurs dans des intervalles donnés,...).

Deuxième nécessité : élaborer des formes de réponses aptes à aider le décideur à se protéger des impacts regrettables qui peuvent résulter de la présence des à peu près et zones d'ignorances de RF.

Ces formes de réponses doivent prendre en compte ce que le décideur attend de cette protection. Y a-t-il des niveaux d'impacts qu'il est prêt à tolérer dans certaines circonstances ? Y en a-t-il d'autres qu'il juge inacceptables et vis-à-vis desquels il veut être protégé quoi qu'il arrive et quoi qu'il puisse lui en coûter par ailleurs ? Selon ce que sera la réalité vécue, la solution adoptée par le décideur pourra, du fait de la présence des à peu près et zones d'ignorances dans RF, concilier plus ou moins bien d'une part son besoin de protection et, d'autre part, son souhait d'optimiser le ou les critères de performances qui servent à évaluer cette solution. Les formes de réponses élaborées par l'analyste ne seront véritablement utiles au décideur que s'il l'informe suffisamment pour qu'il soit apte, compte tenu de sa propre subjectivité, à décider face à ces deux risques antagonistes :

- Etre mal protégé vis-à-vis de l'occurrence de très mauvaises performances révélant l'existence d'impacts regrettables ;

- Etre dans une position qui le conduit à renoncer à l'espoir de bonnes, voire de très bonnes, performances.

La façon dont ces deux nécessités sont prises en compte dans les publications actuelles m'a conduit à un double constat. En voici une brève présentation (pour plus de détails, voir Roy, 2010a).

Premier constat : les points de fragilité généralement pris en compte concernent exclusivement des « données » dont l'objet est de faire intervenir dans RF un aspect de RV qualifié **d'incertain**.

Cette conception conduit à concevoir un ensemble de **scénarios** pour décrire la totalité des réalités susceptibles d'être vécues que la préoccupation de robustesse nécessite de prendre en compte. Un scénario est défini par une unique option choisie relativement à chaque point de fragilité au sein de l'ensemble de celles qui lui sont associées. Cet ensemble de scénarios peut être fini ou infini.

C'est ainsi qu'une bonne formulation du problème présenté au 2.a conduit à faire intervenir, à côté de la chronique des volumes d'eau jugés les plus probables (quartier par quartier), d'autres chroniques ; chacune des chroniques envisageables constitue alors un scénario. Cet exemple montre en outre que les points de fragilité à prendre en compte peuvent aussi provenir de l'existence d'à peu près et de zones d'ignorances qui ne se rapportent pas nécessairement à des données ayant trait à des aspects incertains de RV. La modélisation de réseaux d'adduction d'eau aptes à répondre, dans la zone considérée, à une demande donnée fait intervenir divers paramètres techniques pour chacun desquels plusieurs options peuvent être envisagées quant à la valeur qu'il convient de leur attribuer. De plus, le critère d'optimisation qui permet d'exploiter ce modèle peut être formulé de diverses façons. Il s'ensuit qu'utiliser le terme scénario pour décrire un choix d'options relatif à de tels points de fragilité peut être inapproprié pour communiquer avec le décideur qui risque d'attribuer à ce terme un sens différent. Pour que tous les points de fragilité soient pris en compte, sans aucune restriction, il me paraît préférable de substituer, au concept de scénario, celui de **version** (de la formulation du problème), une telle version restant définie comme une combinaison d'options prenant en compte tous les points de fragilité retenus. Toutefois, dans la suite de cet article, je continuerai à parler exclusivement de scénario. Il importe enfin de ne pas négliger les points de fragilité qui peuvent se nichier dans la façon d'exploiter le modèle. Cela peut conduire à prendre en compte non pas une unique procédure d'exploitation mais toutes celles d'un ensemble P , chaque procédure p étant ici encore définie par l'option précise qui la caractérise pour chacun des points de fragilité qu'elle comporte.

Second constat : la plupart des auteurs ne s'intéressent qu'à une seule forme de réponse : trouver une (éventuellement plusieurs) solution pouvant être qualifiée de « robuste » ; pour donner sens à ce qualificatif, ils se placent dans un modèle de RF où la performance d'une solution est définie par un unique critère et ils font jouer un rôle privilégié à la performance de cette solution dans le pire scénario pour en mesurer sa robustesse.

Cette forme de réponse repose sur un concept assez particulier de **solution robuste** qui prend place dans le cadre d'un schéma lui-même assez restrictif que je vais maintenant présenter.

5. Un schéma cadre pour répondre à la préoccupation de robustesse. Ce schéma peut être défini par les trois traits caractéristiques suivants.

Trait caractéristique n° 1 : dans RF, les décisions à étudier sont modélisées en tant qu'éléments a d'un ensemble A de solutions dites admissibles. Un unique critère g associe, à chaque élément a de A , une performance $g(a)$. Ce critère permet de définir la ou les solutions optimales indépendamment de toute préoccupation de robustesse.

L'ensemble A peut être défini en *compréhension* par l'ensemble des solutions d'un système de contraintes comme c'est le cas dans l'exemple du 2.a. Dans cet exemple, le critère g est un critère de coût qu'il s'agit de minimiser. L'ensemble A peut aussi être défini en *extension* par une liste comme c'est le cas dans l'exemple du 2.b. Dans ce dernier exemple, il n'est toutefois pas possible de caractériser la performance d'une offre par un unique critère qui serait à optimiser.

Trait caractéristique n° 2 : une unique mesure est définie pour donner sens à l'assertion « la solution x est au moins aussi robuste que la solution y ». Cette mesure (et elle seule) intervient pour qualifier une solution de robuste.

Depuis l'ouvrage célèbre de Kouvelis et Yu (1997), trois mesures de robustesse sont particulièrement utilisées. Je les présente ci-après dans le cas où le critère g est à minimiser. Je parlerai à son sujet d'un coût (ce coût valant plus l'infini pour une solution x qui n'est pas réalisable dans un scénario $s \in S$).

La première de ces mesures prend appui sur la notion de coût garanti. Le coût garanti d'une solution x est le coût le plus élevé que le modèle associe à cette solution : c'est donc la plus grande valeur que prend $g(x)$ dans l'ensemble des scénarios. Prendre ce coût garanti comme définition de la mesure de robustesse équivaut à admettre qu'une solution x est jugée au moins aussi robuste qu'une solution y si et seulement si le coût garanti par x est au plus égal à celui garanti par y .

Les deux autres mesures de robustesse prennent appui sur le concept de regret ; l'une fait intervenir un regret absolu et l'autre un regret relatif. Une solution x ayant été choisie, lorsque le scénario qui se réalise est connu, le décideur peut être amené à comparer le coût $g(x)$ auquel il est effectivement conduit dans ce scénario à celui auquel il aurait été conduit si la solution choisie avait été la meilleure dans ce scénario. Le regret absolu est, par définition, la différence entre la valeur du coût $g(x)$ dans le scénario qui se réalise et le coût associé à la solution optimale dans ce scénario. Le regret relatif est défini en divisant le regret absolu par le coût de la solution x dans le scénario considéré. Certes, le décideur ignore celui des scénarios qui va se réaliser mais la valeur maximum que prend le regret (absolu ou relatif) dans l'ensemble des scénarios permet d'associer, à chaque solution x , ce que l'on peut appeler un regret garanti. Prendre ce regret garanti comme définition de la mesure de robustesse équivaut à admettre qu'une solution x est jugée au moins aussi robuste qu'une solution y si et seulement si le regret garanti par x est au plus égal à celui garanti par y .

Trait caractéristique n° 3 : l'unique mesure de robustesse choisie ne fait intervenir que les seuls scénarios dans lesquels elle conduit à la pire performance ou au pire regret, ce qui se passe dans les autres scénarios ne jouant aucun rôle ; les solutions robustes sont celles qui optimisent la mesure de robustesse dans l'ensemble des scénarios.

Les mesures de robustesse co-garanties, regret (absolu ou relatif), garanti conduisent à ne prendre en compte pour savoir si une solution x mérite d'être qualifiée de robuste que ce qui se passe dans les scénarios qui lui sont le plus défavorables (soit en termes de performance, soit en termes de regret), quel que soit ce qui se passe dans les autres scénarios. C'est là une façon très particulière de répondre à la préoccupation de robustesse. Elle peut ne pas correspondre à l'idée que s'en fait le décideur. Il se peut qu'une solution ainsi qua-

lifiée de robuste conduite à des coûts ou à des regrets qui restent fort médiocres dans un très grand nombre de scénarios. Asseoir la préoccupation de robustesse sur l'optimisation d'un coût ou d'un regret garanti, c'est admettre qu'il importe avant tout de se protéger le mieux possible de ce qui pourra arriver si le scénario qui se réalise est le pire (en termes de coût ou de regret) vis-à-vis de la solution retenue. Cette façon d'envisager la préoccupation de robustesse ne convient donc à un décideur qui si il a une très forte aversion vis-à-vis du risque.

Le trait caractéristique n° 3 fait jouer au(x) scénario(s) qui détermine(nt) l'optimum de la mesure de robustesse un rôle déterminant pour définir la (ou les) solution(s) robuste(s). Ce (ou ces) scénario(s) peut (ou peuvent) être très peu vraisemblable(s) (correspondre par exemple à des combinaisons d'options extrêmes). Supprimer ce (ou ces) scénario(s) de l'ensemble S peut conduire à définir comme robustes des solutions tout à fait différentes. Cette dépendance de la solution qualifiée de robuste à la présence de tel ou tel scénario dans S apparaît clairement, dans le cas de la conception d'un réseau d'adduction d'eau (cf. 2.a), lorsque l'ensemble des scénarios est conçu comme il a été suggéré en section 4 (voir fin du premier constat).

6. Autres façons de définir le concept de « solutions robustes ». Les considérations qui précèdent expliquent pourquoi un certain nombre d'auteurs ont cherché à proposer des définitions de « solutions robustes » en s'affranchissant du trait caractéristique n° 3 (voir à ce sujet Aïssi et Roy, 2010 et Roy, 2010a). J'ai moi-même proposé trois nouvelles mesures de robustesse (*bw*-absolute robustness, *bw*-absolute deviation and *bw*-relative deviation). Elles ont pour objet de permettre au décideur de mieux prendre en compte la façon dont il souhaite concilier les deux risques antagonistes dont il était question en fin de section 4. Il doit pour cela attribuer une valeur à deux paramètres b et w : b se rapporte à un objectif (en termes de coût ou de regret) qui devrait être atteint ou amélioré dans le plus grand nombre possible de scénarios alors que w fixe la valeur du pire coût ou regret qu'il veut garantir quel que soit le scénario qui se réalise ($w > b$). Le décideur qui consent à attribuer à w une valeur supérieure à celle w^* que garantit une solution x qui optimise la mesure de coût ou de regret garanti correspondant court bien évidemment le risque que la solution z robuste au sens de la nouvelle mesure choisie aboutisse, dans quelques scénarios, à un coût ou à un regret supérieur à w^* mais, avec cette solution z , il peut espérer que les coûts ou regrets seront, dans un très grand nombre de scénarios, meilleurs que ceux qu'il aurait obtenus avec la solution x (pour plus de détails, voir Roy, 2010b).

Très peu nombreux sont les auteurs qui ont cherché à définir la robustesse d'une solution en faisant intervenir non pas une unique mesure de robustesse mais plusieurs (autrement dit, en s'affranchissant du trait caractéristique n°2). Peu nombreux également sont les auteurs qui ont cherché à répondre à la préoccupation de robustesse en s'affranchissant du trait caractéristique n° 1. Sur ces deux points, le lecteur intéressé pourra consulter les références qui viennent d'être citées.

On peut aussi se préoccuper de robustesse en cherchant des formes de réponses qui n'aboutissent pas nécessairement à mettre en évidence des solutions qualifiées de « robustes ». Proposer au décideur des solutions dites robustes est en effet un mode de réponse assez particulier qui ne répond pas toujours convenablement à la seconde nécessité (cf. section 4). Je vais maintenant présenter un mode de réponse plus général.

7. Le concept de « conclusions robustes ». Il me faut ici commencer par introduire quelques notations. Etant donné un scénario $s \in S$, il lui correspond dans RF un modèle $M(s)$ parfaitement défini qui traduit la façon dont le problème d'aide à la décision a été formulé dans le cas où la réalité vécue correspond au scénario s . Soit $p \in P$ (cf. section 4) une procédure envisagée pour exploiter $M(s)$. Cette exploitation fournit un ensemble de résultats $R(p,s)$ qui peut prendre des formes variées : solution(s) optimale(s), solution(s) non dominée(s), solution(s) à rejeter, constat d'impossibilité, constat d'incohérence, ... Pour répondre aux questions que se pose le décideur, l'analyste prend appui sur de tels résultats. Pour des raisons diverses, il peut ne s'intéresser qu'à ceux qui font intervenir des couples (p,s) qui appartiennent à un certain sous-ensemble Q du produit cartésien $P \times S$.

Par définition, le terme **conclusion** désigne ici une assertion qui prend en compte un certain ensemble de résultats du type $R(p,s)$. Une telle assertion est appelée **conclusion robuste** lorsqu'elle comporte l'énoncé des conditions dans lesquelles sa validité a été établie. Ces conditions concernent le sous-ensemble Q de $P \times S$ pris en compte ainsi que, les conditions et hypothèses qui donnent sens et justifient l'assertion. La robustesse d'une conclusion est donc contingente au champ de validité défini par ces conditions.

La forme la plus banale de conclusions robustes est la suivante : « la solution x est robuste, robuste signifiant que, x est une solution qui optimise la mesure de robustesse définie comme suit...sur l'ensemble des résultats $R(p,s)$ découlant de l'ensemble Q pris en compte ». Ici, le champ de validité de cette conclusion robuste est défini par la mesure de robustesse choisie et l'ensemble Q pris en compte.

Il existe des formes moins triviales de conclusions robustes qui ne font pas appel à celui de « solution robuste ». En voici quelques exemples.

« Sauf pour les procédures suivantes (...), tous les couples $(p,s) \in Q$ font apparaître les solutions suivantes (...) comme étant admissibles avec les évaluations suivantes (...) ».

« $\forall (p,s) \in Q, x$ est une solution dont l'écart à l'optimum n'excède jamais ... % ».

« Il n'existe aucune solution admissible qui garantisse que les objectifs suivants (...) (relatifs aux différents critères) puissent être garantis quel que soit le scénario $s \in S$ ».

« L'ensemble des solutions x_1, x_2, \dots, x_k jouit des propriétés suivantes (...), sauf peut-être dans certains scénarios jugés peu vraisemblables ».

Afin de bien mettre en évidence ce qu'apporte en pratique le concept de « conclusions robustes », je vais brièvement résumer le rôle qu'il a effectivement joué pour élaborer des recommandations dans le cas de l'exemple introduit au 2.b.

L'ensemble de solutions admissibles est ici défini en extension par les 15 offres retenues. Chacune d'elles a été évaluée sur 12 critères. Six de ces solutions ont pu être éliminées dans un premier temps. Le modèle de RF repose donc sur ce que l'on appelle le **tableau des performances**, tableau qui donne, pour chacune des 9 solutions, leurs performances sur chacun des 12 critères. Pour évaluer ces performances sur une échelle concrète appropriée à chaque critère, un groupe d'experts de la Poste a été défini. Les points de fragilité relatifs à la part d'incertitude, voire d'arbitraire, qui peut affecter certaines de ces évaluations ont été recensés. Leur impact a, pour l'essentiel, pu être pris en compte grâce au concept de seuils d'indifférence et de préférence qu'il n'est pas nécessaire de connaître pour comprendre la suite de cet exemple.

La procédure d'exploitation retenue était ELECTRE IS. Dans cette procédure, il faut définir un jeu de poids qui caractérisent l'importance relative que le décideur souhaite accorder à chaque critère. Il est en outre possible d'introduire, pour certains de ces critères, ce qui est appelé un seuil de veto. Le décideur était ici un comité qui réunissait plusieurs directeurs de la Poste. Le rôle qu'il convenait de faire jouer à chacun des 12 critères n'était pas perçu de la même façon par le directeur technique, le directeur du personnel, le directeur commercial ou encore le directeur financier. Poids et vetos constituaient donc des points de fragilité dans la façon d'exploiter le modèle.

Pour comprendre la signification des conclusions robustes qui ont été établies, il n'est pas nécessaire que je précise ce que recouvre ici l'ensemble Q des couples (p,s) pris en compte. Pour chacun d'eux, la méthode ELECTRE IS permet de mettre en évidence un sous-ensemble de solutions qui apparaissent comme les plus satisfaisantes, sous-ensemble qui doit être le plus restreint possible sous la contrainte suivante : toute solution qui n'est pas dans ce sous-ensemble peut être éliminée car moins bonne que l'une au moins de celles qui s'y trouvent. Un tel sous-ensemble (qui joue ici le rôle du résultat $R(p,s)$) correspond à ce que l'on appelle **noyau** en théorie des graphes. Ainsi, à chaque couple $(p,s) \in Q$, la méthode associe un tel noyau.

Voici une version résumée des conclusions robustes qui ont pu être établies sur ces bases.

Conclusion n° 1 : l'offre a_1 est présente dans la presque totalité des noyaux (cette assertion était complétée par la liste des couples (p,s) pour lesquels a_1 n'est pas dans le noyau correspondant).

Conclusion n° 2 : les offres a_5, a_6, a_8 ne sont présentes dans aucun noyau.

Conclusion n° 3 : l'offre a_9 est présente dans certains noyaux ; lorsqu'il en est ainsi, il suffit de réduire le pouvoir de veto du critère 12 pour que a_9 sorte du noyau (a_1 apparaît alors comme aussi bonne que a_9).

Conclusion n° 4 : les trois offres a_2, a_3, a_4 forment un sous-ensemble C d'actions deux à deux indifférentes qui est présent dans un grand nombre de noyaux.

Dire que les offres a_2, a_3, a_4 sont deux à deux indifférentes signifie que, avec les données dont on disposait, elles n'étaient pas différenciables : chacune d'elles pouvait être considérée comme au moins aussi bonne que chacune des deux autres sans être pour autant significativement meilleure.

Conclusion n° 5 : l'offre a_7 est présente dans un grand nombre de noyaux ; les actions de C sont généralement incomparables à a_7 .

Affirmer cette incomparabilité signifie que, avec les données dont on disposait, a_7 ne pouvait être considérée comme au moins aussi bonne que l'une quelconque des actions de C et que, vice versa, aucune de ces actions pouvait être considérée comme au moins aussi bonne que a_7 .

Ces conclusions robustes (complétées par une analyse appropriée) ont conduit à élaborer les recommandations suivantes qui ont été transmises à la Direction Générale des Postes (pour plus de détails, le lecteur pourra se reporter à Roy et Bouyssou, 1993, chapitre 8).

a) Dans le cas où il est exclu de construire plus d'un prototype, c'est l'offre a_1 qui mériterait d'être retenue (cf. conclusion n° 1).

b) Dans le cas où il est envisagé de construire plus d'un prototype, les offres a_5, a_6, a_8, a_9 pourraient être définitivement éliminées (cf. conclusions n° 2 et 3, ...).

c) Dans le cas où il est envisagé de construire trois prototypes, ce sont les offres a_1 , a_7 et l'une des trois offres de C qui mériteraient d'être retenues (cf. conclusions n° 4 et 5) ; les 12 critères pris en compte ne permettent pas de différencier clairement les offres a_2 , a_3 et a_4 (pour y parvenir, on pourrait faire appel à des considérations non ou mal prises en compte par cette famille de critères) ; dans la mesure où a_1 serait effectivement retenue, la sélection conjointe de a_3 paraîtrait mieux justifiée que celle de a_2 ou a_4 car, contrairement à ces dernières, a_3 est généralement incomparable à a_1 .

d) Dans le cas où il serait envisagé de construire deux prototypes, il conviendrait d'opter, en complément de a_1 , soit en faveur de a_7 , soit en faveur de l'une des offres de C : a_7 étant difficilement comparable aux offres de C , cette option met fondamentalement en jeu le système de valeurs du « décideur ».

8. Conclusion. Pour terminer, je voudrais attirer l'attention sur deux points.

1°) En RO-AD, la notion de robustesse présente des liens plus ou moins étroits avec d'autres notions telles que flexibilité, stabilité, fiabilité, adaptabilité, sensibilité et parfois même équité.

2°) Répondre à la préoccupation de robustesse suppose de prendre en compte la façon éminemment subjective dont le décideur souhaite pouvoir se protéger contre des performances catastrophiques sans être contraint pour autant de devoir renoncer à l'espoir de bonnes, voire très bonnes, performances.

RÉFÉRENCES

- AISSI, H., ROY, B. (2010). Robustness in Multi-criteria Decision Aiding, in Trends in Multiple Criteria Decision Analysis (Matthias Ehrgott, José Rui Figueira, Salvatore Greco). Springer. Science+Business Media. Volume 142. 87-121.
- FAURE, R., LEMAIRE, B., PICOULEAU, C. (2009). Précis de recherche opérationnelle. 6e édition. Dunod. Paris.
- KOUVELIS, T., YU, G. (1997). Robust discrete optimization and its applications. Kluwer Academic Publishers. Boston.
- ROY, B. (2008). L'aide à la décision aujourd'hui : que devrait-on en attendre ? (2e édition). (Albert David, Armand Hatchuel, Romain Laufer). Vuibert. Collection FNEGE. 141-174.
- ROY, B. (2010). To better respond to the robustness concern in decision aiding: Four proposals based on a twofold observation, in Handbook of Multicriteria Analysis (Constantin Zopounidis, Panos M. Pardalos). Springer. 3-24.
- ROY, B. (2010). Robustness in operational research and decision aiding: A multi-faceted issue. European Journal of Operational Research 200. 629-638.
- ROY, B., BOUYSSOU, D. (1993). Aide multicritère à la décision : méthodes et cas. Economica, Paris.
- VALLIN, PH., VANDERPOOTEN, D. (2006). Aide à la décision : une approche par les cas. 3e édition. Ellipses. Paris.