



HAL
open science

Essai sur la géométrisation de l'univers

Jean Louis Jonot

► **To cite this version:**

| Jean Louis Jonot. Essai sur la géométrisation de l'univers : Univers. 2017. hal-01510064

HAL Id: hal-01510064

<https://hal.science/hal-01510064>

Preprint submitted on 19 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

ESSAI SUR LA GÉOMÉTRISATION DE L'UNIVERS

JONOT JEAN LOUIS

ABSTRACT. Le but de cet article n'est pas de donner une représentation fidèle de la réalité physique de l'univers. On propose de construire des outils permettant de donner une approche géométrique de cet univers. Par exemple, les sections de Dirac donnent un sens à la notion de métrique universelle.

On généralise l'intégrale de Feynman et on étend cette intégrale aux fibrés d'état de l'univers. La quantification de ces fibrés d'état permet de construire les opérateurs de Dirac et de Laplace-Beltrami sur l'espace de Bose-Fermi-Fock. L'idée de représenter l'univers de Dirac-Einstein comme une singularité d'un multivers, nous amène à définir la notion de densité d'action et, à partir d'une densité, de découper l'univers par chirurgie de Milnor-Smale. Cette représentation définit la notion de passé, présent et futur qui est liée à un état de l'univers. L'axiomatisation quantique des observables complète cette présentation géométrique.

1. LES SECTIONS DE DIRAC ET LES MÉTRIQUES UNIVERSELLES

On rappelle que, si $\zeta = (E(\zeta), \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F})$ est un fibré vectoriel réel ou complexe sur l'univers \mathbf{W} , une section de Dirac est une section γ du fibré $(\xi_{\mathbf{W}}^* \otimes \zeta)^* \otimes \zeta$, où $\xi_{\mathbf{W}}^*$ est le dual du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}} = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^p)$. A chaque événement $w \in \mathbf{W}$, on associe une application bilinéaire

$$\gamma(w) : T_w^* \mathbf{W} \otimes E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta)$$

telle que $\forall d \in \Gamma(T^*\mathbf{W})$ et $\forall s \in \Gamma(\zeta)$, on ait

$$\gamma(d \otimes s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w)),$$

où

$$d(w) \otimes s(w) : T_w \mathbf{W} \rightarrow E_w(\zeta), \quad d(w) \otimes s(w)(x) = d(w)(x) \cdot s(w), \quad \forall x \in T_w \mathbf{W}.$$

On pose γ^d , la section définie par

$$\gamma^d(s) = \gamma(d \otimes s),$$

qui à chaque événement $w \in \mathbf{W}$ et pour une section fixée $d \in \Gamma(T^*\mathbf{W})$, on ait

$$\gamma^d(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \quad \gamma^d(w)(u) = \gamma(w)(d(w) \otimes u), \quad \forall u \in E_w(\zeta)$$

en particulier, pour chaque événement $w \in \mathbf{W}$, $\gamma^d(w) \in \text{End}(E_w(\zeta))$. Soit (W, φ) une carte de l'univers \mathbf{W} en l'événement w , on note $\{\partial_\nu : \nu = 0, 1, 2, 3\}$, le local

Date: 16/04/2017.

1991 *Mathematics Subject Classification.* 18F15, 55R05, 83C05, 81R05, 81R50, 18F15, 55R05, 83C05, 81R05, 81R50.

Key words and phrases. C^α -structure, Intégrale de Feynman, Fibrés de Banach, pseudo-mesure gaussienne, dérivation fractionnaire, Section de Dirac, Tenseur métrique, Tenseur énergie-impulsion, Endomorphisme de Dirac, Connexion de Levi-Civita. Tenseur de courbure.

frame associé à la carte (W, φ) et $\{d^\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual vérifiant

$$d^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu.$$

A la section de Dirac γ , on associe les sections locales d'endomorphismes de Dirac

$$\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}, \mu = 0, 1, 2, 3$$

qui sont des sections locales d'endomorphismes, on peut ainsi définir le tenseur de Poisson local

$$\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu).$$

Definition 1. *Si le tenseur de Poisson est métrique, on définit la métrique g par le tenseur*

$$g(\partial_\mu, \partial_\nu) = g_{\mu\nu}, g^{\mu\nu} = \frac{1}{4} \gamma^{\mu\nu},$$

où $(g^{\mu\nu})$ représente la matrice inverse de $(g_{\mu\nu})$.

Lemma 1. *La métrique $g_{\mu\nu}$ est indépendante du choix de la carte.*

Dans ce qui suit, le fibré considéré ζ est le complexifié du fibré tangent $\zeta = \xi_{\mathbf{W}} \otimes \mathbb{C}$, avec une métrique lorentzienne g sur l'univers \mathbf{W} .

Definition 2. *Une section de Dirac sur le complexifié ζ , est une section de Dirac-Lorentz si elle vérifie dans chaque local frame la relation*

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu} \mathbf{I}_4,$$

c'est une section de Dirac-Ricci si

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{H}^{\nu\mu}, (\mathcal{H}^{\nu\mu})_j^\sigma = g^{\sigma\mu} \delta_j^\nu - g^{\sigma\nu} \delta_j^\mu$$

et une section de Dirac-Einstein d'ordre λ si

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda), (\mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda))_j^\sigma = (g^{\sigma\mu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\mu}) \delta_j^\nu - (g^{\sigma\nu} + \lambda \varepsilon^{\sigma\nu}) \delta_j^\mu$$

où $\varepsilon^{\sigma\mu}$ désigne l'inverse du tenseur de Ricci $R_{\tau\sigma}$, si il existe, et λ est une C^∞ -application définie sur la carte W .

Theorem 1. *Si γ est une section de Dirac-Einstein d'ordre*

$$\lambda = -\frac{1}{2}R + \Lambda,$$

l'équation relativiste d'Einstein s'écrit

$$H_2 = \kappa T,$$

où T est l'opérateur associé au tenseur énergie-impulsion, H_2 est l'opérateur de Dirac de rang 2, R est la courbure et Λ la constante cosmologique.

Proof. On peut consulter [8] pour une preuve. □

Theorem 2. *Si γ est une section de Dirac-Lorentz alors l'équation relativiste de Dirac sur les champs complexes s'écrit comme l'équation propre de l'opérateur de Dirac de rang 1 associé à γ ,*

$$H_1(Z) = \lambda Z, Z \in \Gamma(\zeta)$$

où λ est une fonction propre locale de l'opérateur H_1 .

Proof. On peut consulter [8] pour une preuve. □

Definition 3. Une équation unitaire est la donnée d'une équation sur l'espace des sections de Dirac entre une section de Dirac-Lorentz γ_{DL} et une section de Dirac-Einstein γ_{DE} ,

$$\mathcal{E}(\gamma_{DL}, \gamma_{DE}) = 0.$$

Une métrique de Lorentz g , pour laquelle il existe γ_{DL} et γ_{DE} telles que $\gamma_{DL} = \gamma_{DE}$, est une métrique universelle.

Une métrique de Lorentz g est donc universelle si son tenseur de Ricci est inversible et si il existe, dans chaque local frame, des sections d'endomorphismes $\{\gamma^\mu : \mu = 0, 1, 2, 3\}$ vérifiant

$$\{\gamma^\nu, \gamma^\mu\} = 2g^{\nu\mu}\mathbf{I}_4,$$

et

$$[\gamma^\nu, \gamma^\mu] = \mathcal{G}^{\nu\mu}(\lambda).$$

Problem 1. Existe-t-il une variété munie d'une métrique de Lorentz qui soit universelle?

Les variétés de dimension 4 qui sont munies d'une métrique universelle peuvent être unifiées, dans le sens où l'on peut unifier l'équation relativiste d'Einstein et l'équation relativiste de Dirac par la section de Dirac

$$\gamma = \gamma_{DL} = \gamma_{DE}.$$

2. LES CHAMPS CHRONOLOGIQUES STABLES ET LES FEUILLETAGES EN ESPACE-TEMPS

Dans ce qui suit, \mathbf{W} est une variété Lorentzienne de dimension 4, connexe, orientée en temps, c'est-à-dire, qu'il existe un champ de vecteurs $\mathbf{T} : \mathbf{W} \rightarrow T\mathbf{W}$ de genre temps,

$$\forall w \in \mathbf{W}, g(w)(\mathbf{T}(w), \mathbf{T}(w)) < 0.$$

Definition 4. Un vecteur causal $v \in T_w\mathbf{W}$ est orienté vers le futur si $g(w)(v, \mathbf{T}(w)) < 0$ et vers le passé si $g(w)(v, \mathbf{T}(w)) > 0$. On dit $v \in T_w\mathbf{W}$ est de genre temps si $g(w)(v, v) < 0$, de genre lumière si $g(w)(v, v) = 0$, de genre espace si $g(w)(v, v) > 0$ et causal si $g(w)(v, v) \leq 0$ où g est la métrique Lorentzienne de signature $(-, +, +, +)$ définie sur \mathbf{W} .

Remark 1. Si \mathbf{T} n'est pas défini sur \mathbf{W} , on restreint l'étude de cet univers à chaque composante connexe de l'ensemble de définition de \mathbf{T} , noté encore \mathbf{W} .

Example 1. Pour l'espace-temps de Minkowski (\mathbb{R}^4, η) ,

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2$$

et le champ $\mathbf{T} = \frac{\partial}{\partial t}$ donne l'orientation du temps.

On rappelle qu'un champ sur \mathbf{W} est une section C^∞ , du fibré tangent de \mathbf{W} , c'est-à-dire, une C^∞ -application $X : \mathbf{W} \rightarrow T\mathbf{W}$ telle que $\pi \circ X = \text{Id}_{\mathbf{W}}$. Soit $\varphi : W \rightarrow \mathbb{R}^4$, une carte de \mathbf{W} , on a

$$\begin{array}{ccc} TW & \xrightarrow{T\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \downarrow & & \downarrow \\ W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array}$$

et si $\mathbf{x} = x^\mu e_\mu$ est le système canonique de coordonnées, le champ standard $\frac{\partial}{\partial x^\mu} : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4$ est défini par $\frac{\partial}{\partial x^\mu}(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, e_\mu)$ pour tout $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^4$, où $\{e_0, e_1, e_2, e_3\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^4 . Localement dans la carte (W, φ) , on définit les champs

$$\partial_\mu : W \subset \mathbf{W} \rightarrow T\mathbf{W}, \partial_\mu(w) = (T_w\varphi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x^\mu}(\varphi(w)) = (T_w\varphi)^{-1}(\varphi(w), e_\mu),$$

c'est-à-dire,

$$\begin{array}{ccc} TW & \xrightarrow{T\varphi} & T\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^4 \times \mathbb{R}^4 \\ \uparrow \partial_\mu & & \uparrow \frac{\partial}{\partial x^\mu} \\ W & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^4 \end{array},$$

et $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \circ \varphi = T\varphi \circ \partial_\mu$. Localement tout champ $X \in \Gamma_\infty(T\mathbf{W})$ s'écrit sous la forme

$$X = X^\mu \partial_\mu,$$

où $X^\mu : W \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application.

Remark 2. Si f est une C^∞ -application définie sur un voisinage W à valeurs dans \mathbb{R} alors

$$T_w f(\partial_\mu) = (w, \partial_\mu f(w)),$$

et

$$\begin{aligned} T_w f(\partial_\mu) &= T_w f \left(T_{\varphi(w)} \varphi^{-1} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) \right) \\ &= T_{\varphi(w)} (f \circ \varphi^{-1}) \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) = \left(w, \frac{\partial}{\partial x^\mu} (f \circ \varphi^{-1})(\varphi(w)) \right), \end{aligned}$$

en particulier, $[\partial_\mu, \partial_\nu] f = 0$.

Definition 5. La famille de champs définie sur W par $\{\partial_\mu\}$ est le local frame de la carte φ en w .

Soit $\mathbf{T}_w = \mathbb{R}\mathbf{T}(w)$, le sous-espace vectoriel de dimension 1, engendré par le vecteur $\mathbf{T}(w) \in T_w\mathbf{W}$. Ce sous-espace est non isotrope pour la forme bilinéaire $g(w)$ sur $T_w\mathbf{W}$ et $T_w\mathbf{W} = \mathbf{T}_w \oplus E_w$, où $E_w = \mathbf{T}_w^\perp$, la somme \oplus est orthogonale pour g . Cette décomposition est unique car \mathbf{T}_w est unique. La restriction $g(w)|_{E_w}$ est définie positive sur E_w et $g(w)|_{\mathbf{T}_w}$ est définie négative. Tout champ $X : \mathbf{W} \rightarrow T\mathbf{W}$ se décompose de la façon suivante

$$X = X_E + \lambda \mathbf{T}, \lambda : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$$

est une C^∞ -application, X_E est un champ espace, c'est-à-dire, $X_E(w) \in E_w$ pour tout $w \in \mathbf{W}$, en particulier

$$|X_E(w)|_g = g(w)(X_E(w), X_E(w)) > 0$$

si $X_E(w) \neq o_{T_w(\mathbf{W})}$, noté o_w par la suite. L'ensemble des champs sur l'univers \mathbf{W} est noté $\Gamma(\mathbf{W})$, les champs espaces sont les champs X qui vérifient $X(w) \in E_w$, on note $\Gamma^E(\mathbf{W})$ l'ensemble de ces champs. On a une bijection naturelle

$$\tau : \Gamma(\mathbf{W}) \rightarrow \Gamma^E(\mathbf{W}) \times C^\infty(\mathbf{W}).$$

Sur $\Gamma^E(\mathbf{W})$, on peut définir la notion de produit vectoriel comme suit. Si X_E et Y_E sont dans $\Gamma^E(\mathbf{W})$, on pose, $X_E \wedge Y_E \in \Gamma^E(\mathbf{W})$ avec,

$$X_E \wedge Y_E(w) = X_E(w) \wedge Y_E(w),$$

le produit vectoriel sur E_w muni du produit scalaire défini positif $g(w)|_{E_w}$. On peut définir une loi de composition interne sur $\Gamma^E(\mathbf{W}) \times C^\infty(\mathbf{W})$, appelé le produit et défini par

$$(X_E, \lambda) * (Y_E, \mu) = (X_E \wedge Y_E, \lambda\mu).$$

La bijection τ , induit une loi de composition interne sur $\Gamma(\mathbf{W})$ appelée produit et défini par

$$X * Y = \tau^{-1}((X_E \wedge Y_E, \lambda\mu)),$$

où $X = X_E + \lambda\mathbf{T}$ et $Y = Y_E + \mu\mathbf{T}$.

Remark 3. *Les champs de Morse sont les champs pour lesquels λ est une fonction de Morse sur \mathbf{W} . Les champs de Morse sont denses pour la C^∞ -topologie de Whitney.*

Proposition 1. *Si X, Y et Z sont des champs quelconques alors*

$$X * (Y * Z) + Y * (Z * X) + Z * (X * Y) = 3\lambda\mu\nu T$$

est un champ chronologique, où $X = X_E + \lambda\mathbf{T}$, $Y = Y_E + \mu\mathbf{T}$ et $Z = Z_E + \nu\mathbf{T}$.

Proof. C'est l'identité de Jacobi. □

On pose

$$\|X\|_w^2 = \|X_E\|_w^2 + \lambda^2(w) \|\mathbf{T}\|_w^2,$$

on peut normaliser \mathbf{T} , en prenant pour $\mathbf{T}(w)$ le champ

$$\frac{\mathbf{T}(w)}{\sqrt{-g(w)(\mathbf{T}(w), \mathbf{T}(w))}},$$

avec cette normalisation $\|\mathbf{T}\|_w^2 = -1$ et $\|X\|_w^2 = \|X_E\|_w^2 - \lambda^2(w)$. On note simplement $\|X\|^2 = \|X_E\|^2 - \lambda^2$ si aucune confusion n'est possible, on en déduit une généralisation de l'identité de Lagrange.

Proposition 2. *On a*

$$\|X * Y\|^2 = \|X_E\|^2 \|Y_E\|^2 - g_E^2(X_E, Y_E) - (\lambda\mu)^2$$

où $g_E(w) = g(w)|_{E_w}$.

L'univers de la relativité générale est une C^∞ -variété de Lorentz. On admet l'existence d'un champ chronologique sur \mathbf{W} , noté $\mathbf{T} : \mathbf{W} \rightarrow T\mathbf{W}$ pour lequel

$$\mathbf{T}(w) \in T_w W \text{ et } g_L(w)(\mathbf{T}(w), \mathbf{T}(w)) < 0, \forall w \in \mathbf{W}.$$

La partie espace de l'espace tangent est

$$T^E \mathbf{W} = \cup_{w \in \mathbf{W}} \{w\} \times E_w$$

et la partie temps est

$$T^T \mathbf{W} = \cup_{w \in \mathbf{W}} \{w\} \times T_w.$$

Le triplet $(T^T \mathbf{W}, \pi_T, \mathbf{W})$ est un fibré vectoriel trivial car,

$$\phi : T^T \mathbf{W} = \cup_{w \in \mathbf{W}} \{w\} \times \mathbf{T}_w \rightarrow \mathbf{W} \times \mathbb{R},$$

$\phi(w, \mu\mathbf{T}(w)) = (w, \mu)$ est un isomorphisme de fibré.

Lemma 2. *Les diagrammes suivants*

$$\begin{array}{ccc} T^E \mathbf{W} = \cup_{w \in \mathbf{W}} \{w\} \times E_w & & T^T \mathbf{W} = \cup_{w \in \mathbf{W}} \{w\} \times \mathbf{T}_w \\ \downarrow \pi_E & \text{et} & \downarrow \pi_T \\ \mathbf{W} & & \mathbf{W} \end{array}$$

sont des fibrés, le fibré temps est trivial. De plus, $T\mathbf{W}$ est la somme de Whitney de ces deux fibrés,

$$T\mathbf{W} = T^E \mathbf{W} \oplus T^T \mathbf{W}.$$

Proof. Il suffit de montrer que

$$\begin{array}{c} T^E \mathbf{W} \\ \downarrow \pi \\ \mathbf{W} \end{array}$$

est un fibré. Soit W un ouvert connexe de \mathbf{W} sur lequel $T\mathbf{W}$ est trivialisable. Il existe des champs de vecteurs X_0, X_1, X_2 et X_3 définis sur W qui forment une base de sections locales. On peut scinder chaque champ en sa partie espace et sa partie temps. Soit

$$X_\mu = Y_\mu + \lambda_\mu \mathbf{T}, \quad \mu = 0, 1, 2 \text{ et } 3$$

où α_μ sont des fonctions de classe C^∞ sur W . On cherche des champs orthogonaux à \mathbf{T} pour la forme bilinéaire g qui soient linéairement indépendants. On pose

$$\mathbf{X} = \lambda^\mu X_\mu,$$

la condition $g(\mathbf{X}, \mathbf{T}) = 0$ est équivalente à $\lambda_\mu \lambda^\mu = 0$. Si on pose

$$\mathbf{X}_1 = -\lambda_1 X_0 + \lambda_0 X_1 - \lambda_3 X_2 + \lambda_2 X_3,$$

$$\mathbf{X}_2 = \lambda_2 X_0 - \lambda_3 X_1 - \lambda_0 X_2 + \lambda_1 X_3$$

$$\text{et } \mathbf{X}_3 = -\lambda_3 X_0 - \lambda_2 X_1 + \lambda_1 X_2 + \lambda_0 X_3$$

alors pour tout $w \in W$, $\text{Vect}(\mathbf{X}_1(w), \mathbf{X}_2(w), \mathbf{X}_3(w)) = E_w = \mathbb{R}\mathbf{T}(w)^\perp$. On peut écrire

$$\begin{array}{ccc} \pi_E^{-1}(W) = \cup_{w \in W} E_w & \xrightarrow{\psi} & W \times \mathbb{R}^3 \\ \downarrow \pi_E & & \downarrow \text{Pr}_1 \\ W & \xrightarrow{\text{Id}_W} & W \end{array},$$

avec $\psi(v) = (w, (\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3))$ et $v = \lambda^\mu \mathbf{X}_\mu(w)$. Le C^∞ -difféomorphisme ψ est l'isomorphisme de trivialité locale. \square

Definition 6. *Un champ chronologique \mathbf{T} est stable si pour toute carte φ , on a*

$$\partial_\mu (t^\tau g_{\nu\tau}) = \partial_\nu (t^\tau g_{\mu\tau}),$$

où $g_{\mu\nu}$ désigne le tenseur métrique dans le local frame $\{\partial_\mu\}$ et $\mathbf{T} = t^\mu \partial_\mu$.

Theorem 3. *Si \mathbf{T} est un champ chronologique stable alors le système de Pfaff*

$$w \rightarrow \tau(w) = E_w$$

est complètement intégrable. Pour chaque $w \in \mathbf{W}$, la composante connexe de l'intégrale associée à ce système est une variété connexe, cette variété est la feuille espace \mathcal{E}_w associée à l'événement w .

Proof. Soit $X \in \Gamma(T\mathbf{W})$ alors en coordonnées locales

$$X = a^i \partial_i$$

où $a^i : W \rightarrow \mathbb{R}$ est une C^∞ -application. Si $Y = b^i \partial_i$ alors $[X, Y] = c^i \partial_i$ avec

$$c^i = a^j (\partial_j b^i) - b^j (\partial_j a^i).$$

On note $\mathbf{T} = t^i \partial_i$, le champ chronologique. Il faut vérifier que si $g(X, \mathbf{T}) = 0$ et $g(Y, \mathbf{T}) = 0$ sur W , alors $g([X, Y], \mathbf{T}) = 0$ sur W . On a $g(X, \mathbf{T}) = a^i t^j g_{ij} = 0$, de même $b^i t^j g_{ij} = 0$ avec $g(\partial_i, \partial_j) = g_{ij}$. Ensuite, on calcule

$$\begin{aligned} g([X, Y], \mathbf{T}) &= c^i t^j g_{ij} = (a^k (\partial_k b^j) - b^k (\partial_k a^j)) t^j g_{ij} \\ &= a^k t^j g_{ij} (\partial_k b^j) - b^k t^j g_{ij} (\partial_k a^j), \end{aligned}$$

les conditions $a^i t^j g_{ij} = 0$ et $b^i t^j g_{ij} = 0$ impliquent

$$\partial_k (a^i t^j g_{ij}) = 0 \text{ et } \partial_k (b^i t^j g_{ij}) = 0.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} g([X, Y], \mathbf{T}) &= -a^k b^i \partial_k (t^j g_{ij}) + b^k a^i \partial_k (t^j g_{ij}) \\ &= a^k b^i (-\partial_k (t^j g_{ij}) + \partial_i (t^j g_{kj})) = 0 \end{aligned}$$

car \mathbf{T} est un champ chronologique stable. Si \mathcal{E}_w est la composante connexe de l'intégrale de τ contenant w , \mathcal{E}_w est une sous-variété de dimension 3 de \mathbf{W} . \square

Corollary 1. *Soit \mathbf{T} est un champ chronologique stable, si les fonctions $g(X, \mathbf{T})$ et $g(Y, \mathbf{T})$ sont des fonctions constantes alors le champ $[X, Y]$ est un champ espace.*

Si on admet l'existence d'un champ chronologique stable sur l'espace-temps \mathbf{W} alors deux feuilletages cohabitent, le premier est de codimension 1, c'est le feuilletage espace \mathcal{E} et l'autre est de codimension 3, c'est le feuilletage chronologique \mathcal{T} .

Proposition 3. *Soient $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ deux feuilles de \mathcal{T} et \mathcal{E} , telles que $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}} \neq \emptyset$, l'une des conditions suivantes est vérifiée. L'ensemble $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ est discret ou bien l'adhérence de $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ dans $F_{\mathcal{T}}$ ou dans $F_{\mathcal{E}}$ contient un ensemble ouvert, on dit que $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ sont respectivement localement denses, ou encore $\text{Adh}(F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}})$ est un ensemble parfait d'intérieur vide, on dit que $F_{\mathcal{T}}$ et $F_{\mathcal{E}}$ sont des feuilles exceptionnelles. Dans notre situation la transversalité des feuilles implique que $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ est discret. De plus, si $F_{\mathcal{T}}$ est \mathbb{S}^1 alors $F_{\mathcal{T}} \cap F_{\mathcal{E}}$ est fini.*

Definition 7. *Un événement $w \in \mathbf{W}$ est dit discret si $\mathcal{E}_w \cap \mathcal{T}_w$ est discret, dense si l'adhérence de $\mathcal{E}_w \cap \mathcal{T}_w$ dans \mathcal{E}_w ou dans \mathcal{T}_w est localement dense, en précisant qu'il est dense "en espace" ou "en temps" dans le premier et second cas, ou simplement dense si on a les deux situations. Il est exceptionnel si $\text{Adh}(\mathcal{E}_w \cap \mathcal{T}_w)$ est un ensemble parfait d'intérieur vide.*

Corollary 2. *Les événements de l'univers \mathbf{W} sont toujours discrets fini ou infini.*

Definition 8. *Un événement w est à temps cyclique si $\mathcal{T}_w = \mathbb{S}^1$, non cyclique si $\mathcal{T}_w = \mathbb{R}$.*

Remark 4. *Lorsque que l'on admet l'existence d'une structure analytique sur \mathbf{W} , cette structure est la structure analytique définie par Whitney à partir de la structure lisse. Les feuilletages \mathcal{E} et \mathcal{T} deviennent analytiques.*

Theorem 4. *Si tous les éléments, du groupe fondamental $\pi_1(\mathbf{W})$ de \mathbf{W} , sont finis alors tous les événements w sont à temps non cycliques. Si w est à temps cyclique alors la courbe fermée \mathcal{T}_w définit une classe d'homotopie d'ordre infini dans $\pi_1(\mathbf{W})$.*

Proof. C'est le théorème de Haefliger [7]. \square

Soit Σ une variété fermée de dimension 4 et \mathbf{W}_∞ une réunion disjointe finie de sous-variétés fermées. La variété $\mathbf{W} = \Sigma \setminus \mathbf{W}_\infty$ est la variété qui représente notre univers. La variété \mathbf{W}_∞ est une réunion finie disjointes de variétés fermées de dimension 0, 1, 2 ou 3. La dimension 0, permet de représenter \mathbf{W} comme une variété fermée privée de k points. Si $k = 1$, Σ est le compactifié d'Alexandrov de \mathbf{W} . Pour la dimension 1, on retire à Σ , un nombre fini k de lacets simples plongés dans Σ deux à deux disjoints. Si la dimension est 2, on retire un nombre fini k de surfaces fermées de genres g_1, g_2, \dots, g_k . Dans le cas des sous-variétés de dimension 3, on impose que cette variété ne scinde pas l'univers en plusieurs composantes connexes. On note $\text{codim } \mathbf{W}_\infty$, la plus petite codimension des composantes connexes de \mathbf{W}_∞ .

Theorem 5. *Si $\text{codim } \mathbf{W}_\infty \geq 3$, alors l'inclusion $\text{in} : \mathbf{W} \rightarrow \Sigma$ induit un isomorphisme $\text{in}_* : \pi_1(\mathbf{W}, w) \rightarrow \pi_1(\Sigma, w)$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. Si $\text{codim } \mathbf{W}_\infty = 2$, $\text{in}_* : \pi_1(\mathbf{W}, w) \rightarrow \pi_1(\Sigma, w)$ est surjectif pour tout $w \in \mathbf{W}$.*

Proof. La preuve est donnée dans [6]. \square

On suppose l'existence d'un champ chronologique stable sur \mathbf{W} , alors \mathbf{W} est une variété à deux feuilletages transversaux, notés \mathcal{T} et \mathcal{E} avec $\text{codim } \mathcal{T} = 3$ et $\text{codim } \mathcal{E} = 1$. Il y a deux types de feuilles pour ces feuilletages, les feuilles F pour lesquelles $\text{Adh}_\Sigma F = F$ qui sont les feuilles compactes et les feuilles pour lesquelles $\text{Adh}_\Sigma F \neq F$. On se place dans la situation où $\mathbf{W}_\infty = \{\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_k\}$ alors $\text{Adh}_\Sigma F = F \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_J$ où J est un sous-ensemble de $\{1, 2, \dots, k\}$. Les événements à l'infini $\infty_1, \infty_2, \dots, \infty_k$ sont les points de contact des feuilles à l'infini. On note pour tout $J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})$,

$$\mathbf{W}_J = \cup_{\text{Adh}_\Sigma F = F_J} F.$$

La famille $\{\mathbf{W}_J : J \in \mathcal{P}(\{1, 2, \dots, k\})\}$ forment une partition de l'univers \mathbf{W} . Si le système de Pfaff $\tau : w \rightarrow \tau(w) = E_w$, est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, si $\lim_{w \rightarrow \infty_j} \tau(w) = E_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{E}$ telle que

$$\text{Adh}_\Sigma F_\mathcal{E} = F_\mathcal{E} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{E}, J},$$

est une sous-variété et $T_{\infty_j} F_{\mathcal{E}, J} = E_j$. On a pincé les feuilles-espace aux événements à l'infini. On définit ainsi, un feuilletage pincé en un nombre fini de points. Si le système de Pfaff $\varsigma : w \rightarrow T_w$ est prolongeable à l'infini, c'est-à-dire, $\lim_{w \rightarrow \infty_j} \varsigma(w) = T_j$ alors toute feuille $F_\mathcal{T}$ telle que

$$\text{Adh}_\Sigma F_\mathcal{T} = F_\mathcal{T} \cup \{\infty_j, j \in J\} = F_{\mathcal{T}, J}$$

est une sous-variété homéomorphe à \mathbb{S}^1 ou à $[0, 1]$ avec, $T_{\infty_j} F_{\mathcal{T}, J} = T_j$. Les lacets simples $F_{\mathcal{T}, J}$ se coupent tangentiellement en ∞_j pour $j \in J$. Sans l'hypothèse de prolongement par continuité à l'infini des systèmes de Pfaff, on a un théorème de fibration de l'univers si les feuilles-espace sont compactes.

Remark 5. $\lim_{w \rightarrow \infty_j} \varsigma(w) = T_j$ signifie qu'il existe des sections locales X_i^j dans une carte de ∞_j telles que $\text{Vect} \{X_i^j(w)\} = \varsigma(w)$ avec $T_j = \text{Vect} \{X_i^j(\infty_j)\}$.

Theorem 6. *Si $\mathbf{W} = \mathbf{W}_J$ avec $J = \emptyset$ et $\mathbf{W} \neq \Sigma$ alors \mathbf{W} est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{R} . Si \mathbf{W} est compacte, \mathbf{W} est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{S}^1 .*

Proof. C'est un théorème de [7], il suffit de remarquer que toutes les feuilles espace sont compactes et que, sous cette hypothèse, \mathbf{W} est l'espace total d'un fibré de base \mathbb{S}^1 ou \mathbb{R} suivant la compacité de \mathbf{W} . \square

Si $\infty \in \text{Adh}_\Sigma F_\mathcal{E}$, un chemin γ de Σ , tel que $\gamma(0) = \infty$ pour un événement à l'infini $\infty \in \mathbf{W}_\infty$ et $\gamma(t) \in F_\mathcal{E}$ pour $t \neq 0$, est un $F_\mathcal{E}$ -chemin. On note $T_\infty F_\mathcal{E}$, l'ensemble des vecteurs $\gamma'(0)$, lorsque γ parcourt l'ensemble des $F_\mathcal{E}$ -chemins. En général, $T_\infty F_\mathcal{E}$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $T_\infty \Sigma$. C'est un cône de sommet l'origine o_∞ de $T_\infty \Sigma$. Ce n'est pas un cône de lumière en général, car il n'y a pas de prolongement de la métrique de Lorentz aux points à l'infini. Dans le cas où \mathbf{W}_∞ est formé de sous-variétés de dimension 0, 1 et 2 en nombre fini, on dit que le feuilletage est stable à l'infini si pour $\infty \in V$, où V est une composante connexe de \mathbf{W}_∞ , on a $T_\infty F_\mathcal{E} = T_\infty V$. Si $V = \{\infty\}$, il n'y a plus d'espace en l'événement à l'infini, si $V = \mathbb{S}^1$ alors l'espace est à une dimension au plus sur les lacets à l'infini. Si $V = \mathbb{T}_g$, une surface de genre $g \geq 0$, l'espace est de dimension au plus 2. À l'extérieur des événements à l'infini, les feuilles-espace sont de dimension 3. Pour le feuilletage temps, si $V = \{\infty\}$ il n'y a plus de temps à l'infini, si $V = \mathbb{S}^1$ ou \mathbb{T}_g alors le temps est à une dimension au plus. On peut imaginer une structure à l'infini ayant des sous-variétés de dimension $n = 3$ ou $n = 4$. Si $n = 3$, on se restreint à la partie connexe de \mathbf{W} , privée des sous-variétés de dimension 3 à l'infini, où vit le champ chronologique de notre univers. Notre univers est l'intérieur d'une variété compacte à bord, dont le bord est une variété à l'infini. Si $n = 4$, notre univers est le bord à l'infini, d'un univers de dimension 5 qui peut être lui-même le bord d'un univers de dimension 6 et ainsi de suite. On a une construction en "gigogne" d'une succession d'univers de dimensions supérieures. Lorsque l'on impose que les sous-variétés fermées de \mathbf{W}_∞ sont de dimensions inférieures ou égales à 2, cette construction en "gigogne" reste vraie sans que l'on soit dans l'obligation d'augmenter la dimension 4 des univers que l'on recolle par somme connexe sur les différentes structures à l'infini.

3. LE TEMPS ASSOCIÉ AUX CHAMPS CHRONOLOGIQUES STABLES

Soit w un événement de l'univers \mathbf{W} . On suppose l'existence d'un champ chronologique stable \mathbf{T} dans une carte de W de w . On peut feuilletter l'univers en feuilles espace et en feuilles temps. La métrique g de l'univers \mathbf{W} se décompose sous la forme

$$g = g_E - g_T$$

où

$$g_E(X, Y) = g(X_E, Y_E) \text{ et } g_T(X, Y) = -\lambda\mu g(\mathbf{T}, \mathbf{T})$$

avec

$$X = X_E + \lambda\mathbf{T} \text{ et } Y = Y_E + \mu\mathbf{T}.$$

On remarque que g_E et g_T ne sont pas des métriques sur \mathbf{W} mais pour toutes feuilles espace \mathcal{E} et toutes feuilles chronologiques \mathcal{T} , les restrictions

$$g_E|_{\mathcal{E}} \text{ et } g_T|_{\mathcal{T}}$$

sont des métriques riemanniennes sur \mathcal{E} et \mathcal{T} . Le temps relatif à l'événement w induit par le champ chronologique stable \mathbf{T} est défini par le paramétrage par longueur d'arc de la feuille chronologique passant par w . Si

$$\gamma :]-a, a[\rightarrow \mathbf{W}, \gamma(t) = w_t \text{ et } w_0 = w$$

est un paramétrage local par longueur d'arc de \mathcal{T}_w alors t est la mesure du temps relatif à l'événement w . La feuille espace $\mathcal{E}_t = \mathcal{E}_{w_t}$ est muni d'une métrique riemannienne $g_t = g_E|_{\mathcal{E}_t}$, on peut définir l'application exponentielle pour chaque événement w appartenant à \mathcal{E}_t

$$\exp_w : U \subset T_w \mathcal{E}_t \rightarrow \mathcal{E}_t, \exp_w(v) = \delta_v(1)$$

où

$$\delta_v :]-1, 1[\rightarrow \mathcal{E}_t$$

est l'unique géodésique $\delta_v(0) = w_t$ et $\delta'_v(0) = v$. Sur un voisinage ouvert U de $o_w \in T_w \mathcal{E}_t$, \exp_w est un difféomorphisme sur son image. L'espace des phases au temps t pour l'événement w est défini par

$$\mathcal{P}h_{w,t} = \mathcal{E}_t \times T_w \mathcal{E}_t,$$

sur cet espace on définit l'élément de volume

$$d\lambda_w = d\lambda_t \times d(\exp_w)_\#^{-1} \lambda_t$$

où $d\lambda_t$ est l'élément de volume de \mathcal{E}_t défini par la métrique riemannienne g_t et $d(\exp_w)_\#^{-1} \lambda_t$ est la mesure image de $d\lambda_t$ par $(\exp_w)^{-1}$. Soit N événements

$$\mathcal{W} = \{w_j : j = 1, 2, \dots, N\}$$

de la feuille espace \mathcal{E}_t relatif à l'événement w , l'espace des phases ou espace de Gibbs, est une sous variété de

$$\mathcal{P}h_{\mathcal{W},t} = \prod_{j=1}^N \mathcal{P}h_{w_j,t}$$

dont l'élément de volume est

$$d\mu = \otimes_{j=1}^N d_{w_j} \lambda.$$

Si on note $d\Omega$ la mesure de comptage des états des N événements dans l'élément de volume $d\mu$ alors

$$d\Omega \sim \phi(\mathcal{W}, t) d\mu, \quad (3.1)$$

$\phi(\mathcal{W}, t)$ représente la densité d'état de la famille des événements \mathcal{W} pour l'événement w au temps t . L'écriture 3.1 signifie que l'on identifie la mesure discrète $d\Omega$ à la mesure continue $\phi(\mathcal{W}, t) d\mu$.

Remark 6. Si la métrique g_t sur \mathcal{E}_t est complète, les applications \exp_w sont définies sur $T_w \mathcal{E}_t$, c'est le théorème d'Hadamard.

On peut généraliser ces notions de la façon suivante. Un état est la donnée d'une section s d'un fibré de Banach ou de Hilbert de base l'univers \mathbf{W} . Les états possibles d'un événement w dans \mathbf{W} sont de la forme $s(w) \in E$ où E est l'espace total du fibré d'état défini par

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F}), \mathcal{F} = \mathcal{B} \text{ ou } \mathcal{F} = \mathcal{H}.$$

On suppose que si $\mathcal{F} = \mathcal{B}$, l'espace de banach \mathcal{B} est munie d'une base de Schauder inconditionnelle et l'univers \mathbf{W} est muni d'une métrique Lorentzienne qui permet

de définir une forme volume μ . La mesure d'état dans l'élément de volume $d\mu$ est défini par $d\Omega = \phi d\mu$, ϕ est une C^∞ -application définie sur \mathbf{W} , $\phi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}^+$ qui est la densité d'état. Intuitivement, soit $\{w_1, \dots, w_k\}$, le nombre d'états possibles pour cette famille k événements est N_k , cette mesure de comptage est équivalente à la mesure continue $d\Omega$. En fait, ϕ est la dérivée de Radon-Nykodim de la mesure $d\Omega$ par rapport à $d\mu$. De façon plus générale, la mesure des états $d\Omega$ dans l'élément de volume $d\mu$ est de la forme

$$d\Omega = \phi d\rho + \nu$$

où ν est une mesure étrangère à μ et ϕ représente la densité d'état. La densité d'état permet de géométriser l'univers par chirurgie de Milnor-Smale. La mesure étrangère ν donne la discrétisation de la mesure d'état $d\Omega$.

4. DENSITÉ D'ÉTAT ET CHIRURGIE DE MILNOR-SMALE

On suppose que le compactifié d'Alexandroff de l'univers \mathbf{W} , $\mathbf{W} \cup \{\infty\}$ est une C^∞ -variété fermée. Dans cette situation, on dit que l'univers est stable à l'infini. On peut généraliser cette notion de stabilité en prenant une compactification à plusieurs points ou tout autre type de compactification décrite précédemment, on note $\widetilde{\mathbf{W}}$ cette compactification. On se donne une fonction C^∞ , $\phi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$, qui mesure un état physique de l'univers \mathbf{W} , cette fonction peut être une densité d'état.

Definition 9. *Deux événements p et q sont dans le même état si $\phi(p) = \phi(q)$. On dit que les événements sont dans le même présent pour la fonction d'état ϕ . L'événement p est dans le passé de l'événement q et q est dans le futur de p si $\phi(p) < \phi(q)$ pour la fonction d'état ϕ .*

Si s est une valeur régulière de l'état ϕ alors $\phi^{-1}(s)$ est une hypersurface de \mathbf{W} . Pour définir un événement de l'univers, il faut définir exactement 4 d'états $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$, deux à deux transversaux, $\phi_i \pitchfork \phi_j$ et $i \neq j$. Si s_0, s_1, s_2 et s_3 sont des valeurs régulières pour les états $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$ alors le sous-espace $\cap_i \phi_i^{-1}(s_i)$ est une sous-variété de \mathbf{W} de dimension 0, c'est-à-dire, une suite d'événements de \mathbf{W} sans point d'accumulation dans \mathbf{W} , les points d'accumulation possibles sont les événements à l'infini. L'événement w n'est pas entièrement localisé mais peut se situer en chaque point de $\cap_i \phi_i^{-1}(s_i)$. C'est un "principe d'incertitude de localisation" pour un événement décrit par 4 états transversaux deux à deux. On peut approcher une fonction d'état par une fonction de Morse. Pour structurer cet univers on fait l'hypothèse que la fonction d'état ϕ est une fonction de Morse sur \mathbf{W} . Le théorème de densité de Milnor pour la C^∞ -topologie fine de Whitney permet d'approcher toute fonction d'état par une fonction d'état de Morse. Pour une fonction d'état de Morse, si s est une valeur d'état non dégénérée, alors $\mathbf{W}_s = \phi^{-1}(s)$ est une sous-variété de dimension 3. Les tranches d'univers de ce type qui ne contiennent pas d'événement à l'infini dans leur adhérence relativement à $\widetilde{\mathbf{W}}$, sont des variétés fermées de dimension 3 dont chaque composante connexe peut être décrite à l'aide des huit géométries de Thurston [18]. L'ensemble des événements critiques est discret, ce sont les événements dont la valeur d'état est irrégulière. Si on note $\mathbf{W}_{\leq s}$, le passé de \mathbf{W}_s , c'est à dire, $\mathbf{W}_{\leq s} = \phi^{-1}(|-\infty; s|)$, le présent est le bord du passé, alors on peut reconstruire l'univers à l'aide des deux théorèmes suivants,

Theorem 7. *Si $[\alpha, \beta]$ ne contient aucun état irrégulier alors la portion d'univers $\phi^{-1}([\alpha, \beta])$ est difféomorphe à $\mathbf{W}_\alpha \times [\alpha, \beta]$. Le passé détermine entièrement le futur. En particulier, le présent \mathbf{W}_α est difféomorphe au présent \mathbf{W}_β .*

Theorem 8. *Si p est un événement critique d'indice λ , et s'il existe une petite variation $\varepsilon > 0$ d'état pour laquelle $\mathbf{W}_{\leq \phi(p)+\varepsilon} \setminus \mathbf{W}_{\leq \phi(p)-\varepsilon}$ ne contient que p comme événement critique, alors $\mathbf{W}_{\leq \phi(p)+\varepsilon}$ est obtenue par chirurgie de type $(\lambda, n - \lambda)$ à partir du passé $\mathbf{W}_{\leq \phi(p)-\varepsilon}$.*

Proof. C'est le théorème de chirurgie de Milnor-Smale [14] et [15]. \square

5. LA QUANTIFICATION DES FIBRÉS D'ÉTAT DE L'UNIVERS

Soit

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{H})$$

un fibré d'état de l'univers \mathbf{W} , c'est-à-dire, un fibré de fibre un espace de Hilbert \mathcal{H} réel ou complexe. On note $\otimes^n \zeta$, le produit tensoriel d'ordre n de ζ et

$$\otimes^0 \zeta = (\mathbf{W} \times \mathbb{K}, \pi_1, \mathbf{W}, \mathbb{K}), \mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{K} = \mathbb{C}$$

le fibré trivial de fibre \mathbb{K} . On note $\mathcal{S}_n(\zeta)$, le symétrisé de $\otimes^n \zeta$ et $\mathcal{A}_n(\zeta)$, l'antisymétrisé de $\otimes^n \zeta$. L'espace de Bose-Fock de ζ est la somme de Whitney infinie et complète des symétrisés $\mathcal{S}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_+(\zeta) = (\cup_{w \in \mathbf{W}} E_w(\mathcal{F}_+(\zeta)), \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F}_+(\mathcal{H}))$$

c'est-à-dire, pour chaque $w \in \mathbf{W}$,

$$\mathcal{F}_+(\zeta)(w) = \left\{ u = \left\{ u^{(n)} \right\}_{n=0}^{\infty} : u^{(n)} \in \mathcal{S}_n(E_w(\zeta)), \sum_{n=0}^{\infty} \|u^{(n)}\|_w^2 < \infty \right\}$$

$\mathcal{S}_n(E_w(\zeta))$ est le symétrisé d'ordre n de la fibre $E_w(\zeta)$ munit du produit scalaire induit par le produit scalaire de $E_w(\zeta)$, noté $\langle \bullet | \bullet \rangle_{\zeta, w}$, et l'espace de Fermi-Fock est la somme de Whitney infinie et complète des antisymétrisés $\mathcal{A}_n(\zeta)$

$$\mathcal{F}_-(\zeta) = (\cup_{w \in \mathbf{W}} E_w(\mathcal{F}_-(\zeta)), \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F}_-(\mathcal{H})).$$

Les espaces de Bose-Fock et de Fermi-Fock ont une structure de fibré d'état sur \mathbf{W} . L'espace de Bose-Fermi-Fock d'une paire de fibrés d'états (ζ, ξ) est défini par le produit tensoriel des fibrés $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\xi)$

$$\mathcal{F}(\zeta, \xi) = \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{F}_-(\xi),$$

c'est le fibré de Bose-Fermi-Fock associé à la paire (ζ, ξ) des fibrés d'état de l'univers \mathbf{W} . Si on prend n sections s_1, \dots, s_n , le symétrisé s'écrit

$$\mathcal{S}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} s_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s_{\sigma(n)}$$

et l'antisymétrisé s'écrit

$$\mathcal{A}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \text{Perm}\{1, \dots, n\}} \varepsilon(\sigma) s_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes s_{\sigma(n)},$$

$\mathcal{S}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n)$ est une section de $\mathcal{S}_n(\zeta)$ et $\mathcal{A}_n(s_1 \otimes \dots \otimes s_n)$ est une section de $\mathcal{A}_n(\zeta)$. Le fibré $\otimes^n \zeta$ a pour fibre $\otimes^n \mathcal{H}$, il est muni d'une structure de Hilbert canonique induite par \mathcal{H} et chaque fibre est donnée par

$$E_w(\otimes^n \zeta) = \otimes^n E_w(\zeta)$$

et est munie de la structure de Hilbert induite. On note $\mathcal{C}(\zeta, \xi)$, l'ensemble des applications L

$$w \rightarrow L(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\xi),$$

telles que, pour chaque $w \in \mathbf{W}$, $L(w)$ est un opérateur de $E_w(\zeta)$ dans $E_w(\xi)$ est densément défini et fermé. Le domaine de L est défini par

$$\text{dom}(L) = \{\text{dom}(L(w)) : w \in \mathbf{W}\},$$

il est formé de l'ensemble de tous les domaines des opérateurs

$$L(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\xi),$$

et l'application L est C^∞ dans le sens suivant, pour chaque section $s \in \mathcal{S}(\zeta)$ vérifiant $s(w) \in \text{dom}(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$, l'application

$$w \rightarrow L(w)(s(w)) = L \otimes s(w)$$

est une section de $\mathcal{S}(\xi)$. Les sections telles que $s(w) \in \text{dom}(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$, forment un sous-ensemble des sections de $\mathcal{S}(\zeta)$, noté

$$\text{dom}(\tilde{L}) = \{s \in \mathcal{S}(\zeta) : s(w) \in \text{dom}(L(w)), \forall w \in \mathbf{W}\},$$

où l'application \tilde{L} est définie par

$$\tilde{L} : \text{dom}(\tilde{L}) \subset \mathcal{S}(\zeta) \rightarrow \mathcal{S}(\xi), \tilde{L}(s) = L \otimes s.$$

Definition 10. Si L est densément défini l'adjoint de $L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$ est l'opérateur $L^* \in \text{Hom}(\xi, \zeta)$ qui vérifie

$$\langle L^* \otimes s \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour toute section $s \in \text{dom}(\tilde{L}^*)$ et $t \in \text{dom}(\tilde{L})$. On a pour tout $w \in \mathbf{W}$,

$$\langle L^*(w) s(w) \mid t(w) \rangle_{w, \zeta} = \langle s(w) \mid L(w) t(w) \rangle_{w, \xi}.$$

L'espace $\text{dom}(\tilde{L}^*)$ est formé des sections $s \in \mathcal{S}(\xi)$ pour lesquelles il existe une section $\tau \in \mathcal{S}(\zeta)$ telle que

$$\langle \tau \mid t \rangle_\zeta = \langle s \mid L \otimes t \rangle_\xi$$

pour tout $t \in \text{dom}(\tilde{L})$. Si L est densément défini τ est unique et on pose $L^* \otimes s = \tau$.

Remark 7. L'opérateur adjoint associé à L est entièrement défini par

$$\langle L^*(w)(v) \mid u \rangle_{\zeta, w} = \langle v \mid L(w)(u) \rangle_{\xi, w}, \forall u \in E_w(\zeta), \forall v \in E_w(\xi) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

Proposition 4. Si L est fermé et densément défini alors L^* est fermé et densément défini. Dans ce cas $L^{**} = L$.

Proof. On peut consulter [12] pour une preuve sur chaque fibre du fibré. \square

Pour un opérateur $L \in \text{Hom}(\zeta)$, on pose

$$\text{Im}(L) = \{\text{Im}(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$$

l'ensemble des images de L ,

$$\text{Ker}(L) = \{\text{Ker}(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$$

est l'ensemble des noyaux de L . Les sous-ensembles de \mathbb{C} ,

$$\rho(L) = \{\rho(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$$

forment la résolvante de L , elle est formée des sous-ensembles $\rho(L(w))$ définis par

$$\rho(L(w)) = \{\lambda \in \mathbb{C} : L(w) \text{ est injective, } \text{Im}(L(w)) \text{ est dense et } L(w) - \lambda Id_w \text{ est borné}\}$$

où $Id_{E_w(\zeta)}$ est l'application identique sur la fibre $E_w(\zeta)$ et Id_ζ est l'application définie sur ζ par $Id_\zeta(w) = Id_{E_w(\zeta)}$. On note

$$\sigma(L) = \{\sigma(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$$

l'ensemble des spectres $\sigma(L(w)) = \mathbb{C} \setminus \rho(L(w))$ et

$$\sigma_p(L) = \{\sigma_p(L(w)) : w \in \mathbf{W}\}$$

où $\sigma_p(L(w))$ est l'ensemble des valeurs propres de $L(w)$.

Definition 11. Une fonction $\phi \in C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{C})$ est propre pour L si $\phi(w) \in \sigma_p(L(w))$, ϕ est une résolvante de L si $\phi(w) \in \rho(L(w))$ pour tout $w \in \mathbf{W}$. La fonction ϕ est spectrale si $\phi(w) \in \sigma(L(w))$.

Proposition 5. Si L est densément défini alors $\ker L^* = \text{Im}(L)^\perp$, c'est-à-dire, pour tout $w \in \mathbf{W}$

$$\ker L^*(w) = \text{Im}(L(w))^\perp$$

l'orthogonalité est définie dans l'espace de Hilbert $E_w(\xi)$.

Si $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ alors l'opérateur de $Id_\zeta + L^*L$ de $\text{Hom}(\zeta)$ est un opérateur injectif,

$$\ker(Id_\zeta + L^*L) = (\mathbf{W} \times o, \pi_1, \mathbf{W}, o)$$

et

$$\text{Im}(Id_\zeta + L^*L) = \zeta,$$

cela signifie que

$$\ker(Id_{E_w(\zeta)} + L(w)^*L(w)) = \{o_w\}$$

et

$$\text{Im}(Id_{E_w(\zeta)} + L(w)^*L(w)) = E_w(\zeta).$$

L'opérateur $(Id_\zeta + L^*L)^{-1}$ est positif et L^*L est autoadjoint avec $\sigma(L^*L) \subset \mathbb{R}^+$, c'est-à-dire, $\sigma(L(w)^*L(w)) \subset \mathbb{R}^+$ pour tout $w \in \mathbf{W}$.

On travaille dorénavant sur les sections des fibrés considérés précédemment. Chaque section s de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ s'écrit

$$s = \{s^{(n)}\},$$

où $s^{(n)}$ est une section de $\mathcal{S}_n(\zeta)$ que l'on peut identifier à une section de $\mathcal{F}_+(\zeta)$

$$\{o, \dots, o, s^{(n)}, o, \dots\}.$$

La section vide de l'espace de Bose-Fock est la section constante $\mathbf{1}_+$ définie par

$$\mathbf{1}_+ = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots\}$$

qui vérifie,

$$\mathbf{1}_+(w) = \{1, o_w, o_w, \dots\} \in E_w(\mathcal{F}_+(\zeta)).$$

Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\zeta)$, il existe un unique opérateur linéaire $a(s)$ densément défini et fermé sur $\mathcal{F}_+(\zeta)$, non borné, appelé annulateur de Bose, son adjoint est l'opérateur $a(s)^*$. Il vérifie les propriétés

$$(a(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(0)} = o,$$

$$(a(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{S}_n(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}) \text{ pour tout } n \geq 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \text{dom}\left(\widetilde{a(s)^*}\right) \quad (5.1)$$

pour chaque $u \in E_w(\zeta)$, l'opérateur $a(u)$ a pour adjoint $a(u)^*$ qui s'écrit

$$a(u)^* \left(\left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \right) = \left\{ 0, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{S}_n \left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)} \right) \right\}_{n \geq 1} \right\}$$

où $\mathcal{S}_n(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)})$ est le symétrisé de $u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)}$ pour tout $\{\mathbf{v}^{(n-1)}\} \in E_w(\mathcal{F}_+(\zeta))$ [1], [2] et [16]. L'opérateur $a(s)^*$ est défini en prenant pour chaque $w \in \mathbf{W}$, l'adjoint de l'opérateur

$$a(s)(w) : E_w(\mathcal{F}_+(\zeta)) \rightarrow E_w(\mathcal{F}_+(\zeta)),$$

sur chaque fibre $E_w(\mathcal{F}_+(\zeta))$. On a

$$a(s) \otimes \mathbf{1}_+ = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \mathcal{S}(\xi),$$

où $\mathbf{o}(w) = (0, o_w, o_w, \dots)$. Pour chaque section s de $\mathcal{S}(\xi)$, il existe un unique opérateur linéaire $b(s)$ sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ appelé annulateur de Fermi tel que

$$\text{dom}(b(s)) = \mathcal{F}_-(\xi) \text{ et } \|b(s)(w)\| = \|s(w)\|_w \text{ pour tout } w \in \mathbf{W},$$

l'adjoint $b(s)^*$ vérifie

$$(b(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(0)} = \mathbf{o} \text{ et } (b(s)^* \otimes \mathbf{t})^{(n)} = \sqrt{n} \mathcal{A}_n \left(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)} \right), \quad n \geq 1 \text{ et } \mathbf{t} \in \mathcal{F}_-(\xi),$$

$\mathcal{A}_n(s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)})$ est l'antisymétrisé d'ordre n de $s \otimes \mathbf{t}^{(n-1)}$. Pour chaque $u \in E_w(\xi)$, l'opérateur $b(u)$ a pour adjoint $b(u)^*$ qui vérifie

$$b(u)^* \left(\left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \right) = \left\{ 0, \left\{ \sqrt{n} \mathcal{A}_n \left(u \otimes \mathbf{v}^{(n-1)} \right) \right\}_{n \geq 1} \right\}, \quad \left\{ \mathbf{v}^{(n)} \right\} \in E_w(\mathcal{F}_-(\xi)).$$

Proposition 6. *Pour toutes sections $s \in \mathcal{S}(\xi)$ et $t \in \mathcal{S}(\xi)$*

$$[b(s), b(t)^*] = \langle s | t \rangle Id_\xi,$$

$$\{b(s), b(t)\} = \mathbf{o}$$

En particulier,

$$b(s)^2 = \mathbf{o}, \quad s \in \mathcal{S}(\xi).$$

Proof. On peut consulter [20] pour une preuve. □

La section vide de l'espace de Fermi-Fock est la section constante $\mathbf{1}_-$ définie par

$$\mathbf{1}_- = \{\mathbf{1}, \mathbf{o}, \mathbf{o}, \dots\},$$

$$\mathbf{1}_-(w) = \{1, o_w, o_w, \dots\} \in E_w(\mathcal{F}_-(\xi)), \quad \forall w \in \mathbf{W}$$

cette section vide vérifie

$$b(s) \otimes \mathbf{1}_- = \mathbf{o} \text{ pour toute section } s \in \mathcal{S}(\xi).$$

On introduit un opérateur différentiel extérieur sur les fibrés des états de la façon suivante. Soit $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$, on pose

$$\mathcal{D}_L^\infty = \text{Vect} \left\{ a(s_1)^* \cdots a(s_n) \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^\infty(L^*L) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^\infty(LL^*) \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^\infty(T) = \bigcap_{n=1}^\infty \text{dom}(\widetilde{T}^n) \text{ pour } T \in \text{Hom}(\zeta) \text{ ou } T \in \text{Hom}(\xi).$$

Proposition 7. *Il existe un unique opérateur linéaire d_L , densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ tel que*

$$\mathcal{D}_L^\infty \subset \text{dom}(d_L) \text{ et } \mathcal{D}_L^\infty \text{ est un coeur de } d_L,$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$d_L \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_L \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)^*} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(L \otimes s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

d_L laisse invariant \mathcal{D}_L^∞ .

De plus,

$$\mathcal{D}_L^\infty \subset \text{dom}(d_L^*)$$

et

$$d_L^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a(L^* \otimes u_k)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^ \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, on a*

$$d_L^* \mathbf{s} = \mathbf{o},$$

en particulier, d_L^ laisse invariant \mathcal{D}_L^∞ .*

$$\text{dom}(d_L^2) = \text{dom}(d_L) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \text{dom}(d_L), d_L^2 \mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur linéaire borné de $\text{Hom}(\zeta, \xi)$ avec $\text{dom}(T) = \mathcal{S}(\zeta)$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_L^\infty$ et $\alpha, \beta \in C^\infty(\mathbf{W}, \mathbb{C})$,

$$\alpha d_L \mathbf{s} + \beta d_T \mathbf{s} = d_{\alpha L + \beta T} \mathbf{s}.$$

Proof. Il suffit de vérifier que la propriété est vraie sur chaque fibre des fibrés considérés. La démonstration sur une fibre du fibré est donnée dans [2], [16] et [17]. \square

Definition 12. *L'opérateur de Dirac sur $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est défini par*

$$Q_L = d_L + d_L^*$$

avec $\text{dom}(Q_L) = \text{dom}(d_L) \cap \text{dom}(d_L^)$. L'opérateur de Laplace-Beltrami sur de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est*

$$\Delta_L = d_L d_L^* + d_L^* d_L.$$

Remark 8. *Les opérateurs de Dirac et Laplace-Beltrami sur l'espace de Bose-Fermi-Fock opèrent sur l'espace des sections du fibré.*

Pour un opérateur autoadjoint T de $\text{Hom}(\zeta)$, c'est-à-dire, un opérateur pour lequel pour tout $w \in \mathbf{W}$

$$T(w) : E_w(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta)$$

est autoadjoint pour la structure d'espace de Hilbert, on pose

$$\widehat{T}^{(n)} : \otimes^n \zeta \rightarrow \otimes^n \zeta$$

défini par

$$\widehat{T}^{(0)} = \mathbf{o}$$

est l'opérateur identiquement nul et

$$\widehat{T}^{(n)} = \sum_{j=1}^n Id_{\zeta} \otimes \cdots \otimes Id_{\zeta} \otimes T \otimes Id_{\zeta} \otimes \cdots \otimes Id_{\zeta}, n \geq 1$$

où T se trouve à la j -ième place. La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\zeta)$ est définie sur les sections du fibré $\mathcal{F}(\zeta)$ par

$$\widehat{T} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \widehat{T}^{(n)}, \widehat{T} \left(\left\{ s^{(n)} \right\} \right) = \left\{ \widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right) \right\},$$

où, si

$$s^{(n)} = s_1 \otimes s_2 \otimes \cdots \otimes s_n$$

alors

$$\widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right) = \sum_{j=1}^n s_1 \otimes \cdots \otimes T(s_j) \otimes \cdots \otimes s_n,$$

\widehat{T} est un opérateur autoadjoint, il suit que pour tout $w \in \mathbf{W}$, $0 \in \sigma_p \left(\widehat{T}(w) \right)$, $\mathbf{1}(w) \in \ker \left(\widehat{T}(w) \right)$. La fonction constante identiquement nulle est une fonction propre de \widehat{T} . On pose

$$\widehat{T}_+ = \widehat{T} |_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \text{ et } \widehat{T}_- = \widehat{T} |_{\mathcal{F}_-(\zeta)},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et la fonction identiquement nulle est propre pour \widehat{T}_+ et \widehat{T}_- car $\mathbf{1}_{\pm}(w) \in \ker \left(\widehat{T}_{\pm}(w) \right)$.

Proposition 8. *La seconde quantification de T est stable sur les sections de $\mathcal{F}_+(\zeta)$ et $\mathcal{F}_-(\zeta)$.*

Proof. On a

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{(n)} \left(s_{\sigma}^{(n)} \right) &= \sum_{j=1}^n s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes T \left(s_{\sigma(\sigma^{-1}(j))} \right) \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(n)} \\ &= \sum_{k=1}^n s_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes T \left(s_{\sigma(k)} \right) \otimes \cdots \otimes s_{\sigma(n)} = \widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right)_{\sigma}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \widehat{T}^{(n)} \left(\mathcal{S}_n \left(s^{(n)} \right) \right) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \widehat{T}^{(n)} \left(s_{\sigma}^{(n)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right)_{\sigma} = \mathcal{S}_n \left(\widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right) \right), \\ \widehat{T}^{(n)} \left(\mathcal{A}_n \left(s^{(n)} \right) \right) &= \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \widehat{T}^{(n)} \left(s_{\sigma}^{(n)} \right) = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma} \varepsilon(\sigma) \widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right)_{\sigma} \\ &= \mathcal{A}_n \left(\widehat{T}^{(n)} \left(s^{(n)} \right) \right). \end{aligned}$$

□

On pose

$$\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\zeta)$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\zeta) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\zeta),$$

les sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ qui donnent la décomposition orthogonale

$$\mathcal{F}(\zeta, \xi) = \mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi) \oplus \mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi),$$

si on note π_+ et π_- les projections orthogonales sur respectivement $\mathcal{F}_{+1}(\zeta, \xi)$ et $\mathcal{F}_{-1}(\zeta, \xi)$, l'opérateur Γ de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ est défini par

$$\Gamma = \pi_+ - \pi_-$$

cet opérateur a pour fonctions propres les fonctions constantes -1 et $+1$ et vérifie

$$\Gamma^2 = Id_{\mathcal{F}(\zeta, \xi)}.$$

Remark 9. L'opérateur nombre sur $\mathcal{F}_-(\xi)$ est défini par $N = \widehat{Id}_{\xi_-}$, en utilisant la notation de [2], on peut écrire

$$\Gamma = Id_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes (-1)^N.$$

Soit l'opérateur

$$\mathcal{L} = \widehat{L^*L}_+ \otimes Id_{\mathcal{F}_-(\xi)} \oplus Id_{\mathcal{F}_+(\zeta)} \otimes \widehat{LL^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ qui est positif et autoadjoint, la fonction identiquement nulle sur \mathbf{W} est une fonction propre de \mathcal{L} car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker(\mathcal{L}).$$

Theorem 9. L'opérateur Q_L est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de \mathcal{L} . En particulier, Q_L est essentiellement autoadjoint sur \mathcal{D}_L^∞ . L'opérateur Γ laisse invariant $\text{dom}(Q_L)$ et

$$\{\Gamma, Q_L\} = \Gamma Q_L + Q_L \Gamma = o_{\mathcal{F}(\zeta, \xi)}$$

sur $\text{dom}(Q_L)$. On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_L = \mathcal{L} = Q_L^2.$$

Proof. Il suffit de vérifier le résultat sur chaque fibre du fibré $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$. Sur les fibres, on peut consulter [2], [16] et [17]. \square

Definition 13. Le quadruplet

$$\{\mathcal{F}(\zeta, \xi), Q_L, \mathcal{L}, \Gamma\}$$

est appelée quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ) .

Dans ce qui suit, on suppose que l'opérateur $L \in \mathcal{C}(\zeta, \xi)$ et $L^* \in \mathcal{C}(\xi, \zeta)$ ont pour fonction propre la fonction identiquement nulle, c'est-à-dire, que

$$\ker L = (\cup_{w \in \mathbf{W}} \ker L(w), \pi, \mathbf{W}) \text{ et } \ker L^* = (\cup_{w \in \mathbf{W}} \ker L^*(w), \pi, \mathbf{W})$$

sont des sous-fibrés de ζ et ξ , on pose

$$\text{nul } L = \dim(\ker L).$$

Theorem 10. Si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de, respectivement ζ et ξ , alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ et

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \bigoplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

On a, si

$$\text{nul } L = 0 \text{ et } \text{nul } L^* < \infty \text{ alors } \text{nul } Q_L = 2^{\text{nul } L^*} < \infty,$$

si

$$\text{nul } L = 0 \text{ et } \text{nul } L^* = \infty \text{ alors } \text{nul } Q_L = \infty$$

et si

$$\text{nul } L \geq 1 \text{ alors } \text{nul } Q_L = \infty.$$

Proof. On vérifie que si $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des sous-fibrés de ζ et ξ alors $\ker Q_L$ et $\ker \mathcal{L}$ sont des sous-fibrés de $\mathcal{F}(\zeta, \xi)$ en remarquant que la propriété

$$\ker Q_L(w) = \ker \widehat{L}(w) = \bigoplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker(L(w))) \otimes \mathcal{A}_p(\ker(L^*(w)))] \quad (5.2)$$

est vraie pour tout $w \in \mathbf{W}$. Ensuite, on peut écrire, puisque $\ker L$ et $\ker L^*$ sont des fibrés

$$\ker Q_L = \ker \mathcal{L} = \bigoplus_{n,p=0}^{\infty} [\mathcal{S}_n(\ker L) \otimes \mathcal{A}_p(\ker L^*)].$$

La relation 5.2 a été démontrée dans [1]. \square

On s'intéresse, dorénavant, aux espaces de Hilbert

$$\mathbf{H} = L^2(\Gamma(\zeta), \mu) \text{ et } \mathbf{K} = L^2(\Gamma(\xi), \mu)$$

où μ est une forme volume sur \mathbf{W} . La forme volume sera en général, la forme induite par la métrique de Lorentz g de l'univers \mathbf{W} , les résultats sont vrais pour toutes les mesures sur \mathbf{W} . Les produits scalaires associés, à cette mesure μ , sont

$$\langle s | t \rangle_{\mathbf{H}} = \int_{\mathbf{W}} \langle s | t \rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de \mathbf{H} et

$$\langle s | t \rangle_{\mathbf{K}} = \int_{\mathbf{W}} \langle s | t \rangle \mu$$

pour toutes sections s et t de \mathbf{K} . Pour un opérateur

$$L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$$

on définit l'opérateur

$$\widetilde{L} : \text{dom}(\widetilde{L}) \subset \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}, \quad \widetilde{L}(s) = L \otimes s$$

avec

$$\text{dom}(\widetilde{L}) = \{s \in \mathbf{H} : L \otimes s \in \mathbf{K}\} \text{ et } L \otimes s(w) = L(w) s(w).$$

On suppose que \widetilde{L} est un opérateur densément défini et fermé. On pose

$$\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} = \text{Vect} \left\{ a(s_1)^* \cdots a(s_n) \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_- : s_j \in \mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{L}^* \widetilde{L}) \text{ et } t_k \in \mathcal{C}^{\infty}(\widetilde{L} \widetilde{L}^*) \right\}$$

où

$$\mathcal{C}^{\infty}(T) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \text{dom}(T^n)$$

pour un opérateur T de \mathbf{H} ou de \mathbf{K} .

Proposition 9. *Il existe un unique opérateur linéaire $d_{\widetilde{L}}$, densément défini et fermé sur $\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ tel que*

$$\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} \subset \text{dom}(d_{\widetilde{L}}) \text{ et } \mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty} \text{ est un coeur de } d_{\widetilde{L}},$$

pour chaque section $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$ de la forme

$$\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

alors

$$d_{\widetilde{L}} \mathbf{s} = \mathbf{o} \text{ pour } n = 0$$

$$d_{\widetilde{L}} \mathbf{s} = \sum_{j=1}^n a(s_1)^* \cdots \widehat{a(s_j)} \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(\widetilde{L}s_j)^* b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-,$$

$d_{\widetilde{L}}$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\widetilde{L}}^{\infty}$.

De plus,

$$\mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty} \subset \text{dom} \left(d_{\tilde{L}}^* \right)$$

et

$$d_{\tilde{L}}^* \mathbf{s} = \sum_{k=1}^p (-1)^{k-1} a \left(\tilde{L}^* u_k \right)^* a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_k)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$$

pour tout $\mathbf{s} = a(s_1)^* \cdots a(s_n)^* \mathbf{1}_+ \otimes b(t_1)^* \cdots b(t_p)^* \mathbf{1}_-$. Dans le cas $p = 0$, $d_{\tilde{L}}^* \mathbf{s} = \mathbf{o}$, en particulier, $d_{\tilde{L}}^*$ laisse invariant $\mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty}$.

$$\text{dom} \left(d_{\tilde{L}}^2 \right) = \text{dom} \left(d_{\tilde{L}} \right) \text{ et pour tout } \mathbf{s} \in \text{dom} \left(d_{\tilde{L}} \right), d_{\tilde{L}}^2 \mathbf{s} = \mathbf{o}.$$

Si T est un opérateur de $\text{Hom}(\zeta, \xi)$ tel que \tilde{T} est borné et $\text{dom} \left(\tilde{T} \right) = \mathcal{H}$ alors pour tout $\mathbf{s} \in \mathcal{D}_{\tilde{L}}^{\infty}$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$,

$$\alpha d_{\tilde{L}} \mathbf{s} + \beta d_{\tilde{T}} \mathbf{s} = d_{\alpha \tilde{L} + \beta \tilde{T}} \mathbf{s}.$$

Proof. La preuve est donnée dans [2]. □

On peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\tilde{L}} = d_{\tilde{L}} + d_{\tilde{L}}^*$$

de domaine

$$\text{dom} Q_{\tilde{L}} = \text{dom} d_{\tilde{L}} \cap \text{dom} d_{\tilde{L}}^*,$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\tilde{L}} = d_{\tilde{L}}^* d_{\tilde{L}} + d_{\tilde{L}} d_{\tilde{L}}^*$$

sur $\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$. La seconde quantification de T sur $\mathcal{F}(\mathbf{H})$, $\hat{T} = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \hat{T}^{(n)}$ est un opérateur autoadjoint, $0 \in \sigma_p \left(\hat{T} \right)$, $\mathbf{1} \in \ker \left(\hat{T} \right)$ et donc \hat{T} a pour propre 0. On pose

$$\hat{T}_+ = \hat{T} |_{\mathcal{F}_+(\mathbf{H})} \text{ et } \hat{T}_- = \hat{T} |_{\mathcal{F}_-(\mathbf{H})},$$

ces opérateurs sont autoadjoints et 0 est une valeur propre pour \hat{T}_+ et \hat{T}_- car $\mathbf{1}_{\pm} \in \ker \left(\hat{T}_{\pm} \right)$. L'opérateur $\Gamma = \pi_+ - \pi_-$ de $\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ il a pour valeurs propres, les fonctions constantes +1 et -1, où π_+ et π_- sont les projections sur

$$\mathcal{F}_{+1}(\mathbf{H}, \mathbf{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\mathbf{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p}(\mathbf{K})$$

et

$$\mathcal{F}_{-1}(\mathbf{H}, \mathbf{K}) = \bigoplus_{p=0}^{\infty} \mathcal{F}_+(\mathbf{H}) \otimes \mathcal{A}_{2p+1}(\mathbf{K}).$$

Soit l'opérateur

$$\mathcal{L} = \widehat{\tilde{L}^* \tilde{L}}_+ \otimes \mathbf{I}_{\mathcal{F}_-(\mathbf{K})} + \mathbf{I}_{\mathcal{F}_+(\mathbf{H})} \otimes \widehat{\tilde{L} \tilde{L}^*}_-,$$

c'est un opérateur de $\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$ qui est positif et autoadjoint, 0 est une valeur propre de $\overline{\mathcal{L}}$ car

$$\mathbf{1} = \mathbf{1}_+ \otimes \mathbf{1}_- \in \ker \left(\overline{\mathcal{L}} \right).$$

Theorem 11. *L'opérateur $Q_{\tilde{\mathcal{L}}}$ est autoadjoint et essentiellement autoadjoint sur chaque coeur de \mathcal{L} . En particulier, $Q_{\tilde{\mathcal{L}}}$ est essentiellement autoadjoint sur $\mathcal{D}_{\tilde{\mathcal{L}}}^{\infty}$. L'opérateur Γ laisse invariant $\text{dom}(Q_{\tilde{\mathcal{L}}})$ et*

$$\{\Gamma, Q_{\tilde{\mathcal{L}}}\} = \Gamma Q_{\tilde{\mathcal{L}}} + Q_{\tilde{\mathcal{L}}}\Gamma = o_{\mathcal{F}(\mathcal{H}, \mathcal{K})}$$

sur $\text{dom}(Q_{\tilde{\mathcal{L}}})$. On a l'égalité entre les opérateurs

$$\Delta_{\tilde{\mathcal{L}}} = \mathcal{L} = Q_{\tilde{\mathcal{L}}}^2.$$

Proof. La preuve est dans [2], [16] et [17]. □

Definition 14. *Le quadruplet*

$$\{\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K}), Q_{\tilde{\mathcal{L}}}, \mathcal{L}, \Gamma\}$$

est appelée μ -quantification supersymétrique du triplet (ζ, L, ξ) .

Soit le fibré ξ sur \mathbf{W} , d'espace total

$$E(\xi) = \Lambda^1 \mathbf{W} \otimes E(\zeta),$$

où ζ est un fibré d'état de l'univers \mathbf{W} muni d'une connexion de Koszul ∇ . On suppose l'existence sur ce fibré ξ , d'une structure de fibré d'état ayant la propriété suivante,

$$\nabla : \mathbf{H} \rightarrow \mathbf{K}$$

soit un opérateur fermé, densément défini, de domaine $\text{dom}(\nabla) \subset \mathbf{H}$ à valeurs dans \mathbf{K} avec

$$\mathbf{H} = L^2(\Gamma(\zeta), \mu) \text{ et } \mathbf{K} = L^2(\Gamma(\Lambda^1 \mathbf{W} \otimes \zeta), \nu),$$

avec

$$\begin{aligned} \langle s, t \rangle_{\mathbf{H}} &= \int_{\mathbf{W}} \langle s, t \rangle \mu \text{ et } \langle d \otimes s, \delta \otimes t \rangle_{\mathbf{H}} = \int_{\mathbf{W}} \langle d \otimes s, \delta \otimes t \rangle \mu \\ \langle s, t \rangle(w) &= \langle s(w), t(w) \rangle_{\zeta, w} \text{ et } d \otimes s(w) = d(w)(s(w))s(w) \end{aligned}$$

où $\langle s(w), t(w) \rangle_{\zeta, w}$ est le produit hilbertien sur chaque fibre $E_w(\zeta)$ et μ est une forme volume sur \mathbf{W} . Sous ces hypothèses, on peut définir l'opérateur de Dirac

$$Q_{\nabla} = d_{\nabla} + d_{\nabla}^*$$

de domaine

$$\text{dom } Q_{\nabla} = \text{dom } d_{\nabla} \cap \text{dom } d_{\nabla}^*,$$

et l'opérateur de Laplace-Beltrami

$$\Delta_{\nabla} = d_{\nabla}^* d_{\nabla} + d_{\nabla} d_{\nabla}^*$$

sur $\mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K})$. On a, si on pose

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla} &= \widehat{\nabla^* \nabla}_+ \otimes Id_{\mathcal{F}_-(\mathbf{K})} + Id_{\mathcal{F}_+(\mathbf{H})} \otimes \widehat{\nabla \nabla^*}_- \\ &\left\{ \mathcal{F}(\mathbf{H}, \mathbf{K}), Q_{\nabla}, \tilde{\nabla}, \Gamma \right\} \end{aligned}$$

est la μ -quantification de la connexion de Koszul ∇ et

$$\Delta_{\nabla} = \tilde{\nabla} = Q_{\nabla}^2.$$

Definition 15. *Une connexion de Koszul ∇ est une connexion de Lorentz si il existe une métrique de Lorentz g pour laquelle ∇ est un opérateur fermé et densément défini pour la forme volume μ_g induite par g .*

Theorem 12. *Une connexion de Lorentz est μ_g -quantifiable.*

6. LES GRAPHES QUANTIQUES

La représentation quantique de l'univers, que je propose, est basée sur le concept d'univers observable. On ne peut observer l'univers qu'en ses irrégularités. Pour notre représentation, une ligne de l'univers \mathbf{W} est une sous-variété topologique L de dimension 1 pour laquelle il existe une sous-suite d'événements $\{w_n\} \subset L$ telle que chaque composante connexe de $L \setminus \{w_n\}$ soit une C^∞ -sous-variété ouverte de dimension 1. Chaque événement w_n est un noeud et $\{w_n\}$ est la partie observable de L . La masse, dans notre représentation, est une fonction du degré d'irrégularité aux noeuds. On mesure l'irrégularité des noeuds en utilisant la notion de dérivée fractionnaire. Soit φ une carte locale en un noeud w de L ,

$$\varphi : \mathbb{R} \rightarrow L, \varphi(0) = w$$

φ est un homéomorphisme de \mathbb{R} sur $\varphi(\mathbb{R}) \subset L \setminus \{w_n : w_n \neq w\}$. On note ϕ une carte W de l'univers \mathbf{W} en w ,

$$\phi : W \rightarrow \mathbb{R}^4, \phi(w) = o \text{ et } \phi = (\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$$

si $\phi_j \circ \varphi$ a une dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha_j \in]0, 1[$ en w , le degré d'irrégularité de L en w est

$$\alpha = \inf \{\alpha_j\}.$$

Cette définition est indépendante du paramétrage φ de L en w et de la carte choisie ϕ .

Definition 16. Si ψ est une fonction continue sur $[a, b]$, l'intégrale de Riemann-Liouville au point $x \in [a, b]$ est définie par

$$I_a(\psi, \alpha)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^x (x-t)^{\alpha-1} \psi(t) dt.$$

On rappelle que

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{+\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt = \mathcal{L}(t^{\alpha-1} u(t)) (1)$$

où \mathcal{L} est l'opérateur de Laplace. La dérivée de Riemann-Liouville

$$D^\alpha(\psi, a)(x) = \frac{d}{dx} (I_a(\psi, 1-\alpha))(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d}{dx} \left(\int_a^x \frac{\psi(t)}{(x-t)^\alpha} dt \right)$$

et $\alpha \leq 1$. La dérivée fractionnaire locale à droite et à gauche de f en $y \in [a, b]$ est, respectivement,

$$d_-^\alpha \psi(y) = \lim_{x \rightarrow y^-} D^\alpha(\psi - \psi(y), y)(x)$$

et

$$d_+^\alpha \psi(y) = \lim_{x \rightarrow y^+} D^\alpha(\psi - \psi(y), y)(x).$$

Proposition 10. Si ψ est différentiable en y , $\lim_{\alpha \rightarrow 1} d_\pm^\alpha \psi(y) = \psi'(y)$.

Pour toute constante $C \in \mathbb{R}$, $d_\pm^\alpha(C) = 0$.

Theorem 13. Soit ψ une fonction continue sur $[a, b]$, $\alpha \leq 1$

$$d_\pm^\alpha \psi(y) = \Gamma(1+\alpha) \lim_{x \rightarrow y^\pm} \frac{\pm(\psi(y) - \psi(x))}{(\pm(y-x))^\alpha}.$$

En particulier, ψ est α -dérivable en $y \in]a, b[$ si les dérivées fractionnaires, à gauche et à droite de y , sont égales et

$$d_{\pm}^{\alpha} \psi(y) = \Gamma(1 + \alpha) \psi^{(\alpha)}(y).$$

Proof. On peut consulter [3] pour une preuve. \square

On a

$$d_{+}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{x \rightarrow y^{+}} \frac{d}{dx} \left(\int_y^x \frac{f(t) - f(y)}{(x - t)^{\alpha}} dt \right)$$

et

$$d_{-}^{\alpha} f(y) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \lim_{x \rightarrow y^{-}} \frac{d}{dx} \left(\int_x^y \frac{f(y) - f(t)}{(t - x)^{\alpha}} dt \right).$$

Plus la masse est petite, plus la courbe est irrégulière et on peut définir la masse aux noeuds comme une fonction croissante de l'ordre d'irrégularité en ce noeud. On peut donc commencer la construction du graphe quantique par ses sommets qui sont les noeuds des lignes d'univers. Pour définir les arêtes du graphe quantique, on peut imaginer ses arêtes comme des géodésiques de la métrique de Lorentz. Pour deux noeuds très éloignés, il faut imposer le principe de moindre action en définissant les géodésiques de l'univers d'énergie minimale. On est donc amené à définir l'intégrale de Feynman et la transformée de Fourier par fibre.

Definition 17. Soit λ une mesure sur un espace vectoriel X qui est d'Hausdorff et localement convexe, de dual X^* , alors la transformée de Fourier de λ est la fonction complexe définie sur X^* par

$$\mathcal{F}\lambda(x^*) = \int_X \exp(-i \langle x^*, x \rangle) d\lambda(x),$$

où $x \in X$, $x^* \in X^*$ et

$$\langle x^*, x \rangle = x^*(x).$$

Soit

$$L : X \rightarrow Y$$

une application linéaire continue entre deux espaces vectoriels topologiques localement convexes et d'Hausdorff. Pour la transposée de L notée L^* , on peut écrire

$$\langle L^*(y^*), x \rangle = \langle y^*, L(x) \rangle, \quad y^* \in Y^*, \quad x \in X$$

et

$$L^*(y^*) = y^* \circ L,$$

notons λ_L , l'image de la mesure λ par l'application linéaire L ,

$$\lambda_L(B) = \lambda(L^{-1}(B)), \quad B \subset Y$$

alors

$$\mathcal{F}\lambda_L = \mathcal{F}\lambda \circ L^*,$$

en particulier, pour une forme linéaire continue L sur X ,

$$L : X \rightarrow \mathbb{R}$$

on a si

$$\tau = \langle L, x \rangle = L(x)$$

$$\mathcal{F}\lambda_L(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}\lambda \circ L^*(\mathbf{1}_{\mathbb{R}}) = \mathcal{F}\lambda(L) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-i\tau) d\lambda_L(\tau),$$

$\mathbf{1}_{\mathbb{R}}$ est l'application identique de \mathbb{R} . Pour tout sous-espace fermé V de codimension finie, si

$$\pi_V : X \rightarrow X/V$$

est la projection canonique sur l'espace quotient X/V , π_V^* est un isomorphisme de $(X/V)^*$ sur

$$V^\circ = \{x^* \in X^* : \langle x^*, x \rangle = 0, \forall x \in V\}$$

et pour $y^* \in (X/V)^*$

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\lambda_{\pi_V}(y^*) &= \int_{X/V} \exp(-i \langle y^*, y \rangle) d\lambda_{\pi_V}(y) = \mathcal{F}\lambda \circ \pi_V^*(y^*) \\ &= \mathcal{F}\lambda(x^*), \quad x^* \in V^\circ \subset X^*. \end{aligned}$$

On note $\mathcal{F}(X)$, l'ensemble des sous-espaces vectoriels fermés V de X tels que

$$\text{codim } V < +\infty,$$

alors

$$X^* = \cup_{V \in \mathcal{F}(X)} V^\circ$$

ce qui permet de définir la transformée de Fourier par une famille de transformées de Fourier sur des espaces vectoriels de dimension finie.

Definition 18. Une pseudo-mesure μ sur X est une famille $\{\mu_V\}_{V \in \mathcal{F}(X)}$ telle que, μ_V soient des mesures σ -additives sur X/V qui satisfont à la condition de compatibilité suivante. Si $W \subset V$, μ_V est la mesure image de μ_W par l'application π_{VW}

$$\mu_V(B) = \mu_W(A), \quad A = \pi_{VW}^{-1}(B)$$

où π_{VW} est la projection canonique

$$\pi_{VW} : X/W \rightarrow X/V$$

vérifiant

$$\pi_V = \pi_{VW} \circ \pi_W.$$

Si la famille $\{\mu_V\}_{V \in \mathcal{F}(X)}$ est une famille de mesure finies telles que

$$\mu_V(X/V) = \mu(X),$$

ne dépend pas de V , on dit que la pseudo-mesure est finie de masse $\mu(X)$.

La transformée de Fourier d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(x^*) = \mathcal{F}\mu_V \circ (\pi_V^*)^{-1}(x^*), \quad \forall x^* \in V^\circ.$$

Lemma 3. Si $x^* \in V^\circ \cap W^\circ$ alors

$$\mathcal{F}\mu(x^*) = \mathcal{F}\mu_V \circ (\pi_V^*)^{-1}(x^*) = \mathcal{F}\mu_W \circ (\pi_W^*)^{-1}(x^*),$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\mathcal{F}\mu(x^*) = \int_{X/V} \exp(-i \langle x^*, x \rangle) d\mu_V(x) = \int_{\mathbb{R}} \exp(-it) d\mu_{V, x^*}(t).$$

pour tout $x^* \in V^\circ$.

Proof. La preuve est dans [10]. □

Theorem 14. *Si Q est une forme quadratique positive sur X^* , il existe une unique pseudo-mesure finie μ sur X telle que*

$$\mathcal{F}\mu(x^*) = \exp\left(-\frac{i}{2}Q(x^*)\right), \forall x^* \in X^*.$$

Proof. Cette preuve est développée dans [4]. □

Soit \mathcal{C} l'espace vectoriel des chemins

$$\gamma : T = [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}$$

tels que

$$\gamma(t_0) = \gamma(t_1) = 0,$$

\mathcal{C} est un espace vectoriel d'Hausdorff et localement connexe pour la norme uniforme. Le dual de \mathcal{C} , noté \mathcal{M} , est l'espace vectoriel des mesures bornées sur T . L'intégrale de chemin de Feynman [5] d'une particule de masse m , à un degré de liberté, évoluant dans un potentiel \mathcal{V} , est donnée par

$$\int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{V}(\gamma(t)) dt\right) dw(\sqrt{m}\gamma),$$

où w est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier est

$$\mathcal{F}w(\mu) = \exp\left(-\frac{i}{2}W(\mu)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2} \int_{T \times T} \text{inf}(t, s) d\mu(t) d\mu(s)\right)$$

pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}$ [10]. Le propagateur $\mathcal{K}((x_1, t_1), (x_0, t_0))$ permet de déterminer l'amplitude de probabilité de trouver la particule $x_1 \in \mathbb{R}$ à l'instant t_1 si elle se trouvait localisée en x_0 à l'instant t_0 avec $t_1 \geq t_0$. Si $\tilde{\gamma}$ est un chemin fixé tel que

$$\tilde{\gamma}(t_0) = x_0 \text{ et } \tilde{\gamma}(t_1) = x_1,$$

le calcul du propagateur dans le cas d'un degré de liberté est

$$\mathcal{K}((x_1, t_1), (x_0, t_0)) = \sqrt{m} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_o(\tilde{\gamma})\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\tilde{\gamma} + \gamma)\right) dw(\gamma),$$

\mathcal{S} est l'action qui se scinde sous la forme

$$\mathcal{S} = \mathcal{S}_o + \mathcal{S}_{int}$$

où \mathcal{S}_o est l'action d'une particule de masse m et \mathcal{S}_{int} est l'interaction dans le potentiel \mathcal{V} définie par

$$\mathcal{S}_{int}(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} \mathcal{V}(\gamma(t)) dt.$$

Soit ϕ une densité d'état $\phi : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$, on définit le graphe orienté $\mathcal{G} = \mathcal{G}(\mathbf{W}, \phi, g)$, les sommets du graphe sont les noeuds des lignes d'univers. Notons $\mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ l'ensemble des sommets du graphe, un arc joint le sommet w_0 au sommet w_1 si

$$\phi(w_0) < \phi(w_1)$$

et il existe une géodésique de la pseudo-métrique g joignant les sommets w_0 et w_1 . On pondère les arcs pour minimaliser la densité d'état de la façon suivante. Soit γ un \mathcal{C}^∞ -chemin de l'événement w_0 à w_1 alors $\phi \circ \gamma \in \mathcal{C} = \mathcal{C}^\infty(I, \mathbb{R})$, on définit le propagateur de Feynman pour ϕ par

$$\mathcal{K}_\phi(w_0, w_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_o(\phi \circ \gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\phi \circ \gamma + \tau)\right) d\mu(\tau),$$

où m_0 est la masse de la particule en l'événement w_0 , γ est une géodésique joignant les événements w_0 et w_1 , l'action \mathbf{S} de la particule se scinde sous la forme

$$\mathbf{S} = \mathbf{S}_o + \mathbf{S}_{int}$$

avec \mathbf{S}_o est la ϕ -action et \mathbf{S}_{int} est la ϕ -interaction dans un potentiel \mathcal{V} définies le long du chemin γ par

$$\mathbf{S}_o(\gamma) = \mathcal{S}_o(\phi \circ \gamma) \text{ et } \mathbf{S}_{int}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t)) dt,$$

la pseudo-mesure μ est définie par sa transformée de Fourier

$$\mathcal{F}\mu(\rho) = \exp\left(-\frac{i}{2}W(\rho)\right) = \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{[0,1]^2} \inf(t,s) d\rho(t) d\rho(s)\right),$$

pour toute mesure $\rho \in \mathcal{M}$.

Remark 10. On peut définir \mathcal{S}_o de façon intrinsèque en associant à chaque particule sa fonction d'onde sur l'univers \mathbf{W} par

$$\varphi(w) = |\varphi(w)| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_o(w)\right), \quad (6.1)$$

l'action \mathcal{S}_o vérifie l'équation 6.1.

Si

$$\phi(\gamma_0) = \phi(\gamma_1) \implies \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_0(t)) dt = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma_1(t)) dt,$$

alors ϕ est une \mathcal{V} -densité. Sous l'hypothèse $\phi = \mathcal{V}$,

$$\mathcal{S}_{int} \circ \mathcal{V}(\gamma) = \int_0^1 \mathcal{V}(\gamma(t)) dt$$

et l'interaction s'écrit

$$\mathcal{S}_{int}(\tau) = \int_0^1 \tau(t) dt, \forall \tau \in \mathcal{C},$$

sous cette hypothèse, on peut décrire le propagateur de Feynman de façon intrinsèque, si γ est une géodésique de g , on a

$$\mathcal{K}(w_0, w_1) = \sqrt{m_0} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathbf{S}_o(\gamma)\right) \int_{\mathcal{C}} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\int_0^1 (\mathcal{V} \circ \gamma(t) + \tau(t)) dt\right) d\mu(\tau),$$

et μ est la pseudo-mesure définie par

$$\mathcal{F}\mu(\rho) = \exp\left(-\frac{i}{2}\int_{[0,1]^2} \inf(t,s) d\rho(t) d\rho(s)\right),$$

et $\mathbf{S}_o(\gamma) = \mathcal{S}_o \circ \phi(\gamma)$ la ϕ -action dans l'état de la particule dans l'univers \mathbf{W} , le long du chemin γ . On peut, maintenant, définir la pondération sur l'arc (w_0, w_1) du graphe quantique $\mathcal{G}(\mathbf{W}, \phi, g)$ par

$$\text{pond}(w_0, w_1) = |\mathcal{K}(w_0, w_1)|,$$

et le principe de moindre action s'énonce ainsi: "Pour une particule de masse m_0 qui se situe en l'événement w_0 , la probabilité de la localisée en w_1 est $\text{pond}(w_0, w_1)$. La ligne d'univers est un chemin fini ou infini du graphe pour lequel entre deux sommets consécutifs w_0 et w_1 , on a

$$\text{pond}(w_0, w_1) = \inf \{ \text{pond}(w_0, w) : (w_0, w) \in \mathcal{A}(\mathcal{G}) \}$$

où $A(\mathcal{G})$ est l'ensemble des arcs de \mathcal{G} . On généralise les résultats précédents aux fibrés d'état de l'univers \mathbf{W} . Dans ce qui suit

$$\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{F}),$$

est un fibré Hilbertien réel ou complexe [9] et [19], de fibre \mathcal{F} sur l'univers \mathbf{W} , qui est une variété de dimension $\dim \mathbf{W} = 4$. Le fibré dual de ζ est noté ζ^* , si s et s^* sont des sections de, respectivement, ζ et ζ^* on pose

$$s^* \otimes s(w) = s^*(w)(s(w)), \forall w \in \mathbf{W}.$$

On rappelle que si λ est une mesure finie sur $\Gamma(\zeta)$, sur l'espace vectoriel des sections de ζ , on définit la transformée de Fourier en fibre de λ sur un fibré vectoriel quelconque par

$$\mathcal{F}\lambda(s^*)(w) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-is^* \otimes s(w)) d\lambda(s) \quad [10],$$

c'est une section du fibré trivial

$$(\mathbf{W} \times \mathcal{C}^\infty(\zeta^*), \pi_1, \mathbf{W})$$

où $\mathcal{C}^\infty(\zeta^*)$ est l'espace vectoriel des \mathcal{C}^∞ -applications, au sens de Banach, de $\Gamma(\zeta^*)$ à valeurs dans \mathbb{C} . Dans l'hypothèse d'un fibré hilbertien on a sur chaque fibre un produit scalaire dans le cas réel ou un produit hermitien dans le cas complexe, noté $\langle u, v \rangle_w$ pour u et v dans $E_w(\zeta)$ tel que si s et t sont des sections de ζ , l'application

$$w \rightarrow \langle s(w), t(w) \rangle_w$$

est \mathcal{C}^∞ . On peut définir la transformée de Fourier d'une mesure λ finie sur $\Gamma(\zeta)$ par

$$\mathcal{F}\lambda(s) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i \langle s, t \rangle) d\lambda(t)$$

où $\mathcal{F}\lambda(s)$ est un section du fibré trivial $(\mathbf{W} \times \mathcal{C}^\infty(\zeta), \pi_1, \mathbf{W})$ et

$$\mathcal{F}\lambda(s)(w) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i \langle s(w), t(w) \rangle_w) d\lambda(t).$$

On pose θ , θ_w et θ_s , les \mathcal{C}^∞ -applications comme applications de variétés de Banach définies par

$$\theta : \Gamma(\zeta) \times \mathbf{W} \rightarrow E(\zeta), \theta(s, w) = s(w),$$

$$\theta_w : \Gamma(\zeta) \rightarrow E_w(\zeta), \theta_w(s) = s(w)$$

et

$$\theta_s : \mathbf{W} \rightarrow E_w(\zeta), \theta_s(w) = s(w),$$

pour une mesure λ sur $\Gamma(\zeta)$, on note $\lambda(w)$ la mesure image de λ par θ_w alors

$$\mathcal{F}\lambda(s^*)(w) = \int_{E_w(\zeta)} \exp(-is^*(w)(u)) d\lambda(w)(u)$$

par changement de variable, avec les notations précédentes

$$\mathcal{F}\lambda(s^*)(w) = \mathcal{F}\lambda(w)(s^*(w)), s^*(w) \in E_w(\zeta^*), \quad (6.2)$$

dans l'équation 6.2, le membre de gauche représente la transformée de Fourier en fibre de la mesure λ et le membre de droite la transformée de Fourier de la mesure

image $\lambda(w)$ sur $E_w(\zeta)$. En utilisant le théorème de Riesz, on peut écrire que transformée de Fourier d'une mesure finie λ de $\Gamma(\zeta)$ est définie par

$$\mathcal{F}\lambda(s) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-i \langle s, t \rangle) d\lambda(t) = \mathcal{F}\lambda(s^*)$$

où s^* est défini par l'isomorphisme de Riesz

$$s \rightarrow s^*, s^*(w)(u) = \langle s(w), u \rangle_w \text{ avec } u \in E_w(\zeta),$$

dans le cas d'un fibré hilbertien, on identifie les deux représentations de la transformée de Fourier en fibre par l'isomorphisme de Riesz. Soit L un morphisme de fibrés de ζ dans ξ , $L \in \text{Hom}(\zeta, \xi)$, alors L induit un morphisme d'espaces vectoriel de $\Gamma(\zeta)$ dans $\Gamma(\xi)$ défini par

$$\mathcal{L}(s_\zeta) = L \otimes s_\zeta \text{ avec } L \otimes s_\zeta(w) = L(w)(s_\zeta(w)), \forall w \in \mathbf{W},$$

et soit \mathcal{L}^* le morphisme d'espaces vectoriels de $\Gamma(\xi^*)$ dans $\Gamma(\zeta^*)$, défini par

$$\mathcal{L}^*(s_{\xi^*}) = s_{\xi^*} \circ L \text{ avec } (s_{\xi^*} \circ L)(w) = s_{\xi^*}(w) \circ L(w), \forall w \in \mathbf{W}$$

on a

$$\mathcal{L}^*(s_{\xi^*}) \otimes s_\zeta(w) = s_{\xi^*} \otimes \mathcal{L}(s_\zeta)(w), \forall w \in \mathbf{W}.$$

Notons $\lambda_{\mathcal{L}}$, la mesure image de λ par l'application linéaire \mathcal{L} ,

$$\lambda_{\mathcal{L}}(B) = \lambda(\mathcal{L}^{-1}(B)), B \subset \Gamma(\xi)$$

alors

$$\mathcal{F}\lambda_{\mathcal{L}} = \mathcal{F}\lambda \circ \mathcal{L}^*.$$

On note $\mathcal{S}(\zeta)$, l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie. Si $\varsigma \in \mathcal{S}(\zeta)$, la fibre \mathcal{E}_ς de ς est un sous-espace vectoriel fermé de \mathcal{E} de codimension finie. On définit le fibré quotient ζ/ς , de fibre $\mathcal{E}/\mathcal{E}_\varsigma$ dont les cartes de trivialisations sont données par

$$p_U : \pi_{\zeta/\varsigma}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{E}/\mathcal{E}_\varsigma, p_U(x) = (\pi(x), \mathbf{p}(x)),$$

si U est un ouvert de trivialisations de ζ et

$$\mathbf{p}_U : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathcal{E}, \mathbf{p}_U(x) = (\pi(x), \mathbf{q}(x))$$

est l'isomorphisme de trivialisations on a, $\mathbf{p}(x) = \pi_\varsigma \circ \mathbf{q}(x)$ où π_ς est la projection canonique $\pi_\varsigma : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_\varsigma$. On note L_ς le morphisme de fibré induit par π_ς ,

$$L_\varsigma : \zeta \rightarrow \varsigma, \text{ si } \mathcal{E}_\varsigma \subset \mathcal{E}_\tau$$

alors la projection $\pi_{\zeta/\tau} : \mathcal{E}/\mathcal{E}_{\tau^*} \rightarrow \mathcal{E}/\mathcal{E}_\zeta$ vérifiant $\pi_\zeta = \pi_{\zeta/\tau} \circ \pi_\tau$ induit un morphisme de fibré noté $L_{\zeta/\tau} : \zeta/\tau \rightarrow \zeta/\zeta$ pour lequel

$$L_\zeta = L_{\zeta/\tau} \circ L_\tau.$$

Les morphismes L_ζ et $L_{\zeta/\tau}$ induisent des morphismes d'espaces vectoriels

$$\mathcal{L}_\zeta : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta/\zeta) \text{ et } \mathcal{L}_{\zeta/\tau} : \Gamma(\zeta/\tau) \rightarrow \Gamma(\zeta/\zeta)$$

vérifiant $\mathcal{L}_\zeta = \mathcal{L}_{\zeta/\tau} \circ \mathcal{L}_\tau$, les applications

$$\mathcal{L}_{\zeta/\mathcal{D}} : \Gamma((\zeta/\zeta)^*) \rightarrow \Gamma(\zeta^*) \text{ et } \mathcal{L}_{\zeta/\mathcal{D}\tau/\mathcal{D}} : \Gamma((\zeta/\zeta)^*) \rightarrow \Gamma((\zeta/\tau)^*) \quad (6.3)$$

vérifient

$$\mathcal{L}_{\zeta^*} = \mathcal{L}_{\tau^*} \circ \mathcal{L}_{\tau^*\zeta^*}.$$

On pose

$$\Gamma(\zeta^*)^o = \{s^* \in \Gamma(\zeta^*) : s^* \otimes s : \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{K}, s^* \otimes s = 0 \text{ si } s \in \Gamma(\zeta)\}$$

alors $\mathcal{L}_{\zeta^*} : \Gamma((\zeta/\zeta)^*) \rightarrow \Gamma(\zeta^*)$ est un isomorphisme sur $\Gamma(\zeta^*)^o$, on note

$$\mathcal{L}_{\zeta^*}^{-1} : \Gamma(\zeta^*)^o \rightarrow \Gamma((\zeta/\zeta)^*),$$

l'application réciproque. Si $\mathcal{F}(\zeta)$ est l'ensemble des sous-fibrés fermés de ζ de codimension finie alors

$$\Gamma(\zeta^*) = \cup_{\zeta \in \mathcal{F}(\zeta)} \Gamma(\zeta^*)^o,$$

une pseudo-mesure μ sur $\Gamma(\zeta)$ est une famille $\{\mu_\zeta\}_{\zeta \in \mathcal{F}(\zeta)}$ telle que μ_ζ sont des mesures σ -additives sur $\Gamma(\zeta)$ qui satisfont à la condition de compatibilité si $\mathcal{E}_\zeta \subset \mathcal{E}_\tau$, μ_τ est la mesure image de μ_ζ par l'application $\mathcal{L}_{\zeta\tau}$

$$\mu_\zeta(B) = \mu_\tau(A), A = \mathcal{L}_{\tau\zeta}^{-1}(B)$$

où $\mathcal{L}_{\tau\zeta}$ est la projection canonique

$$\mathcal{L}_{\tau\zeta} : \Gamma(\zeta/\tau) \rightarrow \Gamma(\zeta/\zeta)$$

vérifiant

$$\mathcal{L}_\tau = \mathcal{L}_{\tau\zeta} \circ \mathcal{L}_\zeta,$$

si les mesures μ_ζ sont finies et de masse $\mu(\zeta)$, on dit que la pseudo-mesure est finie. La transformée de Fourier en fibre d'une pseudo-mesure μ est définie par

$$\mathcal{F}\mu(s^*)(w) = \mathcal{F}\mu_\zeta \circ \mathcal{L}_{\zeta^*}^{-1}(s^*)(w), \forall s^* \in \Gamma(\zeta^*)^o \text{ et } w \in \mathbf{W}.$$

Lemma 4. Si $s^* \in \Gamma(\zeta^*)^o \cap \Gamma(\tau^*)^o$ alors

$$\mathcal{F}\mu(s^*)(w) = \mathcal{F}\mu_\zeta \circ \mathcal{L}_{\zeta^*}^{-1}(s^*)(w) = \mathcal{F}\mu_\tau \circ \mathcal{L}_{\tau^*}^{-1}(s^*)(w), \forall w \in \mathbf{W}$$

donc, $\mathcal{F}\mu$ est bien définie et on a

$$\begin{aligned} \mathcal{F}\mu(s^*)(w) &= \int_{\Gamma(\zeta/\zeta)} \exp(-is^* \otimes s(w)) d\mu_\zeta(s) \\ &= \int_{\mathcal{C}^\infty(\mathbf{W})} \exp(-i\phi(w)) d\mu_{\mathcal{L}_{\zeta^*}}(\phi), \forall w \in \mathbf{W} \text{ et } s^* \in \Gamma(\zeta^*)^o. \end{aligned}$$

Les sections de $\mathcal{Q}(\zeta)$ sont les sections de formes quadratiques, si toutes les formes quadratiques sont positives, la section est une section positive. Les sections de $\mathcal{M}(\zeta)$ sont les sections de pseudo-mesures, si sur chaque fibre la pseudo-mesure est finie, on dit que la section est finie.

Lemma 5. Soit \mathbf{Q} une section positive de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$, il existe une section finie de pseudo-mesures μ de $\mathcal{M}(\zeta)$ telle que

$$\mathcal{F}\mu(w)(s^*(w)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s^*(w))\right), \forall s^* \in \Gamma(\zeta^*) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

où $\mathbf{Q}(w)$ est la forme quadratique induite par \mathbf{Q} sur la fibre $E_w(\zeta^*)$.

Proof. La preuve est dans [10]. □

Lemma 6. Soit μ une pseudo-mesure finie de $\Gamma(\zeta)$, il existe une section finie $\tilde{\mu}$ de $\mathcal{M}(\zeta)$ telle que la transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}\mu(s^*)(w) = \int_{\Gamma(\zeta)} \exp(-is^* \otimes s(w)) d\mu(s)$$

vérifie

$$\mathcal{F}\mu(s^*)(w) = \mathcal{F}\tilde{\mu}(w)(s^*(w)), \forall w \in \mathbf{W} \text{ et } s^* \in \Gamma(\zeta^*).$$

Proof. La preuve est dans [10]. □

Definition 19. Une section positive \mathbf{Q} de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$ est stable s'il existe une pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ pour laquelle la section $\tilde{\mu}$ image de μ vérifie

$$\mathcal{F}\tilde{\mu}(w)(s^*(w)) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s^*(w))\right), \forall s^* \in \Gamma(\zeta^*) \text{ et } \forall w \in \mathbf{W}.$$

Theorem 15. Si \mathbf{Q} est une section positive stable de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$ alors il existe une pseudo-mesure finie μ de $\Gamma(\zeta)$ telle que

$$\mathcal{F}\mu(s^*)(w) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(w)(s^*(w))\right), \forall s^* \in \Gamma(\zeta^*).$$

Un potentiel \mathcal{V} sur un fibré ζ est une C^∞ -application de l'espace total $E(\zeta)$ à valeurs dans \mathbb{R}

$$\mathcal{V} : E(\zeta) \rightarrow \mathbb{R},$$

l'interaction d'une section s , avec un potentiel \mathcal{V} , est définie par

$$\mathcal{S}_{int}(s) = \int_{\Omega} \mathcal{V}(s(w)) d\rho(w) \quad (6.4)$$

où ρ est une mesure de Lebesgue sur l'univers \mathbf{W} . L'intégrale de Feynman sur les sections d'un fibré de potentiel \mathcal{V} , est donnée par

$$\int_{\Gamma(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(s)\right) d\mu(s),$$

μ est une pseudo-mesure dont la transformée de Fourier en fibre est

$$\mathcal{F}\mu(s^*) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(s^*)\right)$$

où \mathbf{Q} est une section positive stable de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$. On dit que la pseudo-mesure, ainsi définie, est une pseudo-mesure gaussienne en fibre de covariance \mathbf{Q} . Pour une sous-variété V de \mathbf{W} , de dimension 0, on pose

$$\Gamma_V(\zeta) = \{\tau \in \Gamma(\zeta) : \tau(\nu) = o_\nu \in E_\nu(\zeta), \forall \nu \in V\}$$

et

$$W = \{w_\nu \in E_\nu(\zeta), \forall \nu \in V\}.$$

Definition 20. On appelle propagateur de Feynman pour la section positive stable \mathbf{Q} sur $\Gamma_V(\zeta)$ de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$, la quantité

$$\mathcal{K}(V, W) = \phi(s) \int_{\Gamma_V(\zeta)} \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_{int}(s+t)\right) d\mu(t),$$

où μ est la pseudo-mesure sur $\Gamma_V(\zeta)$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}\mu(s^*) = \exp\left(-\frac{i}{2}\mathbf{Q}(s^*)\right) \quad \forall s^* \in \Gamma(\zeta^*),$$

s est une section fixée vérifiant

$$s(\nu) = w_\nu, \nu \in V \quad (6.5)$$

et l'application ϕ est une C^∞ -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\phi : \Gamma(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}, \phi(s) = |\phi(s)| \exp\left(\frac{i}{\hbar}\mathcal{S}_0(s)\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et l'interaction \mathcal{S}_{int} , relatif à un potentiel \mathcal{V} , est définie par 6.4.

Remark 11. *Pour les sections de chemins, à un degré de liberté, $|\phi(s)|$ est constant et vaut \sqrt{m} , m est la masse de la particule.*

Le propagateur de Feynman des sections quantifie les sections de ζ . Ce propagateur mesure, en un certain sens, la "pseudo-probabilité" de trouver des sections de ζ pour lesquelles le système d'équations 6.5 est vérifié lorsque l'on munit le fibré ζ , d'un potentiel \mathcal{V} , d'une section positive stable \mathbf{Q} de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$. Si le fibré considéré ζ est le fibré tangent

$$\zeta = (T\mathbf{W}, \pi, \mathbf{W}, \mathbb{R}^4),$$

et on note ζ^* le fibré dual

$$\zeta^* = (T^*\mathbf{W}, \pi^*, \mathbf{W}, \mathbb{R}^4),$$

on se fixe une métrique riemannienne g sur \mathbf{W} , g est une section de $\mathcal{Q}(\zeta)$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de ζ dans ζ^* , défini par

$$\mathbf{D} : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta^*),$$

$$\mathbf{D}(X)(w) = X^*(w) : E_w(\zeta) \rightarrow \mathbb{R},$$

$$X^*(w)(u) = g(w)(X(w), u).$$

Soit \mathbf{Q} la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\zeta^*)$ définie par

$$\mathbf{Q}(w)(X^*(w)) = g(w)(X(w), X(w)), \quad X(w) = \mathbf{D}^{-1}(X^*(w)),$$

sur chaque fibre $T_w^*\mathbf{W}$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(w)$ induit, en dimension finie, une mesure gaussienne $\tilde{\mu}(w)$. Si \mathbf{Q} est positive et stable la section $\tilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(\mathbf{W})$. Fixons une sous-variété V d'événements de l'univers \mathbf{W} , $\dim V = 0$, et une famille $\mathcal{W} = \{X_v : v \in V\}$ telle que

$$X_v \in T_v\mathbf{W}, \quad \forall v \in V$$

il existe un champ \mathbf{X} tel que

$$\mathbf{X}(v) = X_v, \quad \forall v \in V, \quad (6.6)$$

il suffit de prendre pour chaque $v \in V$, des cartes W_v de v , deux à deux disjointes et des C^∞ -applications θ_v telles que

$$\text{supp } \theta_v \subset W_v \text{ et } \theta^\nu(v) = 1, \quad \forall v \in V$$

alors

$$\mathbf{X} = \theta^\nu X_v \quad (6.7)$$

est un champ qui vérifie les équations 6.6. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(V, \mathcal{W}) = \varphi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_V(\mathbf{W})} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X)\right) d\mu(X),$$

où μ est la pseudo-mesure sur $\Gamma_V(\mathbf{W})$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}\mu(X^*) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(X^*)\right) \quad \forall X^* \in \Gamma(\zeta^*),$$

\mathbf{X} est un champ vérifiant 6.7 et l'application φ est une C^∞ -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\varphi : \Gamma(\zeta) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(\mathbf{X}) = |\varphi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0(\mathbf{X})\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et \mathcal{S}_{int} est l'interaction relatif à un potentiel \mathcal{V} . Quand $|\varphi(\mathbf{X})| = 1$ et $\int_{\Gamma_V(\mathbf{W})} d\mu = 1$ alors $|\mathcal{K}(V, W)|$ est indépendant du choix de $\varphi(\mathbf{X})$, c'est la probabilité de trouver un champ $X \in \Gamma(\mathbf{W})$ vérifiant les équations 6.6.

Remark 12. Si la famille d'événements V est discrète avec des points d'accumulation, une condition nécessaire pour l'existence d'un champ X pour lequel les équations 6.7 soient vérifiées est donnée par

$$\lim_{v \rightarrow v_0, v \in V} X_v = X_{v_0}, \text{ si } v_0 \in V.$$

Supposons qu'en chaque sommet w du graphe quantique \mathcal{G} , on se fixe un élément X_w , on note $\mathcal{W} = \{X_w : w \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}\}$. On peut définir le propagateur de Feynman

$$\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W}) = \varphi(\mathbf{X}) \int_{\Gamma_V(\mathbf{W})} \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_{int}(\mathbf{X} + X)\right) d\mu(X),$$

où μ est la pseudo-mesure sur $\Gamma_{\mathcal{G}}(\mathbf{W})$ de transformée de Fourier en fibre

$$\mathcal{F}\mu(d) = \exp\left(-\frac{i}{2} \mathbf{Q}(d)\right) \quad \forall d \in \Gamma(T^*\mathbf{W}),$$

d est une section de 1-forme et \mathbf{X} est un champ vérifiant

$$\mathbf{X}(w) = X_w \in T_w \mathbf{W}, \quad (6.8)$$

pour tous les sommets $w \in \mathcal{N}_{\mathcal{G}}$ du graphe quantique et l'application φ est une C^∞ -application au sens de Banach sur les sections à valeurs dans \mathbb{C}

$$\varphi : \Gamma(T\mathbf{W}) \rightarrow \mathbb{C}, \quad \varphi(\mathbf{X}) = |\varphi(\mathbf{X})| \exp\left(\frac{i}{\hbar} \mathcal{S}_0(\mathbf{X})\right)$$

\mathcal{S}_0 est l'action et \mathcal{S}_{int} est l'interaction relatif au potentiel \mathcal{V} définie précédemment. La probabilité de trouver un champ vérifiant 6.8 est $|\mathcal{K}(\mathcal{G}, \mathcal{W})|$.

7. GRAPHE ET INTÉGRALES DE FEYNMAN GÉNÉRALISÉES

Dans ce qui suit, on voudrait renormaliser les intégrales de Feynman en donnant un sens géométrique à cette renormalisation. On se fixe une métrique riemannienne g sur l'univers \mathbf{W} , elle définit une section de $\mathcal{Q}(\xi_{\mathbf{W}})$ définie positive. Cette métrique induit un isomorphisme de dualité de $\xi_{\mathbf{W}}$ dans $\xi_{\mathbf{W}}^*$, défini par

$$\begin{aligned} \mathbf{D} : \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}) &\rightarrow \Gamma(\xi_{\mathbf{W}}^*), \\ \mathbf{D}(X)(w) &= X_{\mathbf{D}}(w) : E_w(\xi_{\mathbf{W}}) \rightarrow \mathbb{R}, \\ X_{\mathbf{D}}(w)(u) &= g(w)(X(w), u). \end{aligned}$$

Soit \mathbf{Q} la section des formes quadratiques de $\mathcal{Q}(\xi_{\mathbf{W}}^*)$ définie par

$$\mathbf{Q}(w)(X_{\mathbf{D}}(w)) = g(w)(X(w), X(w)), \quad X(w) = \mathbf{D}^{-1}(X_{\mathbf{D}})(w),$$

sur chaque fibre $T_w^* \mathbf{W}$, la forme bilinéaire $\mathbf{Q}(w)$ induit, en dimension finie sur la fibre, une mesure gaussienne $\tilde{\mu}(w)$. Si \mathbf{Q} est stable la section $\tilde{\mu}$ ainsi définie est la mesure image sur chaque fibre, d'une pseudo-mesure μ sur l'espace des champs $\Gamma(\xi_{\mathbf{W}})$. L'univers \mathbf{W} est une variété de dimension $k \geq 4$, un graphe de Feynman à m pattes externes, de moments $X_1, \dots, X_m \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}})$ et ayant $n - m$ boucles, $n > m$, a pour amplitude [13]

$$\mathcal{I}_\phi(k) = \int_{\Gamma(\xi_{\mathbf{W}})^{n-m}} \phi(X_1, \dots, X_n) d\mu(X_{m+1}) \cdots d\mu(X_n)$$

où la fonction scalaire ϕ s'écrit

$$\phi(X) = \frac{Q(X)}{\prod_j (l_j(X)^2 + m_j^2)}, \quad X \in \Gamma(\xi_{\mathbf{W}})^n$$

$l_j \in (\Gamma(\xi_{\mathbf{W}})^n)^*$, $m_j > 0$ sont les masses internes, Q est un polynôme à n variables et μ est la pseudo-mesure définie sur $\Gamma(\xi_{\mathbf{W}})$ induite par la section stable \mathbf{Q} . Les graphes de Feynman sont des parties finies du graphe quantique, les masses internes sont décrites par les irrégularités aux sommets de ce graphe, les boucles sont les circuits du graphe de Feynman et les pattes sont les arcs d'origine un sommet du graphe de Feynman et d'extrémité un sommet du graphe quantique qui n'est pas un sommet du graphe de Feynman. On peut écrire \mathcal{I}_ϕ sous la forme

$$\mathcal{I}_\phi(k) = \int_0^{+\infty} \cdots \int_0^{+\infty} \exp(-t \cdot m^2) \psi(t, \mathbf{P}, k) (\det L(t))^{-\frac{k}{2}} dt,$$

où $L(t)$ est la restriction de la forme bilinéaire $\sum_{j=1}^n t_j l_j(X)^2$ à $\Gamma(\xi_{\mathbf{W}})^{n-m}$ et \mathbf{P} est la matrice des produits scalaires des moments externes $\mathbf{P} = (g(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq m}$, ψ est une fonction polynomiale qui dépend de Q , $t \cdot m^2$ est le produit scalaire dans \mathbb{R}^n de t avec $m^2 = (m_1^2, \dots, m_n^2)$ et $k = \dim \mathbf{W}$. On pose $z = k$, pour $\text{Re}(z) \ll 0$, $\mathcal{I}_\phi(z)$ existe et a une extension méromorphe dans \mathbb{C} , notée $\widetilde{\mathcal{I}}_\phi(z)$. Si on pose $\widetilde{\mathcal{I}}_\phi(z) = \sum_{s \in \mathbb{Z}} \alpha_s (z - k)^s$, la régularisation dimensionnelle [11] est

$$\mathcal{R}\mathcal{I}_\phi = \alpha_0 \text{ et le contre-terme } \sum_{-\infty}^{s=-1} \alpha_s (z - k)^s.$$

8. LES SINGULARITÉS D'UN MULTIVERS

Si \mathbf{W} une variété de dimension n alors pour toute section de Dirac non métrisable γ sur \mathbf{W} , le tenseur de Poisson $\{\gamma^{\mu\nu}\}$ associé à γ dans une carte $W \subset \mathbf{W}$, en dehors des événements singuliers de W

$$\mathbf{S}_W = \{o \in \mathbf{W} \cap W : \det(\gamma^{\mu\nu}(o)) = 0\},$$

défini une métrique sur chaque composante connexe de

$$\mathbf{W}_\gamma = \mathbf{W} \setminus \mathbf{S}_\gamma \text{ où } \mathbf{S}_\gamma = \cup_W \mathbf{S}_W$$

et W parcourt l'ensemble des cartes de \mathbf{W} , \mathbf{S}_γ est l'ensemble des singularités de \mathbf{W} pour la section de Dirac γ . Soient W^1 et W^2 deux cartes de o , on note $\{\partial_\nu^j\}$ le local frame attaché à la carte W^j . Sur $W^1 \cap W^2$ les champs locaux ∂_ν^2 s'écrivent dans le local frame $\{\partial_\nu^1\}$, $\partial_\nu^2 = a_\nu^\mu \partial_\mu^1$. On note d_ν^j la 1-forme duale de ∂_ν^j définie par $d_\nu^j(\partial_\mu^j) = \delta_\mu^\nu$, alors

$$d_2^\nu = b_\tau^\nu d_1^\tau, \quad \mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$$

avec $\mathbf{A} = (a_\nu^\mu)$ et $\mathbf{B} = (b_\tau^\nu)$. Les matrices de Dirac associées aux 1-formes sont notées γ_j^ν et le tenseur de Poisson associé est noté $\gamma_j^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma_j^\nu \gamma_j^\mu)$, on a

$$\gamma_2^\nu = b_\tau^\nu \gamma_1^\tau \text{ et } \gamma_2^\mu = b_\rho^\mu \gamma_1^\rho,$$

$$\gamma_2^\nu \gamma_2^\mu = b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^\tau \gamma_1^\rho$$

et

$$\gamma_2^{\nu\mu} = b_\tau^\nu b_\rho^\mu \gamma_1^{\tau\rho}, \quad \gamma_j^{\tau\rho} = \text{Trace}(\gamma_j^\tau \gamma_j^\rho). \quad (8.1)$$

Si on pose $\tilde{\gamma}_j$ la matrice $(\tilde{\gamma}_j)_\tau^\rho = \gamma_j^{\tau\rho}$, l'équation 8.1 s'écrit $\tilde{\gamma}_2 = \mathbf{B}\tilde{\gamma}_1\mathbf{B}^*$, \mathbf{B}^* est la transposée de \mathbf{B} , les matrices de Poisson $\tilde{\gamma}_1$ et $\tilde{\gamma}_2$ sont congruentes. En particulier, si $w \in W_1 \cap W_2$ alors $w \in \mathbf{S}_{W_1} \cap \mathbf{S}_{W_2}$.

Definition 21. *La signature d'un événement o est la signature de la matrice symétrique $\tilde{\gamma}$ qui est indépendante du choix de la carte choisie en o .*

La signature d'un événement o est la donnée d'un couple (n_-, n_+) , n_- est le nombre de termes égaux à -1 et n_+ est le nombre de termes égaux à $+1$,

$$n - (n_- + n_+)$$

est le nombre de termes nuls, pour un événement non singulier, $n_- + n_+ = n$.

Definition 22. *Une section de Dirac est à structures si chaque composante connexe de l'ensemble \mathbf{W}_r de \mathbf{W} , de signature (n_-, n_+) avec $n_- + n_+ \leq r$ est une sous-variété fermée de dimension r .*

On donne l'exemple d'une section de Dirac γ à structures sur $\mathbf{W} = \mathbb{R}^n$. Par changement local de repère, la matrice $(\gamma^{\nu\mu})$ associé au tenseur de Poisson

$$\gamma^{\nu\mu} = \text{Trace}(\gamma^\nu \gamma^\mu), \quad \gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$$

où d^μ est la section duale de $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$, est congrue à une matrice diagonale $D = \text{diag}(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n)$. On suppose que 0 est une valeur régulière de φ_j et les sous-variétés $\varphi_j^{-1}(0) \not\cap \varphi_i^{-1}(0)$ pour $j \neq i$. Sous ces hypothèses, si chaque composante connexe de $\varphi_j^{-1}(0)$ est fermée, la section de Dirac γ est une section à structures sur \mathbb{R}^n .

Dans ce qui suit, les sections de Dirac considérées sont à structures, on dit encore structurées. En dimension 4, si on fait l'hypothèse $n_- = 0$, cela signifie qu'aux singularités il n'y a pas de champ chronologique. En particulier la notion de temps, défini précédemment, n'existe pas dans les sous-variétés singulières associées à la section de Dirac non métrisable γ . Sous cette hypothèse, si $n_+ = 0$, le temps et l'espace disparaissent, les sous-variétés connexes formées par ces singularités sont des points. Si $n_+ = 1$, les sous-variétés connexes formées par ces singularités sont des lacets difféomorphes à \mathbb{S}^1 . Dans le cas $n_+ = 2$, les composantes connexes sont des surfaces fermées de genre ζ et si $n_+ = 3$, chaque composante connexe est une sous-variété fermée de dimension 3 que l'on peut décrire à l'aide des huit géométries de Thurston [18]. Les sous-variétés, non singulières de type $(1, 3)$, sont les composantes connexes de \mathbf{W}_γ qui sont feuilletées en feuilles espace et en feuilles chronologique si \mathbf{T} est un champ chronologique stable. Dans le cas général, on a l'inclusion naturelle

$$\mathbf{W}_{r_1} \subset \mathbf{W}_{r_2}, \quad r_1 < r_2$$

en particulier, les composantes connexes des événements de signature (n_-, n_+) ne forment pas, en général, une variété comme dans le cas des événements non singuliers dont une composante connexe représente l'univers observable en dimension 4.

Un multivers de Banach-Schauder \mathbf{W} est une variété de Banach modelée sur un espace de Banach muni d'une base de Schauder inconditionnelle et d'une métrique fortement riemannienne g . Si l'espace de Banach \mathcal{B} est hilbertien réel, le produit scalaire induit une métrique riemannienne sur \mathbf{W} , si cette métrique est fortement riemannienne, on prend g pour métrique. La connexion de Levi-Civita définie par la

métrique est notée ∇ [19]. Pour chaque ouvert de trivialisatation W du fibré tangent $\xi_{\mathbf{W}}$, on définit l'endomorphisme de Dirac associé à une section de Dirac γ par

$$\gamma^d : \Gamma(W, T\mathbf{W}) \rightarrow \Gamma(W, T\mathbf{W}), \gamma^d(X) = \gamma(d \otimes X),$$

avec $X \in \Gamma(W, T\mathbf{W})$ et $d \in \Gamma(V, T^*(\mathbf{W}))$. La section γ^d est une section bornée et à trace si et seulement si $\forall w \in W \subset \mathbf{W}$, $\gamma^d(w) : T_w\mathbf{W} \rightarrow T_w\mathbf{W}$, est un endomorphisme borné et à trace pour la structure de Banach induite par la fibre \mathcal{B} .

Definition 23. Une section locale de champs de Schauder $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ sur W est une base locale de champs qui vérifie $\forall w \in W$, $\{X_m(w)\}$ est une base de Schauder inconditionnelle de $T_w\mathbf{W}$ pour la structure de Banach induite par \mathcal{B} .

Lemma 7. Tout ouvert de trivialisatation W de $\xi_{\mathbf{W}}$ a une base locale de champs de Schauder $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$.

En général, une base locale de Schauder inconditionnelle n'est pas dualisable en posant

$$X^m(X_n) = \delta_n^m,$$

la section des formes linéaires X^m sur W n'est pas dans $\Gamma(W, \xi_{\mathbf{W}}^*)$. Si pour tout m , $X^m \in \Gamma(W, \xi_{\mathbf{W}}^*)$, on dit $\{X_m\}$ est une base locale de Schauder inconditionnelle dualisable. Si \mathcal{B} est un espace de Hilbert réel, le théorème de représentation de Riesz-Fischer donne l'existence de base locale de Schauder inconditionnelle dualisable sur tout ouvert de trivialisatation de $\xi_{\mathbf{W}}$. Si la base de Schauder n'est pas dualisable, on dualise les champs en utilisant la métrique fortement riemannienne g , on pose

$$\mathbf{X}(Y) = g(X, Y), \forall Y \in \Gamma(W, T\mathbf{W})$$

en chaque $w \in W$ et $u \in T_w\mathbf{W}$, $\mathbf{X}(w)(u) = g(w)(X(w), u)$. Toute base locale de Schauder $\{X_m\}$ se dualise par ce procédé. Soit $\{X_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ une base de Schauder, $\gamma^m = \gamma^{X^m}$ où X^m est le dualisé de X_m par l'un ou l'autre des procédés. La suite $\{\gamma^m\}$ est suite de sections locales sur W de $\text{Hom}(\xi_{\mathbf{W}})$ qui est bornée et à trace. On définit le tenseur de Poisson par la section de suites doubles $\{\gamma^{mn}\}$ où $\gamma^{mn} = \text{Trace}(\gamma^m \gamma^n)$.

Definition 24. Une sous-variété \mathbf{V} de dimension n est une singularité de type (n_-, n_+) avec $n = n_- + n_+$ si pour chaque événement $o \in \mathbf{V}$, il existe un ouvert W de trivialisatation de $\xi_{\mathbf{W}}$ contenant o et une section locale de champs de Schauder inconditionnelle $\{X_m\}$ qui contient une sous famille finie $\{X_{m_j}, j = 1, \dots, n\}$ telle que pour tout $w \in W \cap \mathbf{V}$,

$$T_w\mathbf{V} = \text{Vect} \{X_{m_i}(w), i = 1, \dots, n\},$$

la matrice $\tilde{\gamma}(w) = (\gamma^{m_i m_j}(w))_{1 \leq i, j \leq n}$ définie par le tenseur de Poisson est inversible pour tout $w \in W \cap \mathbf{V}$ et $\frac{1}{n} \tilde{\gamma}^{-1}$ est congrue à une matrice de signature (n_-, n_+) .

Remark 13. La transformation qui permet de passer de la métrique $\frac{1}{n} \tilde{\gamma}^{-1}$ à la métrique $g|_{\mathbf{V}}$ est la transformation de Wick ou rotation de Wick et g est la métrique fortement riemannienne définie sur le multivers de Banach-Schauder \mathbf{W} .

Si la sous-variété \mathbf{V} de \mathbf{W} , est de dimension 4 et de type (1,3), on dit que \mathbf{V} est un univers de Dirac-Einstein [8]. La géométrie de \mathbf{W} est entièrement définie par la section de Dirac bornée et à trace, le multivers de Banach-Schauder définit

la structure gravitationnelle de l'univers \mathbf{V} et la connexion ∇ de \mathbf{W} induite par la métrique fortement riemannienne donne la connexion sur \mathbf{V} qui permet de définir les équations de Dirac-Einstein. Le groupe d'action $\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$ sur \mathbf{V} du multivers \mathbf{W} est le sous-groupe de $\text{Diff}^{\infty}(\mathbf{W})$ défini par

$$\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W}) = \{h \in \text{Diff}^{\infty}(\mathbf{W}) : h(\mathbf{V}) = \mathbf{V}\},$$

h est une C^{∞} -application dans le sens de Banach.

Definition 25. Une densité d'action ϕ est une C^{∞} -application de \mathbf{V} à valeurs dans \mathbb{R} qui est invariante par $\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$, c'est-à-dire,

$$\phi \circ h = \phi, \forall h \in \text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W}).$$

Si $\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$ est localement compact, on note μ une mesure de Haar sur $\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$ et pour ϕ une C^{∞} -application de \mathbf{V} à valeurs dans \mathbb{R}

$$\phi_{\mu}(v) = \int_{\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})} \phi \circ h(v) d\mu(h),$$

ϕ_{μ} est une densité d'action. L'opérateur défini par

$$\mathbf{H}(\phi) = \phi_{\mu}$$

est la transformation de Haar et pour toute mesure positive λ qui est σ -finie, si $\phi \geq 0$, on a

$$\int_{\mathbf{V}} \phi_{\mu}(v) d\lambda(w) = \int_{\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})} \left(\int_{\mathbf{W}} \phi(v) d\lambda_h(w) \right) d\mu(h) \leq +\infty$$

où λ_h est la mesure image de λ par $h|_{\mathbf{V}}$. Si on suppose que l'univers est une singularité d'un multivers de Banach-Schauder, les densités d'état choisies sont des densités d'action. On décompose la mesure image par le théorème de Radon-Nykodim sous la forme

$$d\lambda_h = \rho_h d\lambda + \nu_h,$$

le groupe $\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$ est dit absolument continue par rapport à la mesure $d\lambda$ si $d\lambda_h$ est absolument continue par rapport à $d\lambda$ pour tout $h \in \text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})$, on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{V}} \phi_{\mu}(v) d\lambda(v) &= \int_{\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})} \left(\int_{\mathbf{V}} \phi(v) \rho_h(v) d\lambda(v) \right) d\mu(h) \\ &= \int_{\mathbf{V}} \phi(v) \left(\int_{\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})} \rho_h(v) d\mu(h) \right) d\lambda(v), \end{aligned}$$

l'application

$$v \rightarrow \int_{\text{Diff}_{\mathbf{V}}^{\infty}(\mathbf{W})} \rho_h(v) d\mu(h)$$

est la densité du μ par rapport à λ .

9. AXIOMATISATION DES OBSERVABLES D'UN FIBRÉ D'ÉTAT

Soit $\zeta = (E, \pi, \mathbf{W}, \mathcal{H})$ un fibré d'état sur l'univers \mathbf{W} , une observable de l'univers en l'événement w est un opérateur $\varphi(w) : E_w \rightarrow E_w$ ayant une base de vecteurs propres pour chaque w et telle que l'application $w \rightarrow \varphi(w)$ est C^{∞} dans le sens suivant, pour toute section $s \in \Gamma(\zeta)$, l'application $w \rightarrow \varphi(w)(s(w))$ est C^{∞} . On remarque que cette définition a un sens si la fibre \mathcal{H} du fibré est de dimension finie, on peut étendre cette notion à un fibré de dimension infinie, hilbertien ou

banachique, dans le cas hilbertien $\varphi(w)$ est un opérateur self-adjoint pour tout $w \in \mathbf{W}$. L'observable φ est donc une section d'un fibré, dont la fibre est formée par un élément de $\text{End}(\zeta)$ diagonalisables. Les fonctions $\lambda : W \subset \mathbf{W} \rightarrow \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} pour lesquelles il existe une section s , non nulle sur W , vérifiant

$$\varphi(w)(s(w)) = \lambda(w)s(w), \forall w \in W$$

est une fonction propre de φ sur W et la section s est une section propre de φ sur W . Si la fibre est hilbertienne, le théorème de Von Neumann permet d'associer à $\varphi(w)$, une mesure spectrale

$$P_{\varphi(w)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{P}(E_w),$$

qui à chaque borélien B de \mathbb{R} associe un projecteur $P_{\varphi(w)}(B)$ de l'espace d'Hilbert complexe E_w . Pour chaque couple $(s, t) \in \Gamma(E)^2$ et chaque $w \in \mathbf{W}$, on définit la mesure complexe $\nu_{(s(w), t(w))}$ sur les boréliens de \mathbb{R}

$$\nu_{(s(w), t(w))}(B) = \langle P_{\varphi(w)}(B)(s(w)) | t(w) \rangle_w$$

pour chaque $w \in \mathbf{W}$ et chaque $s \in \Gamma(E)$, on construit une mesure sur les boréliens de \mathbb{R} , définie par

$$\nu_{s(w)}(B) = \langle P_{\varphi(w)}(B)(s(w)) | s(w) \rangle_w.$$

En particulier, pour $s \in \Gamma(E)$ et si la fibre de E est \mathcal{H} , on définit une section ν_s sur le fibré $\mathcal{B}(\mathbf{W})$ dont la fibre est formée des mesures boréliennes sur \mathbb{R} . Si la section s est normalisée pour tout w , c'est-à-dire, $\|s(w)\|_w = 1$, $\nu_{s(w)}$ est une probabilité sur les boréliens de \mathbb{R} , notée $P_{s, \varphi}$ avec $P_{s, \varphi}(w) = \nu_{s(w)}$. En utilisant la décomposition de Paul Levy, ν_s s'écrit comme une somme de mesures

$$\nu_s = \nu_s^{ac} + \nu_s^p + \nu_s^{sc},$$

où ν_s^{ac} est une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, ν_s^p est une somme de mesures de Dirac et ν_s^{sc} est une mesure singulièrement continue, la fonction de répartition est une fonction continue et la mesure n'est chargée que sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. Si $\nu_s = \nu_s^p$, on dit que s a un spectre discret et si $\nu_s = \nu_s^{ac}$, on dit que s a un spectre continu. On se donne une connexion de Koszul ∇ sur le fibré d'état ζ , c'est-à-dire, la donnée d'une application \mathbb{R} ou \mathbb{C} -linéaire

$$\nabla : \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\xi_{\mathbf{V}}^* \otimes \zeta)$$

qui vérifie la relation de Leibnitz. La représentation de la connexion ∇ sous la forme de dérivée covariante, s'écrit

$$\nabla : \Gamma(\xi_{\mathbf{V}}) \times \Gamma(\zeta) \rightarrow \Gamma(\zeta), (X, s) \rightarrow \nabla_X s,$$

ces deux notions sont équivalentes, $\nabla_X s$ est la dérivée covariante de s le long du champ X . On se fixe ensuite une section de Dirac γ de E , c'est-à-dire, une section de

$$\text{Hom}(\xi_{\mathbf{V}} \otimes \zeta, \zeta) \approx \text{Hom}(\xi_{\mathbf{V}}^*, \text{End}(\zeta)),$$

ainsi pour tout $d \in \xi_{\mathbf{V}}^*$, on rappelle que l'endomorphisme de Dirac est

$$\gamma^d : \Gamma(E) \rightarrow \Gamma(E), \gamma^d(s)(w) = \gamma(w)(d(w) \otimes s(w)).$$

Si le fibré est de dimension finie, sur une carte W où le fibré tangent et le fibré d'état sont trivialisables, on pose $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame associé à la carte V et $\{s_\nu, \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1\}$ une base de sections du fibré d'état restreint à W .

On pose $\{d^\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ le local frame dual et $\gamma^\mu = \gamma^{d^\mu}$ les endomorphismes de Dirac associés. Ces endomorphismes sont représentés par des matrices carrées d'ordre m dans la base $\{\phi_s, \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1\}$ dont les coefficients sont dans $C^\infty(W)$. Le tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu} = \text{Trace}(\gamma^\mu \gamma^\nu)$, est indépendant du choix de la base $\{\phi_\nu, \nu = 0, 1, 2, \dots, m-1\}$ en dimension finie, cette notion s'étend en dimension infinie si la section de Dirac est bornée et à trace. Si l'univers \mathbf{W} est muni d'une métrique de Lorentz g , dont la matrice dans le local frame $\{\partial_\mu, \mu = 0, 1, 2, 3\}$ est $(g_{\mu\nu})$ et $(g^{\mu\nu})$ est sa matrice inverse, on fait l'hypothèse $(g^{\mu\nu}) = 4(\gamma^{\mu\nu})$. Dans l'hypothèse où on n'impose pas l'existence d'une métrique de Lorentz g sur l'univers \mathbf{W} , on admet que localement $(\gamma^{\mu\nu})$ est inversible et $(g_{\mu\nu}) = \frac{1}{4}(\gamma^{\mu\nu})^{-1}$ est la matrice d'une métrique de Lorentz g_γ sur l'ouvert W , pour définir l'équation d'évolution le long d'un champ chronologique \mathbf{T} . On peut définir la dérivée covariante le long du champ chronologique, noté $\nabla_{\mathbf{T}}$. L'équation d'évolution d'une section locale s définie sur W , le long d'un champ chronologique \mathbf{T} , non nécessairement stable, d'un système soumis à aucune observation est $Hs = i\lambda\nabla_{\mathbf{T}}s$, si le fibré est complexe ou $Hs = \lambda\nabla_{\mathbf{T}}s$, si le fibré est réel où H est l'opérateur de Dirac de rang 1.

Axiom 1. *L'état d'un système physique est défini, par une section s d'un fibré hermitien E , dit fibré d'état.*

Axiom 2. *A tout observable \mathcal{O} est associée une section φ de $\mathcal{O}(E)$, formée des éléments de $\text{End}(E)$, self-adjoints. On dit que φ est l'observable quantique de la grandeur physique \mathcal{O} .*

Axiom 3. *Quelque soit la section s du système où l'on effectue la mesure de la grandeur \mathcal{O} , les seuls résultats possibles sont les fonctions propres de φ .*

Axiom 4. *Si s représente l'état normalisé du système, la probabilité de trouver la fonction λ lors d'une mesure de \mathcal{O} dans Δ est*

$$P_{s,\varphi}(\lambda) = P_{s,\varphi}(\Delta)$$

où

$$P_{s,\varphi}(\Delta)(w) = P_{s(w),\varphi(w)}(\Delta(w))$$

avec $\Delta(w) =]\lambda_1(w), \lambda_2(w)]$ si le spectre de s est continu. Si le spectre est discret, cette probabilité est

$$P_{s,\varphi}(\lambda)(w) = P_{s(w),\varphi(w)}(\lambda(w)).$$

Axiom 5. *L'état du système immédiatement après une mesure ayant donnée la fonction λ est*

$$\tilde{s} = \frac{P_{E_\lambda}(s)}{\|P_{E_\lambda}(s)\|},$$

où $\tilde{s}(w) = P_{E_{\lambda(w)}}(s(w))$ et $P_{E_{\lambda(w)}}$ est le projecteur sur le sous-espace propre $E_{\lambda(w)}$ associé à la valeur propre $\lambda(w)$ de $\varphi(w)$.

Axiom 6. *Soit s , l'état du système en l'événement w_0 dans une carte W de \mathbf{W} , tant que le système n'est soumis à aucune observation, son évolution le long d'un champ chronologique \mathbf{T} associé au tenseur de Poisson $\gamma^{\mu\nu}$ est*

$$Hs = i\lambda\nabla_{\mathbf{T}}s$$

où $H = \gamma \otimes \nabla$, γ est la section de Dirac et ∇ est la connexion associés au fibré d'état.

10. CONCLUSION

L'univers de Dirac-Einstein peut être décrit comme une variété de dimension 4, munie d'une métrique Lorentzienne. A partir de cette métrique et de la connexion de Levi-Civita, on définit les équations relativistes de Dirac et d'Einstein que l'on cherche à unifier par section de Dirac. Une telle unification est réalisable si la métrique Lorentzienne est universelle. Cette métrique permet de construire la notion de champ chronologique stable qui feuillette localement l'univers en feuilles espace et en feuilles temps. On peut définir ainsi, la notion de temps relatif à un champ chronologique et la notion de densité d'état. La densité d'état décompose l'univers par chirurgie de Milnor-Smale et définit la notion de passé, présent et futur relativement à un état de l'univers. Les états de l'univers sont décrits à partir de sections de certains fibrés vectoriels que l'on quantifie en définissant le fibré de Bose-Fermi-Fock.

L'univers est observable en ses irrégularités, on définit une structure fractale sur cet univers en construisant un graphe quantique, où les sommets sont les événements observables et dont l'irrégularité des lignes d'univers permet de définir la notion de masse. Les graphes de Feynman sont décrits à partir de ce graphe quantique, on peut généraliser ainsi la notion d'intégrales de Feynman.

On peut décrire cet univers comme une singularité d'un multivers qui est une variété de grande dimension munie d'une section de Dirac non métrisable ou bien comme une singularité d'une variété de Banach-Schauder munie d'une métrique fortement riemannienne et d'une section de Dirac bornée et à trace. Cette construction permet de choisir des densités d'état invariantes, sur l'univers de Dirac-Einstein, par l'action du multivers.

L'intérêt des outils mathématiques, développés dans ce papier, est d'apporter une représentation géométrique de la réalité physique. L'existence d'une variété, de dimension 4 munie d'une métrique Lorentzienne universelle, reste un problème ouvert. D'autres thèmes peuvent être approfondis, notamment, comment décrire l'interaction entre l'univers de Dirac-Einstein et son multivers ou l'interaction entre deux univers de Dirac-Einstein qui sont des singularités d'un même multivers.

REFERENCES

- [1] Arai A."A special class of infinite dimensional Dirac operators on the abstract Boson-Fermion Fock space." Hindawi Publishing Corporation, Journal of Mathematics. Vol 2014, Article ID 713690, (2014)
- [2] Arai A."Supersymmetric extension of quantum scalar field theory." Quantum and Non-Commutative Analysis, H. Araki. Ed. pp73-90, Kluwer Academic Publishers. Dordrecht. The Netherlands, (1993)
- [3] Ben Adda F., Cresson J., "Divergence d'échelle et différentiabilité" C. R. Acad. Sci. Paris, t. 330, Série I, p. 261-264, 2000
- [4] Morette DeWitt C., "Feynman's Path Integral Definition Without Limiting Procedure" Commun. math. Phys. 28, 47-67(1972) Springer-Verlag 1972
- [5] Feynman R. P., Hibbs A. R., "Quantum Mechanics and Path Integrals", (New York : McGraw-Hill 1965) 133
- [6] Godbillon C., "Géométrie Différentielle et Mécanique Analytique" Hermann Paris (1985)
- [7] Haefliger A., "Feuilletages sur les variétés ouvertes", Topology 9 (1970), 183-194.
- [8] Jonot J.L."Unification par section de Dirac" 2017. <hal-01478188>
- [9] Jonot J.L., "Quantification des fibrés des états", <hal-01114487v4>
- [10] Jonot J.L., "Intégrale de Feynman et C^α -structure en physique", <hal-01232637>
- [11] Jonot J.L., "Sur quelques méthodes de régularisation des intégrales divergentes, application à la renormalisation". <hal-01281271>

- [12] Maurey B. "Analyse Fonctionnelle et Théorie Spectrale" Cours Paris 7 (2001-2002)
- [13] Meyer R., "Dimensional Regularization" uni-math.gwdg.Hesselberg (2002)
- [14] Milnor J., "Morse Theory" Annals of Mathematics Studies Princeton University Press.
- [15] Spring D., "Théorie de Gromov", Cours de DEA d'Orsay (2004)
- [16] Pederson S. "Anticommuting self-adjoint operators", J.Funct. Anal. 89 (1990)
- [17] Reed M. and Simon B. "Methods of Modern Mathematical Physics Vol.I: Functional Analysis", Academy Press, New York, (1975)
- [18] Thurston W., "The geometry and topology of three-manifolds", Princeton lecture notes (1978-1981).
- [19] Tumpach A.B., "Variétés kaehlériennes et hyperkaelériennes de dimension infinie" Thèse HAL archives-ouvertes. 2006
- [20] Vasilescu F.H "Anticommuting self-adjoint operators", Rev. Roum. Math. Pures Appl. 28 (1983)77-91

E-mail address: jean-louis.jonot@ac-versailles ou j.jonot@gmail.com