HAL open science

Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique

Laurent Fargues, Jean-Marc Fontaine

To cite this version:

Laurent Fargues, Jean-Marc Fontaine. Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique. Asterisque, 2019. hal-01510045

HAL Id: hal-01510045

https://hal.science/hal-01510045

Submitted on 20 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine

COURBES ET FIBRÉS VECTORIELS EN THÉORIE DE HODGE p-ADIQUE

Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine

Le premier auteur a bénéficié du soutien des projets ANR-10-BLAN-0114 "ArShiFo" et ANR-14-CE25-0002 "PerCoLaTor".
16 avril 2017

COURBES ET FIBRÉS VECTORIELS EN THÉORIE DE HODGE p-ADIQUE

Laurent Fargues et Jean-Marc Fontaine

Remerciements : les auteurs tiennent à remercier Pierre Colmez pour les nombreuses discussions sur ce travail et ce depuis sa genèse. Ils le remercient également d'avoir accepté d'écrire une préface.

TABLE DES MATIÈRES

Préface 1

1. Fonctions holomorphes de la variable p et anneaux de périodes 51
Introduction 51
1.1. Hypothèses et notations 52
1.2. $\mathcal{O}_E$-vecteurs de Witt 52
1.3. Les anneaux $\mathscr{E}$, B^b et $B^{b,+}$ 58
1.4. Normes de Gauss 61
1.5. Polygones de Newton des éléments de B^b 66
1.6. Les algèbres de Fréchet B_I 68
1.7. Les cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ et F maximalement complet 78
1.8. Le corps valué hensélien $\mathscr{E}^\dagger$ et l'anneau de Robba 85
1.9. Extension des fonctions holomorphes au bord 87
1.10. L'anneau B^+ 89

2. Zéros des fonctions holomorphes : le cas F algébriquement clos 97
Introduction 97
2.1. L'anneau $A^\flat$ et le morphisme θ 98
2.2. Étude de certains idéaux et valuations des vecteurs de Witt 104
2.3. L'espace Y des idéaux de degré 1 des vecteurs de Witt 114
2.4. Factorisation de Weierstrass des éléments primitifs de degré > 1 122
2.5. Les B_I sont principaux pour une couronne compacte 128
2.6. Factorisation de Weierstrass au voisinage de 0 128
2.7. Diviseur d'une fonction holomorphe 130

3. Zéros des fonctions holomorphes : le cas F parfait quelconque 133
Introduction 133
3.1. Étude de l'ensemble $|Y_F|$ par descente galoisienne 133
3.2. Le théorème de presque pureté 140
3.3. En résumé 141

3.4. Zéros des fonctions holomorphes 142
3.5. Diviseurs et idéaux 145
3.6. Calcul des invariants sous Galois de $B_{\widehat{\overline{F}}}$ 148

4. $\mathbb{Q}_p$-espaces vectoriels formels et périodes des groupes p-divisibles ... 151
Introduction 151
4.1. Les E-espaces de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$ 152
4.2. L'espace de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$ vit dans les bivecteurs lorsque $d \leq h$ 155
4.3. $\mathcal{O}$-modules π-divisibles 157
4.4. Description de $B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de $\mathcal{O}$-modules π-divisibles lorsque $d \leq h$ 166
4.5. Lien avec l'application des périodes d'un groupe p-divisible 171
4.6. Espaces vectoriels formels et spectraux 181

5. Courbes 201
Introduction 201
5.1. Généralités 202
5.2. Construction de courbes 203
5.3. Fibrés vectoriels sur les courbes 208
5.4. Sur quelques courbes particulières 210
5.5. Filtrations de Harder-Narasimhan 212
5.6. Classification de fibrés 220

6. La courbe fondamentale lorsque F est algébriquement clos 243
Introduction 243
6.1. L'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$: définition et généralités 243
6.2. L'algèbre P est graduée factorielle 245
6.3. Produits de Weierstraß associés aux éléments de degré 1 et logarithme ... 251
6.4. La suite exacte fondamentale 253
6.5. La courbe lorsque F est algébriquement clos 254
6.6. Description en termes des fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ 256
6.7. La courbe comme quotient d'un ind-schéma 258

7. La courbe fondamentale pour F parfait quelconque 261
Introduction 261
7.1. Calculs de cohomologie galoisienne 261
7.2. L'anneau B_e est de Dedekind 264
7.3. La courbe 266
7.4. Description en termes de fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ 268
7.5. Changement de corps E 269
7.6. Changement de corps F 269
7.7. La courbe associée à $\overline{F}$ 270
7.8. Choix d'un fibré ample et φ-modules de rang un sur B 271
7.9. Retrouver la courbe analytique à partir de la courbe schématique : le théorème de Runge 274

8. Classification des fibrés vectoriels : le cas F algébriquement clos 277

Introduction 277
8.1. Deux résultats sur les périodes des groupes p-divisibles 278
8.2. Fibrés vectoriels 282
8.3. Preuve du théorème de classification via les périodes des groupes p-divisibles 289
8.4. Preuve via les espaces de Banach-Colmez 295
8.5. Classification des fibrés sur $\overline{E}$ 298
8.6. Simple connexité géométrique de la courbe 298

9. Classification des fibrés : le cas F parfait 301
Introduction 301
9.1. Fibrés équivariants 301
9.2. Classification des fibrés équivariants semi-stables lorsque F est algébriquement clos 306
9.3. Descente galoisienne 307
9.4. Classification des fibrés 311
9.5. Calcul du groupe fondamental de la courbe 312

10. Faiblement admissible implique admissible et le théorème de la monodromie p-adique 313
Introduction 313
10.1. Fibrés G_K-équivariants 314
10.2. Fibrés équivariants cristallins 317
10.3. Fibrés log-cristallins 325
10.4. Fibrés équivariants de de Rham 334
10.5. Faiblement admissible implique admissible 337
10.6. De Rham implique potentiellement log-cristallin 340

11. φ-modules et fibrés 355
Introduction 355
11.1. φ-modules sur B^+ 356
11.2. φ-modules sur B et l'anneau de Robba d'après Kedlaya 369
11.3. GAGA d'après Kedlaya-Liu 379
11.4. En résumé 382
11.5. Le théorème de Berger 383

Bibliographie 385

PRÉFACE
LA COURBE DE FARGUES ET FONTAINE

par

Pierre Colmez

La courbe de Fargues-Fontaine a changé [1] la manière dont on pense à la théorie de Hodge p-adique en introduisant des idées géométriques là où il n'y avait que de l'algèbre semi-linéaire : beaucoup de catégories apparaissant dans la théorie [2] comme les φ-modules ou les (φ, Γ)-modules sur l'anneau de Robba et ses variantes, les B-paires, les Espaces de Banach de Dimension finie [3] ou les presque $\mathbf{C}_p$-représentations sont étroitement liées à la catégorie des fibrés sur cette courbe ce qui explique, en grande partie, leurs bonnes propriétés. J'ai eu le privilège d'assister à la naissance de cette courbe et je suis heureux de pouvoir raconter cette histoire. Pour confirmer mes souvenirs de ces évènements remontant à plus de 7 ans, j'ai relu les courriels que nous avions échangés à l'époque ainsi que les nouvelles que je transmettais à Wiesława Nizioł ; j'ai inclus certains des passages les plus significatifs de ces messages.

1. L'anneau $\mathbf{B}_e$

1.1. $\mathbf{B}_e$ est principal !— Le premier acte se passe en juillet 2009, dans le train qui nous ramenait de Roscoff à Morlaix. Nous étions tous les trois, Fargues, Fontaine et moi, et Fontaine nous déclare : « j'ai regardé l'article de Berger sur les B-paires, et il

1. Que cette courbe introduise un point de vue intéressant est devenu indubitable avec la preuve [**FF**, § 10.5] de la conjecture "faiblement admissible implique admissible" esquissée au § 5.2 de cette préface, mais ce qui a suivi, à savoir la géométrisation de la correspondance de Langlands locale [**19, 20, 21, 22, 54**], est assez inattendu et totalement fascinant.

2. Tous ces objets sont définis au chap. 2 : les B-paires (n° 2.5.8), les φ-modules (n° 2.5.3) ou les (φ, Γ)-modules (n° 2.5.4) sur l'anneau de Robba sont en équivalence de catégories avec la catégorie des fibrés (équivariants) sur la courbe de Fargues-Fontaine (th. 4.7, rem. 4.9 et 5.10). Ce n'est pas le cas des Espaces de Banach de Dimension finie ou des presque C-représentations, mais on pourra consulter [**44**] pour le lien entre ces catégories et celle des fibrés sur la courbe de Fargues-Fontaine.

3. Connus aussi sous le nom d'espaces de Banach-Colmez.

prétend que l'anneau $\mathbf{B}_e$ est de Bézout [4] ; ça ne peut pas être vrai ; il faut que je lui écrive ». J'étais un peu embêté pour Berger mais, heureusement, le lendemain [5] :

> Fontaine → Colmez, Fargues, Wintenberger samedi 18/07/2009
>
> [...] Par ailleurs, j'ai dit à Pierre dans le train hier que je ne croyais pas que l'anneau $\mathbf{B}_e$ était de Bézout, comme l'affirme Berger. En fait, l'argument que je donnais est canulé, je me suis fait avoir par l'analogie trompeuse avec l'anneau des polynômes en une variable à coefficients dans C dont le terme constant est dans $\mathbf{Q}_p$. La preuve de Berger repose sur un résultat de Kedlaya et j'y crois. En fait, me semble-t-il, non seulement $\mathbf{B}_e$ est de Bézout, mais il est principal ! C'est un exercice [6] une fois que l'on sait qu'il est de Bézout.

1.2. Anneaux de Fontaine. — Avant de continuer, rappelons la définition de l'anneau $\mathbf{B}_e$ et des anneaux $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ de Fontaine.

Soient k un corps parfait de caractéristique p, $K_0 = W(k)[\frac{1}{p}]$ le corps de caractéristique 0, complet, non ramifié, de corps résiduel k, K une extension finie totalement ramifiée de K, $\overline{K}$ une clôture algébrique de K, $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}/K)$ et C le complété de $\overline{K}$, ce qui fait de C un corps algébriquement clos, complet pour v_p, dont le corps résiduel k_C est une clôture algébrique de k. (Si $k = \mathbf{F}_p$, on a $K_0 = \mathbf{Q}_p$ et $C = \mathbf{C}_p$; on ne perd pas grand-chose à supposer que l'on est dans cette situation.)

Soit [7]

$$C^\flat = \{x = (x^{(n)})_{n\in\mathbf{N}},\ (x^{(n+1)})^p = x^{(n)},\ \forall n \in \mathbf{N}\}.$$

On munit $C^\flat$ des lois $+$ et $\cdot$ définies par :

$$(x^{(n)}) + (y^{(n)}) = (s^{(n)}),\ \text{avec } s^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} (x^{(n+k)} + y^{(n+k)})^{p^k},$$

$$(x^{(n)}) \cdot (y^{(n)}) = (x^{(n)} y^{(n)})$$

Si $x = (x^{(n)}) \in C^\flat$, soit $x^\sharp = x^{(0)}$, et si $x \in C$, on note $x^\flat$ n'importe quel élément de $C^\flat$ tel que $(x^\flat)^\sharp = x$ (et donc $x^\flat$ n'est bien déterminé qu'à $\varepsilon^{\mathbf{Z}_p}$ près, où $\varepsilon = (1, \zeta_p, \dots)$ et ζ_p est une racine primitive p-ième de l'unité ; cela est source de bien des complications). Alors $C^\flat$ est un corps algébriquement clos de caractéristique p, complet pour la valuation $v_{C^\flat}(x) = v_p(x^\sharp)$, de corps résiduel $k_{C^\flat} = k_C$.

---

4. Il s'agit de [**5**, prop. 1,1,9] ; l'anneau $\mathbf{B}_e$ est l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$.

5. Extrait d'un message au sujet de la soutenance proche de la thèse de son étudiant Jérome Plût, thèse soutenue le 29/09/2009, devant le jury composé de P. Elbaz-Vincent, L. Fargues, J-M. Fontaine, E, Ullmo, J-P. Wintenberger et moi-même.

6. Effectivement ! Cf. note 8.

7. La construction $C \mapsto C^\flat$ est une vieille construction de Fontaine [**26**], et s'applique à n'importe quelle algèbre munie d'une topologie plus faible que celle définie par la valuation p-adique. Les notations sont celles de Scholze [**53**] qui a globalisé cette construction en introduisant les espaces perfectoïdes ; dans la terminologie de Scholze, cette opération s'appelle le *basculement* (tilting), et $C^\flat$ est le *basculé* de C en caractéristique p.

Soit $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} = W(\mathscr{O}_{C^\flat})$, l'anneau des vecteurs de Witt à coefficients dans $C^\flat$. Si $x \in \mathscr{O}_{C^\flat}$, notons $[x]$ son représentant de Teichmüller. Tout élément de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]$, où les x_k sont des éléments arbitraires de $\mathscr{O}_{C^\flat}$. Par fonctorialité des vecteurs de Witt, $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ est muni d'un frobenius φ donné par $\varphi(\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]) = \sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k^p]$, et d'une action de G_K commutant à φ.

On définit $\theta : \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$ par

$$\theta(\sum_{k\in\mathbf{N}} p^k[x_k]) = \sum_{k\in\mathbf{N}} p^k x_k^\sharp.$$

Alors $\theta : \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$ est un morphisme surjectif d'anneaux dont le noyau est engendré par $(p - [p^\flat])$ ([**24**, prop. 2.4]).

Soit $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ = \varprojlim(\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]/(p-[p^\flat])^k)$. C'est un anneau de valuation discrète de corps résiduel C qui contient $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$, complété de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{(p-[p^\flat])^k}{k!},\ k \in \mathbf{N}]$ pour la topologie p-adique. L'action de G_K s'étend à tous ces anneaux et, si on pose

$$t = \log[\varepsilon] = -\sum_{k\in\mathbf{N}} \tfrac{(1-[\varepsilon])^k}{k+1},$$

alors t est une uniformisante de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ appartenant à $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$, et $\sigma(t) = \chi(\sigma)t$, où $\chi : G_K \to \mathbf{Z}_p^*$ est *le caractère cyclotomique*, ce qui fait de t un analogue p-adique de $2i\pi$.

Le frobenius φ s'étend par continuité à $\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}$, et $\varphi(t) = pt$. L'action de φ s'étend donc au sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}} = \mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[\frac{1}{t}]$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[\frac{1}{t}]$, et on note $\mathbf{B}_e$ le sous-anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$. L'inclusion de $\mathbf{B}_e$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ induit alors la *suite exacte fondamentale* [**26**] :

$$0 \to \mathbf{Q}_p \to \mathbf{B}_e \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}/\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \to 0.$$

Comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$ est muni de la filtration par les puissances de t (i.e. $\mathrm{Fil}^i\,\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} = t^i\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$), ceci munit $\mathbf{B}_e$ d'une filtration [8] et l'algèbre graduée associée est $\mathbf{Q}_p \oplus \frac{1}{t}C[\frac{1}{t}]$.

1.3. Questions sur $\mathbf{B}_e$. — Le message de Fontaine a été suivi, le lendemain, d'un message intitulé « Devoirs de vacances » avec les mêmes destinataires.

> Fontaine → Colmez, Fargues, Wintenberger dimanche 19/07/2009
>
> Cet anneau $\mathbf{B}_e$ est trop rigolo. Comme il est principal et $\mathbf{B}_e^* = \mathbf{Q}_p^*$, les idéaux non nuls de $\mathbf{B}_e$ correspondent bijectivement aux $\mathbf{Q}_p$-droites de $\mathbf{B}_e$ (prendre l'idéal engendré par un élément non nul de la droite). On a une fonction degré sur $\mathbf{B}_e$ (le degré d'un élément non nul b est le plus petit entier $m \geq 0$ tel que b est dans $\mathrm{Fil}^{-m}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$) donc aussi sur les idéaux. Si I est un idéal de degré m, le $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel sous-jacent a une structure

8. Et d'une fonction *degré* : si $x \in \mathbf{B}_e$, le degré $\deg x$ de x est le plus petit entier d tel que $x \in t^{-d}\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. On a $\deg xy = \deg x + \deg y$, et x est inversible dans $\mathbf{B}_e$ si et seulement si $\deg x = 0$. Maintenant, si on sait que $\mathbf{B}_e$ est de Bézout, l'existence de cette fonction degré implique que $\mathbf{B}_e$ est principal : si I est un idéal, et si a est un élément de I, de degré minimal, alors a est un générateur de l'idéal principal (a, b) pour tout $b \in I$, et donc a est un générateur de I.

d'espace de Banach-Colmez de dimension m et de hauteur 0, mais ce n'est pas clair qu'il est "constructible", ni que la multiplication est analytique (il me semble que si quand même).

Les idéaux de degré 1 sont tous maximaux.

Question 1 : Soit I un idéal de degré 1 de $\mathbf{B}_e$. Le corps $F = \mathbf{B}_e/I$ est-il isomorphe à C ?

C'est assez concret : si je choisis un générateur t de $\mathbf{Z}_p(1)$ et un générateur b_0 de I, je peux écrire $b_0 = b/t$ avec b dans U et j'ai une suite exacte de $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels $0 \to \mathbf{Q}_p \to U \to F \to 0$ (où 1 s'envoie sur b et u sur l'image $c(u)$ de u/t).

La multiplication s'obtient ainsi : si u et v sont dans U, il existe toujours un x dans U tel que $\theta(u)\theta(v) = \theta(b)\theta(x)$. Alors $(uv - bx)/t$ appartient à U et $c(u)c(v) = c((uv - bx)/t)$.

Si vous y voyez quelque chose, je veux voir aussi !

Question 2 : L'anneau $\mathbf{B}_e$ ressemble beaucoup à un anneau de polynômes à coefficients dans le corps algébriquement clos C. Est-ce que les éléments irréductibles sont tous de degré 1 ? Par exemple, un élément de degré 2 peut-il s'écrire comme un produit de deux éléments de degré 1 ?

C'est difficile d'y croire, mais c'est encore plus difficile de ne pas y croire !

Question 3 : Si la réponse aux questions 1 et 2 est "oui", montrer que, pour tout idéal non nul I de $\mathbf{B}_e$, le quotient $\mathbf{B}_e/I$ est un anneau de Banach-Colmez (i.e. la multiplication est analytique) effectif et est isomorphe à [9] $B_{m_1} \times B_{m_2} \times \cdots \times B_{m_d}$, pour $m_1, m_2, \ldots, m_d$ des entiers convenables (bien sûr, en tant qu'algèbre abstraite, B_m est isomorphe à $C[t]/(t^m)$, mais pas en tant que Banach-Colmez).

Le simple fait d'avoir écrit ce que je viens me convainc que la réponse à ces questions doit être "oui" et que la preuve ne doit pas être si dure. Soit cela sort tout seul de l'étude du gros corps gauche [10] de Pierre, soit cela résulte de ce qu'il ne devrait pas y avoir d'autre corps de Banach-Colmez que $\mathbf{Q}_p$ et C. Cependant, il semble peu probable que l'isomorphisme de C sur $\mathbf{B}_e/I$ soit canonique !

Nous avons probablement discuté de ces questions avec Fontaine début août, lors d'une conférence à Loen (Norvège), mais je n'ai pas souvenir que nous ayons fait quel que progrès que ce soit [11], et j'ai dû écrire à Fontaine, un peu plus tard, que j'avais

9. $B_m = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/t^m$.
10. Il s'agit du corps $\mathscr{C}$ du n° 2.2.1.
11. Disons tout de suite que la réponse à la première est "non" (cf. [**40**]), la réponse à la seconde est "oui" et la réponse à la troisième est "non" à cause du "non" à la question 1, mais devient "oui" si on

une preuve « simple », sans utiliser le théorème de Kedlaya, de la principalité de $\mathbf{B}_e$, ce qui m'a valu la réponse suivante.

> Fontaine → Colmez samedi 25/08/2009
>
> Je me suis effectivement convaincu que je savais prouver que $\mathbf{B}_e$ est principal sans me servir de Kedlaya, mais outre l'argument de degré que je t'ai vendu, je me sers du lemme fondamental [12] (en dimension 2 semble suffire). Je ne vois pas bien comment tu pourrais éviter un argument de ce genre (j'ai une application $\mathbf{Q}_p$-linéaire "analytique" de $\mathbf{C}_p$ dans $\mathbf{C}_p/V$ (où V est de dimension 2 sur $\mathbf{Q}_p$) et je veux montrer que le noyau n'est pas nul). Le fait que $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1}$ est principal est un résultat profond. Il me semble (il me reste des détails à vérifier et mon cerveau déconne) que l'on en déduit avec un argument Harder-Narasimhan que faiblement admissible implique admissible, ce qui est la plus jolie preuve que je connais... si ça marche. Et pourquoi pas aussi de Rham implique pst (je n'y ai pas encore réfléchi). En plus cela devrait expliquer la différence entre faiblement admissible et admissible dans le cas où la valuation n'est pas discrète. Il faut jouer avec des objets que j'avais essayé de vendre à Plût et qui est une variante sans action de Galois des « B-paires » de Berger. Du coup cela devrait très bien à la fois expliquer les trucs de Berger et se mélanger avec ce dont on discutait ces derniers temps. Je suis un peu tenté de raconter une partie de cela dans mon cours à Trieste la semaine prochaine mais c'est sans doute un peu prématuré [...]

1.4. La courbe. — Le second acte se passe à Trieste, lors d'une école d'été organisée par l'ICTP du 31 août au 18 septembre 2009 : deux semaines de cours suivies par une semaine de conférences. À côté de la résidence où nous étions logés se trouvait un petit restaurant avec une terrasse très agréable, des petits calamars délicieux, du vin local fort sympathique, et la grappa du patron. Nous avons passé de longues soirées sur cette terrasse à discuter de mathématiques.

Je suis arrivé le dimanche 6 septembre tard dans la soirée ; Fontaine était là depuis le début car il avait fait un cours la première semaine, et Fargues était arrivé le samedi. Le lundi matin, je les croise l'un après l'autre, très excités : ils avaient découvert La Courbe dans la nuit de samedi à dimanche, après un diner au petit [13] restaurant :

---

modifie la question en tenant compte de ce problème (cf. rem. 3.14 (i) pour la question 2, et rem. 3.14 (iii) pour la question 3).

12. Cf. rem 2.7. Ma preuve "simple" utilisait les mêmes arguments si j'en crois mes notes d'un exposé « Vector bundles on a strange curve » sur les travaux de Fargues et Fontaine que j'ai donné au Tata Institute en juillet 2010, mais elle comporte un trou (cf. n° 2.3.3), et peut-être n'avions nous de preuve ni l'un ni l'autre à ce moment-là.

13. Il est possible que la courbe n'aurait jamais vu le jour sans ce petit restaurant : après tout, on obtient déjà une jolie théorie en utilisant seulement les propriétés de $\mathbf{B}_e$; c'était d'ailleurs l'idée initiale de Fontaine (le programme esquissé ci-dessous était très optimiste !).

manifestement, la conversation avait porté sur la catégorie des B-paires, en particulier sur le fait qu'elle ressemblait fort à une catégorie de fibrés sur une courbe projective du fait de l'existence de filtrations de Harder-Narasimhan. Si on commence à réfléchir en ces termes, il y a une courbe affine « naturelle » qui vient à l'esprit [14], à savoir $\operatorname{Spec} \mathbf{B}_e$ vu qu'une B-paire fait intervenir un $\mathbf{B}_e$-module libre et que $\mathbf{B}_e$ est de dimension 1 puisque c'est un anneau principal, mais une courbe projective ? Mystère, mais :

> Fargues → Colmez, Fontaine dimanche 06/09/2009, 02:26
>
> Suite à une conversation hier soir à Trieste avec Jean-Marc je me suis mis à penser à la catégorie introduite par Jean-Marc et je suis tombé sur la chose suivante (cf. fichier attachement). Je n'ose pas penser qu'une telle monstruosité existe (ceci dit on aurait pu dire de même pour le fait que $\mathbf{B}_e$ soit principal).

Voici le contenu du fichier envoyé par Fargues :

> **La courbe étrange (et les fibrés sur celle-ci)**
>
> Soient k un corps et X une courbe projective lisse sur k géométriquement connexe. On fixe un point $x \in X$. Soit $U = X \setminus \{x\}$, un ouvert affine de X. Je pose $A = \mathscr{O}_{X,x}$, $B = \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$ et $K = k(X)$, le corps des fonctions rationnelles sur X. On a le dictionnaire suivant :
>
> $$k \longleftrightarrow \mathbf{Q}_p, \quad A \longleftrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+, \quad B \longleftrightarrow \mathbf{B}_e, \quad K \longleftrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}.$$
>
> En effet, A est un anneau de valuation discrète comme $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$. De plus B est un anneau de Dedekind comme $\mathbf{B}_e$ (si on veut, on peut prendre $X = \mathbf{P}^1$ pour avoir B principal comme $\mathbf{B}_e$). Il y a de plus des plongements canoniques
>
> $$A \hookrightarrow K \hookleftarrow B.$$

> Fontaine → Colmez vendredi 28/08/2009
>
> Concernant cette histoire de $\mathbf{B}_e$ principal ⇒ (faibl. adm. ⇒ adm.), je n'ai plus aucun doute, tout est d'une simplicité biblique et Berger n'en n'est pas passé loin puisqu'après avoir introduit les « B-paires » avec une définition des morphismes qui l'empêche de travailler avec, il fabrique un théorème de comparaison avec les (ϕ, Γ)-modules et déduit de Kedlaya que (faibl. adm. ⇒ adm.), alors que c'est complètement immédiat. En fait, il me semble qu'on doit pouvoir retrouver Kedlaya comme cela, probablement aussi, avec une variante de ce jeu les trucs de Kisin sur les modules à la Breuil (tout comme ceux de Berger avec les modules de Wach), refaire plus simplement les Banach-Colmez, comprendre pourquoi (faibl. adm. ⇒ adm.) est faux quand la valuation n'est plus discrète, etc, etc... et retrouver aussi bien sûr une nouvelle preuve de deRham ⇒ pst.

14. Personnellement, 7 ans plus tard, je suis encore stupéfait que l'on puisse penser à considérer le spectre d'un anneau comme $\mathbf{B}_e$ ou $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$: ces anneaux n'ont vraiment pas l'air d'avoir un lien raisonnable avec la géométrie.

On a la propriété
$$A \cap B = \Gamma(X, \mathscr{O}_X) = k,$$
analogue de
$$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \cap \mathbf{B}_e = \mathbf{Q}_p.$$
On a de plus
$$B^\times = \Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times = k^\times$$
car si $f \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)^\times$, alors $\mathrm{div}(f) = m[x]$ pour un entier $m \in \mathbf{Z}$, mais $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0 \Rightarrow m = 0$, et donc $f \in \Gamma(X, \mathscr{O}_K)^\times = k^\times$. Cela est bien sûr l'analogue de l'égalité $\mathbf{B}_e^\times = \mathbf{Q}_p^\times$.

Soient $I(A)$, resp. $I(B)$, le groupe des idéaux fractionnaires de A, resp. B, par exemple $I(B)$ consiste en les couples $(\mathscr{E}, s)$ formés d'un fibré en droites $\mathscr{E}$ sur U et d'une section rationelle s de $\mathscr{E}$ au point générique de U. Il y a alors deux fonctions additives degré sur I(A) et I(B) données par les valuations.

La catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à celle des triplets $(M, \mathscr{F}, \iota)$ où :

– M est un A-module libre de rang fini i.e. un germe de fibrés au voisinage de x,

– $\mathscr{F}$ est un fibré vectoriel sur U ou encore un B-module projectif de type fini $N = \Gamma(U, \mathscr{F})$,

– $\iota : M \otimes_A K \cong \mathscr{F}_\eta = N \otimes_B K$,

et de plus la filtration de Harder-Narasimhan des fibrés vectoriels sur X est obtenue grâce aux fonctions degrés sur $I(A)$ et $I(B)$.

Là on pourrait se dire que la catégorie de Harder-Narasimhan introduite par Jean-Marc est donc l'analogue de la catégorie des fibrés sur une courbe « $X = \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \coprod_{\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})} \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$ » mais c'est un peu différent car $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_e)$ et $\mathrm{Frac}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)$ sont différents.

Qu'à cela ne tienne : on a le résultat élémentaire suivant (dû à Beauville-Laszlo et qui est à la base de l'uniformisation du champ des fibrés sur une courbe par les Grassmaniennes affines) qui est un exercice de descente fpqc. Le résultat est que l'on peut remplacer $\mathscr{O}_{X,x}$ par $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$. Plus précisément, la catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à la catégorie des triplets (M, N, ι) où :

– M est un $\widehat{A}$-module libre de rang fini,

– N est un B-module projectif de type fini,

– $\iota : M \otimes_{\widehat{A}} \mathrm{Frac}(\widehat{A}) \cong N \otimes_B \mathrm{Frac}(\widehat{A})$,

où je ferais remarquer que si x est un point k-rationnel alors $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} = k[[t]]$ qui ressemble beaucoup plus à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ que $\mathscr{O}_{X,x}$ qui n'était pas complet... (d'ailleurs ce n'est pas pour rien que j'ai noté t l'uniformisante en x).

> Voici donc la question finale : peut-on constuire un schéma régulier X de dimension 1 sur $\mathrm{Spec}(\mathbf{Q}_p)$ (il ne sera bien sûr pas de type fini), muni d'un point C-rationnel $x \in X(C)$ (point donné par l'application θ, qui ne sera pas un point $\mathbf{Q}_p$-rationnel), d'un isomorphisme $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x} \cong \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ et d'un isomorphisme $\Gamma(X \setminus \{x\}, \mathscr{O}_X) \cong \mathbf{B}_e$? Si c'est le cas on peut définir des filtrations de Harder-Narasimhan sur les fibrés vectoriels sur X et on obtient une équivalence de catégories de Harder-Narasimhan avec la catégorie construite par Jean-Marc.
>
> En tous cas si la courbe étrange X n'existe pas, la catégorie des fibrés vectoriels sur celle-ci existe bien ! Si la courbe étrange X existe le mot étrange est faible pour la décrire, il faudrait un terme encore plus fort qu'étrange, je n'ose pas imaginer une telle monstruosité...

Au moment même où Fargues écrivait son message, Fontaine réalisait que l'on pouvait parfaitement donner un sens à $\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+) \coprod_{\mathrm{Spec}(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}})} \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$, et donc obtenir une courbe complète de cette manière : si on pose $X_e = \mathrm{Spec}(\mathbf{B}_e)$ et $X = X_e \cup \{\infty\}$ avec la topologie évidente, il suffit de définir le faisceau $\mathscr{O}_X$ par :

$$\Gamma(U, \mathscr{O}_X) = \begin{cases} \Gamma(U, \mathscr{O}_{X_e}) & \text{si } U \subset X_e, \\ \{b \in \Gamma(U \cap X_e),\ \deg b \geq 0\} & \text{si } \infty \in U. \end{cases}$$

Il s'est ensuite rendu compte que l'on pouvait même obtenir X comme une courbe projective : pour construire une courbe projective, il faut une algèbre graduée, et comme $\mathbf{B}_e = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+[\frac{1}{t}]^{\varphi=1}$ et $\varphi(t) = pt$, il y a une algèbre graduée naturelle P à considérer, à savoir,

$$P = \oplus_{n \in \mathbf{N}} (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^+)^{\varphi = p^n}.$$

Poser

$$X = \mathrm{Proj}\, P$$

définit une « variété projective » d'un genre un peu bizarre puisque son corps des constantes est $\mathbf{Q}_p$ et que le corps résiduel en $t = 0$ est C, et donc n'est pas de degré fini sur $\mathbf{Q}_p$. L'ouvert affine $t \neq 0$ n'est autre que $\mathrm{Spec}\, \mathbf{B}_e$, et donc X est une courbe puisque $\mathbf{B}_e$ est principal.

Quand je suis arrivé, on disposait donc de la courbe et d'une description de ses fibrés. Les soirées suivantes ont été largement consacrées à la courbe et aux propriétés de $\mathbf{B}_e$, en particulier aux questions posées par Fontaine dans son courriel « Devoirs de vacances »

> Colmez → Nizioł Mardi 08/09/2009
>
> [...] Fontaine est surexcité au sujet de $\mathbf{B}_e$, et n'arrète pas de trouver de nouveaux résultats que Fargues s'empresse de traduire en termes de fibrés vectoriels sur $\mathbf{P}^1$ (on aboutit à des objets franchement étranges en regardant $\mathrm{Spec}\, \mathbf{B}_e$). [...]

Une piste que nous avons contemplée pour répondre à ces questions consistait à faire agir le groupe des automorphismes de $C^\flat$. Si ce groupe avait eu la bonne idée d'opérer transitivement sur l'idéal maximal $\mathfrak{m}_{C^\flat}$ de $\mathscr{O}_{C^\flat}$, alors il aurait opéré transitivement sur les éléments de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{cris}})^{\varphi=p}$ car un tel élément est de la forme $\log[1+x]$, avec $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, et la réponse à la question 1 aurait été "oui". Notons que, si $C^\flat$ avait le bon goût d'être maximalement complet, alors $\mathrm{Aut}(C^\flat)$ opérerait transitivement sur $\mathfrak{m}_{C^\flat}$. Malheureusement, $C^\flat$ n'est pas maximalement complet... Cela suggère qu'il peut être profitable de remplacer C par une clôture maximalement complète ($C^\flat$ est alors aussi maximalement complet), car alors l'action de $\mathrm{Aut}(C^\flat)$ sur les points de X induit une bijection $|X| \cong \mathrm{Aut}(C^\flat)/(\mathrm{Aut}(C) \times \varphi^{\mathbf{Z}})$.

2. Représentations de G_K et objets dérivés

Avant de passer aux travaux de Fargues et Fontaine, je vais essayer de décrire les objets qui sont apparus dans les courriels du chapitre précédent, et la manière dont ils sont utilisés pour prouver les conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » de Fontaine. Disons tout de suite que les preuves de « fa $\Rightarrow$ a » sont relativement directes, alors que celles de « dR $\Rightarrow$ pst » comportent trois étapes, dont deux utilisent des apports extérieurs :

• L'étape 1 consiste à faire le chemin inverse de ce que l'on fait pour « fa $\Rightarrow$ a ».

• L'étape 2 traite les objets "isoclines", et utilise un résultat extérieur : le théorème de Sen [**51**] ou celui de Tsuzuki [**55**] rappelés ci-dessous (th. 2.4 et 2.44, la théorie des (φ, Γ)-modules permet de passer de l'un à l'autre [**3**, § 5.6]).

• L'étape 3 est une récurrence et demande un résultat plus ou moins facile selon le contexte, disant qu'un objet de Rham, extension d'objets semi-stables, est semi-stable (i.e. $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$).

2.1. Les conjectures

2.1.1. Les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}$. — L'énoncé originel des conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » fait intervenir l'anneau $\mathbf{B}_{\mathrm{st}} = \mathbf{B}_{\mathrm{cris}}[u]$, avec $u = \log[p^\flat]$. Mais tous les objets jouant un rôle vivent dans des sous-espaces de dimension finie, stables par φ. On peut donc remplacer $\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{st}}$ par les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$, où $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}} = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(\mathbf{A}_{\mathrm{cris}}[\frac{1}{p}])$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[u]$: ces anneaux sont plus proches de ceux utilisés dans les preuves, et on a encore $\mathbf{B}_e = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}])^{\varphi=1}$.

On étend les actions de φ et G_K sur $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]$ à $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$, et on munit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}[\frac{1}{t}]$ d'un opérateur N « de monodromie », en posant

$$\varphi(u) = pu, \quad \sigma(u) = u + \log[\sigma(p^\flat)/p^\flat], \quad N = -\tfrac{d}{du}.$$

Alors $N\varphi = p\varphi N$, et G_K commute à φ et N.

On fabrique un morphisme G_K équivariant de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, prolongeant l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \subset \mathbf{B}_{\mathrm{cris}} \subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$, en envoyant u sur $\log(\frac{[p^\flat]}{p})$ (la série définissant $\log(\frac{[p^\flat]}{p})$ converge car $\theta(\frac{[p^\flat]}{p}) = 1$). Ce morphisme induit une injection $K \otimes_{K_0} \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \hookrightarrow \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}$; (cf. [**26**, th. 4.2.4]).

2.1.2. Faiblement admissible implique admissible. — Un (φ, N)-*module filtré sur* K est la donnée de :

• *un* (φ, N)-*module* D *sur* K_0, i.e. un K_0-espace vectoriel D de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire bijective d'un frobenius φ et d'un opérateur N vérifiant $N\varphi = p\varphi N$,

• une structure de K-*module filtré* sur $D_K = K \otimes D$, i.e. une filtration décroissante sur D_K par des sous-K-espaces vectoriels D_K^i, pour $i \in \mathbf{Z}$, avec $D_K^i = D_K$ si $i \ll 0$ et $D_K^i = 0$ si $i \gg 0$.

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, *le rang* $\mathrm{rg}(D)$ *de* D est la dimension de D sur K_0. Si D est de rang 1, on définit le *degré* $\deg(D)$ *de* D par la formule

$$\deg(D) = t_N(D) - t_H(D),$$

où $t_N(D)$ et $t_H(D)$ sont définis en choisissant une base e de D sur K_0 :

• il existe $\lambda \in K_0^*$ tel que $\varphi(e) = \lambda e$, et on pose $t_N(D) = v_p(\lambda)$;

• il existe $i \in \mathbf{Z}$, unique, tel que $e \in D_K^i - D_K^{i+1}$, et on pose $t_H(D) = i$.

Si D est de rang $r \geq 2$, alors $\det D = \wedge^r D$ est de rang 1, et on définit le degré de D par

$$\deg(D) = \deg(\det D) = t_N(D) - t_H(D),$$
$$t_N(D) = t_N(\det(D)), \quad t_H(D) = t_H(\det D) = \sum_{i \in \mathbf{Z}} i \dim_K D_K^i / D_K^{i+1}.$$

Munie des fonctions rang et degré, la catégorie des (φ, N)-modules filtrés sur K est *une* $\otimes$-*catégorie de Harder-Narasimhan.* Si on définit la pente $\mu(D)$ d'un (φ, N)-module filtré non nul D par la formule $\mu(D) = \frac{\deg(D)}{\mathrm{rg}(D)} \in \mathbf{R}$, cela pour conséquence l'existence, sur tout D, d'une filtration canonique $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ (la *filtration de Harder-Narasimhan*), strictement croissante, telle que D_i/D_{i-1} soit *semi-stable* pour tout $i = 1, \ldots, r$ (ce qui signifie que $\mu(D') \leq \mu(D_i/D_{i-1})$ pour tout sous-objet strict D' de D_i/D_{i-1}) et telle que la suite des pentes $\mu(D_i/D_{i-1})$ soit strictement décroissante.

Un (φ, N)-module filtré sur K est dit *faiblement admissible* s'il est semi-stable de pente 0 (c'est une reformulation [**17**] de la notion originelle [**23**]).

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, on définit une représentation $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ de G_K par :

$$\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{Ker}\big[(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}] \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \to (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0\big],$$

et on dit que D est *admissible* si $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathrm{rg}(D)$.

Conjecture 2.1. — (« fa ⇒ a », [**27**, conj. 5.4.4]) *Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *D est faiblement admissible.*

(ii) *D est admissible.*

2.1.3. De Rham implique potentiellement semi-stable. — Si V est une représentation de G_K, on associe à V les invariants

$$\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}]\otimes V)^{G_K}, \quad \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V) = \varinjlim_{[L:K]<\infty} (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\tfrac{1}{t}]\otimes V)^{G_L}, \quad \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V)^{G_K}.$$

• $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est un (φ, N)-module sur K_0, de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *semi-stable* (ou *log-cristalline*) s'il y a égalité.

• $\mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)$ est un (φ, N)-module sur $\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}$, muni d'une action lisse de G_K (l'inertie agit à travers un quotient fini), de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *potentiellement semi-stable* (ou *potentiellement log-cristalline*) s'il y a égalité.

• $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un K-module filtré, de dimension $\leq \dim V$, et on dit que V est *de de Rham* s'il y a égalité. Si V est de de Rham et si i est un entier, alors $\dim_K(\mathbf{D}^{-i}_{\mathrm{dR}}(V)/\mathbf{D}^{1-i}_{\mathrm{dR}}(V))$ est *la multiplicité de i comme poids* (de Hodge-Tate) *de V* et on dit que *i est un poids de V* si cette multiplicité est non nulle.

On a de plus des injections naturelles

$$K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) \subset \big(\overline{\mathbf{Q}}_p \otimes_{\mathbf{Q}_p^{\mathrm{nr}}} \mathbf{D}_{\mathrm{pst}}(V)\big)^{G_K} \subset \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$$

dont on tire les implications

$$\text{semi-stable} \Rightarrow \text{potentiellement semi-stable} \Rightarrow \text{de Rham}$$

Conjecture 2.2. — (« dR ⇒ pst », [**27**, n° 6.2.2]) *Si V est une représentation de G_K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *V est de de Rham.*

(ii) *V est potentiellement semi-stable.*

Remarque 2.3. — Si V est semi-stable, le (φ, N)-module $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V)$ est filtré sur K grâce à l'isomorphisme $K \otimes_{K_0} \mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V) = \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$, et le (φ, N)-module filtré ainsi obtenu est admissible. De plus, V est naturellement isomorphe à $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(V))$.

Si D est un (φ, N)-module filtré admissible, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est semi-stable et D est naturellement isomorphe à $\mathbf{D}_{\mathrm{st}}(\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(V))$.

Les conjectures « fa ⇒ a » et « dR ⇒ pst » fournissent donc une description complète de la catégorie des représentations de de Rham, en termes d'objets provenant de l'algèbre semi-linéaire.

Un des premiers résultats relatifs à cette conjecture est la traduction suivante d'un théorème de Sen [**51**] :

Théorème 2.4. — *Si V est une représentation de G_K, les conditions suivantes sont équivalentes :*

(i) *V est de de Rham, à poids de Hodge-Tate tous nuls* (i.e. $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V \cong (\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^{\dim V}$).
(ii) *L'inertie agit à travers un quotient fini.*
Elles impliquent V potentiellement non ramifiée (*et potentiellement semi-stable*).

2.2. Le lemme fondamental

2.2.1. Le corps $\mathscr{C}$. — Soient $\widetilde{\mathscr{O}_C\{T\}}$ le complété p-adique de la clôture intégrale de $\mathscr{O}_C\{T\}$ dans une clôture algébrique de son corps des fractions, et $\widetilde{C\{T\}} = \widetilde{\mathscr{O}_C\{T\}}[\frac{1}{p}]$. On muni $\widetilde{C\{T\}}$ de la norme spectrale, ce qui en fait une algèbre de Banach. L'espace $\mathrm{Spm}(\widetilde{C\{T\}})$ est un revêtement profini de la boule unité fermée, et on voit les éléments de $\widetilde{C\{T\}}$ comme des fonctions multivaluées sur la boule unité.

On fixe $\tilde{0} \in \mathrm{Spm}(\widetilde{C\{T\}})$ au-dessus de 0. On appelle *correspondance analytique additive de rang fini*, un élément f de $\widetilde{C\{T\}}$ tel que :

- $f(\tilde{0}) = 0$ (et donc $0 \in \{f(0)\}$)
- $\{f(x+y)\} - \{f(x)\} - \{f(y)\}$ est [15] inclus dans un $\mathbf{Z}_p$-module de rang fini ne dépendant pas de x et y.

Le *graphe* Γ_f^0 de f, ensemble des $(x,y) \in C^2$ avec $y \in \{f(x)\}$, est alors un sous-$\mathbf{Z}_p$-module de C^2, ce qui permet de $\mathbf{Q}_p$-linéariser la situation et de définir une correspondance $\mathbf{Q}_p$-linéaire sur C, encore notée f, dont le graphe Γ_f est le sous-$\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de C^2 engendré par Γ_f^0. On appelle *correspondance analytique $\mathbf{Q}_p$-linéaire de rang fini* une correspondance sur C^2 obtenue de cette manière, et on note $\mathscr{C}$ l'ensemble de ces correspondances. On voit $f \in \mathscr{C}$ comme une fonction multivaluée sur C, et on définit *le rang de f* comme la dimension du $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel :

$$U_f = \{f(0)\}.$$

Les correspondances de rang 0 sont les f_c, avec $f_c = cT$, pour $c \in C$.

On alors les résultats suivants ([**12**, chap. 5], en particulier les §§ 5.5, 5.6, 5.7, et [**12**, chap. 9], en particulier le th. 9.5).

Théorème 2.5. — *Si $f \in \mathscr{C} - \{0\}$, alors f est surjective* [16] *et*

$$V_f = \{x \in C,\ 0 \in \{f(x)\}\}$$

est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension le rang de f.

Si $f, g \in \mathscr{C}$, il existe $f+g \in \mathscr{C}$ et $f \cdot g \in \mathscr{C}$, uniques, telles que, pour tout $x \in C$,

$$\{(f+g)(x)\} \subset \{f(x)\} + \{g(x)\} \quad \text{et} \quad \{(f \cdot g(x))\} \subset f(\{g(x)\}).$$

Théorème 2.6. — (i) *Muni des lois $+$ et $\cdot$ ci-dessus, $\mathscr{C}$ est un corps de centre $\mathbf{Q}_p$.*
(ii) *$c \mapsto f_c$ identifie C à un sous-corps commutatif maximal de $\mathscr{C}$.*

15. Si $X, Y \subset C$, on note $X+Y$ l'ensemble des $x+y$, avec $x \in X$ et $y \in Y$.
16. Si $y \in C$, il existe $x \in C$ tel que $y \in \{f(x)\}$.

(iii) *Si g est l'inverse de f, alors Γ_g est le transposé de Γ_f* (i.e., $\Gamma_g = \{(y,x),\ (x,y)\in\Gamma_f\}$)*, et f et g ont même rang.*

Remarque 2.7. — On a une surjection $\theta : (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p} \to \widetilde{C\{T\}}$. Si $c\in C$, alors cT a un unique relèvement $\widehat{cT}$ dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p}$ tel que $\widehat{cT}(\tilde{0}) = 0$; on choisit aussi un relèvement $\hat{c}$ de c.

Soit $\mathrm{Tr} : C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C \to C$ définie par $\mathrm{Tr}(\alpha\otimes\beta) = \alpha\beta$. Si $A = \sum_i \alpha_i\otimes\beta_i$ vérifie $\mathrm{Tr}(A) = 0$, alors $\sum_i \widehat{\beta_i}\,\widehat{\alpha_i T} \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(\widetilde{C\{T\}}))^{\varphi=p^2}$, est divisible par t, et :

$$f_A = \theta\big(t^{-1}\sum_i \widehat{\beta_i}\,\widehat{\alpha_i T}\big) \in \mathscr{C}.$$

Le « lemme fondamental » auquel il est fait allusion dans les courriels de Fontaine est le th. 2.5 appliqué à un élément de $\mathscr{C}$ de la forme f_A. (En fait (th. 2.8), tout élément de $\mathscr{C}$ est de cette forme, à addition près de f_c avec $c\in C$.)

Théorème 2.8. — *Tout élément f de $\mathscr{C}$ s'écrit sous la forme $f = f_c + f_A$, et si on définit $\delta(f)\in C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C$ par $\delta(f) = A$, alors $\delta(f)$ ne dépend pas de l'écriture de f, et on a la suite exacte*

$$0 \to C \to \mathscr{C} \xrightarrow{\ \delta\ } C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C \xrightarrow{\ \mathrm{Tr}\ } C \to 0.$$

2.2.2. Représentations voisines. — Soit V_1 une représentation de dimension finie de G_K ; soit $M_1 = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}\otimes V_1$, et soit M_2 un sous $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes V_1$, stable par G_K, tel que $(M_1+M_2)/M_1$ et $(M_1+M_2)/M_2$ soient des C-espaces vectoriels de dimension 1. Si $e_1,\dots,e_d$ est une base de V_1 sur $\mathbf{Q}_p$, il existe donc $(\alpha_1,\dots,\alpha_d)\in C^d$ et $(\beta_1,\dots,\beta_d)\in C^d$ tels que $(M_1+M_2)/M_1 = Ct^{-1}(\alpha_1e_1+\cdots+\alpha_de_d)$, et $(M_1\cap M_2)/tM_1$ est le sous espace de $C\otimes V_1$ des $x_1e_1+\cdots+x_de_d$ d'équation $\beta_1x_1+\cdots+\beta_dx_d = 0$ (en particulier $\beta_1\alpha_1+\cdots+\beta_d\alpha_d = 0$).

Soit $X = (\mathbf{B}_e\otimes V_1)\cap(M_1+M_2)$, et soit $u_i : X\to (M_1+M_2)/M_i$ l'application naturelle. On déduit de la suite exacte fondamentale que l'on a une suite exacte

$$0\to V_1\to X\to (M_2+M_1)/M_1\to 0,$$

et des th. 2.5 et 2.8, que :

Proposition 2.9. — (i) *Si $\beta_1\otimes\alpha_1+\cdots+\beta_d\otimes\alpha_d\neq 0$ dans $C\otimes_{\mathbf{Q}_p} C$, alors u_2 est surjective et $\mathrm{Ker}\,u_2$ est une représentation V_2 de G_K, de dimension d.*

(ii) *Si $\beta_1\otimes\alpha_1+\cdots+\beta_d\otimes\alpha_d = 0$, alors $\dim_{\mathbf{Q}_p}(\mathrm{Im}\,u_2)\le d$ et $\mathrm{Ker}\,u_2$ est de dimension infinie sur $\mathbf{Q}_p$.*

Remarque 2.10. — Supposons que l'on est dans le cas (i), ce qui est automatique [17] si V_1 est irréductible.

(i) On a des isomorphismes

$$\mathbf{B}_e \otimes V_2 = \mathbf{B}_e \otimes V_1, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_2 = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_1, \quad \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V_i = M_i, \text{ si } i = 1, 2.$$

On en déduit en particulier que « V_2 de Rham » $\Leftrightarrow$ « V_1 de Rham ».

(ii) Si $V_1 = \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D, \mathrm{Fil}_1)$, alors $M_i = \mathrm{Fil}_i^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)$ si $i = 1, 2$, où Fil_2 est une filtration sur D_K *voisine* [18] *de* Fil_1. On en déduit que, si Fil_1 et Fil_2 sont deux filtrations voisines de D_K, alors « (D, Fil_1) admissible » $\Leftrightarrow$ « (D, Fil_2) admissible ».

2.2.3. Un critère d'égalité de sous-catégories. — Les démonstrations des conjectures « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » reposant sur le lemme fondamental **[14, 30]** utilisent, de manière implicite, le critère suivant d'égalité de sous-catégories.

On se donne une catégorie $\mathscr{T}$ dans laquelle les notions de dimension et suite exacte ont un sens, que l'on suppose munie d'une relation de voisinage (symétrique). On suppose que l'on dispose de sous-catégories $\mathscr{T}' \supset \mathscr{T}''$ de $\mathscr{T}$ vérifiant :

(0) Les objets de $\mathscr{T}'$ (et donc aussi ceux de $\mathscr{T}''$) sont de dimension finie.

(1) Si $T \in \mathscr{T}$ est de dimension 1, alors « $T \in \mathscr{T}' \Rightarrow T \in \mathscr{T}''$ ».

(2) Si T_1 et T_2 sont voisins dans $\mathscr{T}$, alors :

a) si T_1 et T_2 sont de dimension finie, alors $T_1 \in \mathscr{T}'' \Leftrightarrow T_2 \in \mathscr{T}''$,

b) T_1 irréductible dans $\mathscr{T}' \Rightarrow T_2 \in \mathscr{T}'$.

(3) Si $0 \to T_1 \to T \to T_2 \to 0$ est exacte dans $\mathscr{T}'$, et si $T_1, T_2 \in \mathscr{T}''$, alors $T \in \mathscr{T}''$.

(4) Si $T \in \mathscr{T}'$, il existe une chaîne $T = T_0, T_1, \ldots, T_r$ d'éléments de $\mathscr{T}$ telle que T_{i+1} soit voisin de T_i pour tout i, et $T_r \in \mathscr{T}''$.

Alors $\mathscr{T}'' = \mathscr{T}'$.

(La preuve se fait par récurrence sur la dimension, et ne pose pas de problème.)

2.2.4. La conjecture « fa $\Rightarrow$ a ». — On peut appliquer le critère ci-dessus en prenant pour $\mathscr{T}$ la catégorie des (φ, N)-modules filtrés avec la relation de voisinage sur les filtrations, et pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$ les sous-catégories des objets faiblement admissibles et admissibles. Tous les énoncés sont relativement élémentaires **[14]** à part le (2a) qui

17. La C-droite engendrée par $\alpha = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_d e_d$ est stable par G_K. Soit $W \subset V_1$ minimal, tel que $\alpha \in C \otimes W$. Si W est de dimension r, et si $f_1, \ldots, f_d$ est une base de V telle que $f_1, \ldots, f_r$ soit une base de W sur $\mathbf{Q}_p$, on a $\alpha = \alpha'_1 f_1 + \cdots + \alpha'_r f_r$, où $\alpha'_1, \ldots, \alpha'_r$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$, par minimalité de W. Si $\sigma(f_i) = \sum_j a_{j,i} f_j$, avec $a_{j,i} \in \mathbf{Q}_p$, on a $\sigma(\alpha) = \sum_j (\sum_i a_{j,i} \sigma(\alpha'_i)) f_j$, et comme la C-droite engendrée par α est stable par G_K, cela implique $\sum_i a_{j,i} \alpha'_i = 0$ si $j \geq r+1$, et donc $a_{j,i} = 0$ si $j \geq r+1$, puisque les α'_i sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$. Autrement dit, W est stable par G_K, et si V_1 est irréductible, cela implique que $r = d$ et donc que $\alpha_1, \ldots, \alpha_d$ sont linéairement indépendants sur $\mathbf{Q}_p$. Il en résulte que $\beta_1 \otimes \alpha_1 + \cdots + \beta_d \otimes \alpha_d \neq 0$.

18. Cela signifie que $\sum_{j \in \mathbf{Z}} \dim_K (\mathrm{Fil}_1^j + \mathrm{Fil}_2^j)/(\mathrm{Fil}_1^j \cap \mathrm{Fil}_2^j) = 2$. L'application qui à une filtration Fil_2 sur D_K associe $M_2 = \mathrm{Fil}_2^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)$ induit une bijection de l'ensemble des filtrations de D_K voisines de Fil_1 sur celui des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-résaux M_2 de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V_1 = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K$, stables par G_K, tels que $(M_1 + M_2)/M_1$ et $(M_1 + M_2)/M_2$ soient des C-espaces de dimension 1.

résulte du (ii) de la rem. 2.10 et le (4) sur l'existence d'une chaîne aboutissant à une filtration admissible. Mais la relation de voisinage permet d'augmenter de 1 un des poids de la filtration et de diminuer de 1 un autre, ce qui permet, en un nombre fini d'étapes d'arriver à une filtration dont tous les poids sont de la forme k ou $k+1$, avec $k \in \mathbf{Z}$, et on peut de plus s'arranger pour que la filtration soit définie sur K_0 auquel cas les résultats de [**31**] impliquent que cette filtration est admissible.

2.2.5. La conjecture « dR ⇒ pst ». — On peut aussi essayer d'appliquer le critère en prenant pour $\mathscr{T}$ la catégorie des $\mathbf{Q}_p$-espaces de Banach munis d'une action continue de G_K, avec la relation de voisinage : « X_1 voisin de X_2 » s'il existe une représentation de dimension finie V de G_K et des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseaux M_1, M_2 de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$, avec $(M_1 + M_2)/M_i$ de dimension 1 sur C, si $i = 1, 2$, tels que $X_i = (\mathbf{B}_e \otimes V) \cap M_i$. On prend alors pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$ les sous-catégories des représentations de de Rham et potentiellement semi-stables respectivement.

(1) est alors immédiat, (2a) suit du (i) de la rem. 2.10, (2b) du (i) de la prop. 2.9, (3) est un résultat du type $H^1_g = H^1_{\mathrm{st}}$ pour lequel on peut référer à [**36**] ou [**46**, prop. 1.24] si k_K est fini, et à [**2**, th. VI.2] dans le cas général. Le problème principal est de construire une chaîne reliant une représentation de de Rham quelconque à une représentation potentiellement semi-stable. Comme le seul résultat général dont on dispose est le th. 2.4 dont une conséquence est qu'une représentation dont tous les poids de Hodge-Tate sont égaux est potentiellement semi-stable, on cherche à se ramener à ce cas, mais ce n'est pas possible si la somme des poids $t_H(V)$ n'est pas divisible par $\dim V$ puisque $t_H(V)$ ne change pas par voisinage.

Pour résoudre ce problème [**30**], on utilise le fait que V est de Rham (resp. potentiellement semi-stable) si et seulement si $\mathbf{Q}_{p^h} \otimes V$ l'est. Maintenant, si h est multiple de $d = \dim V$, on peut tordre $\mathbf{Q}_{p^d} \otimes V$ par une puissance du caractère de Lubin-Tate associé à $(\mathbf{Q}_{p^d}, p)$ pour obtenir une $\mathbf{Q}_{p^d}$-représentation vérifiant $t_H = 0$. Comme ce caractère de Lubin-Tate est cristallin, la torsion par ses puissances n'altère pas les propriétés "de Rham" ou "potentiellement semi-stable". On est donc amené à remplacer $\mathscr{T}$ par la limite inductive des $\mathbf{Q}_{p^h} \otimes \mathscr{T}$ (et pareil pour $\mathscr{T}'$ et $\mathscr{T}''$), la limite étant prises pour les flèches $V \mapsto \mathbf{Q}_{p^k} \otimes_{\mathbf{Q}_{p^h}} V$ si $h \mid k$. (On demande alors que les réseaux de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes V$ utilisés pour la relation de voisinage soient stables par l'action de $\mathbf{Q}_{p^h}$.)

2.3. Les Espaces de Banach de Dimension finie. — La théorie des Espaces de Banach de Dimension finie a été modelée sur celle des presque C-resprésentations exposée au § 2.4. Elle correspond en gros à faire de l'algèbre linéaire sur le corps $\mathscr{C}$ du th. 2.6. La démonstration de « fa ⇒ a » qui en résulte (cf. n° 2.3.1) est celle que Fontaine avait en vue quand il a développée la théorie des presque C-resprésentations, celle de « dR ⇒ pst » (cf. n° 2.4) a été inspirée par les travaux de Berger [**3**] et Kedlaya [**37**].

Une *algèbre sympathique* Λ est une algèbre de Banach p-adique munie de la norme spectrale, telle que $x \mapsto x^p$ soit surjective sur $\{x,\ |x-1|<1\}$ (une telle algèbre est, en particulier, perfectoïde). Un *Espace de Banach* $\mathbb{W}$ est un foncteur $\Lambda \mapsto \mathbb{W}(\Lambda)$ de la catégorie des algèbres sympathiques dans celle des espaces de Banach p-adiques. Des exemples triviaux sont :

- les espaces V de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$ (foncteur $\Lambda \mapsto V$, pour tout Λ),
- les espaces affines $\mathbb{V}^d$, avec $d \in \mathbf{N}$ (foncteur $\Lambda \mapsto \Lambda^d$, pour tout Λ).

Un exemple moins trivial (et fondamental) est celui *du Graphe* $\mathbb{G}_f \subset \mathbb{V}^2$ *d'un élément* f *de* $\mathscr{C}$: si Λ est une algèbre sympathique, alors $\mathbb{G}_f(\Lambda)$ est l'ensemble des $(\lambda_1,\lambda_2) \in \Lambda^2$ tels que $(s(\lambda_1), s(\lambda_2)) \in \Gamma_f$, pour tout $s : \Lambda \to C$. Les deux projections naturelles de $\mathbb{V}^2$ sur $\mathbb{V}^1$ induisent des suites exactes [**12**, cor. 6.9] :

$$0 \to U_f \to \mathbb{G}_f \to \mathbb{V}^1 \to 0, \quad 0 \to V_f \to \mathbb{G}_f \to \mathbb{V}^1 \to 0,$$

où U_f et V_f sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension le rang de f apparaissant dans le th. 2.5.

Un Espace de Banach est *de Dimension finie* si « il est égal à $\mathbb{V}^d$ à un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie près ». Plus formellement, on dit qu'une suite $0 \to \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W} \to \mathbb{W}_2 \to 0$ est exacte, si $0 \to \mathbb{W}_1(\Lambda) \to \mathbb{W}(\Lambda) \to \mathbb{W}_2(\Lambda) \to 0$ est exacte pour toute algèbre sympathique Λ, et on dit que $\mathbb{W}$ est de Dimension finie s'il existe $d \in \mathbf{N}$, des espaces V_1, V_2 de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, et des suites exactes

$$0 \to V_1 \to \mathbb{Y} \to \mathbb{V}^d \to 0, \quad 0 \to V_2 \to \mathbb{Y} \to \mathbb{W} \to 0,$$

de sorte que $\mathbb{W}$ est obtenu à partir de $\mathbb{V}^d$ en « rajoutant V_1 et quotientant par V_2 ». Une telle description s'appelle une *présentation de* $\mathbb{W}$.

Remarque 2.11. — La définition ci-dessus est la définition originelle [**12**]. Un point de vue plus naturel [**29, 48, 49, 50, FF**] (ou [**18**], dans un contexte proche) consiste à isoler les objets *effectifs* (ceux de la forme $0 \to V_1 \to \mathbb{W} \to \mathbb{V}^d \to 0$, sans passage au quotient), qui peuvent se définir comme des variétés « analytiques » – réunion de spectres d'algèbres de Banach (non noethériennes) – munies d'une structure de groupe analytique. On définit un objet général comme le quotient d'un effectif par un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie. Le cadre naturel pour considérer de tels quotients est celui des *diamants* [**54, 22**], et les Espaces de Banach de Dimension finie en fournissent des exemples non triviaux [**54, 44**].

Théorème 2.12. — (i) *Si* $\mathbb{W}$ *est un Espace de Banach de Dimension finie,*

$$\operatorname{Dim}\mathbb{W} = (\dim\mathbb{W}, \operatorname{ht}\mathbb{W}), \quad \textit{avec } \dim\mathbb{W} = d \textit{ et } \operatorname{ht}\mathbb{W} = \dim_{\mathbf{Q}_p} V_1 - \dim_{\mathbf{Q}_p} V_2,$$

ne dépend que de $\mathbb{W}$ *et pas de la présentation.*

(ii) *Si* $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ *est un morphisme d'Espaces de Banach de Dimension finie, alors* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Coker} f$ *sont des Espaces de Banach de Dimension finie, et :*

$$\operatorname{Dim}\mathbb{W}_1 = \operatorname{Dim}\operatorname{Ker} f + \operatorname{Dim}\operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim}\mathbb{W}_2 = \operatorname{Dim}\operatorname{Coker} f + \operatorname{Dim}\operatorname{Im} f.$$

(iii) *Si* $\dim \mathbb{W} = 0$, *alors* $\operatorname{ht} \mathbb{W} \geq 0$.

(iv) *Si* $\mathbb{W}$ *est une extension successive de* $\mathbb{V}^1$, *et si* $\mathbb{W}'$ *est un sous-Espace de dimension finie de* $\mathbb{W}$, *alors* $\operatorname{ht} \mathbb{W}' \geq 0$.

Remarque 2.13. — On a $\mathbb{W} = 0$ si et seulement si $\mathbb{W}(C) = 0$. Il en résulte, grâce à l'existence de noyaux et conoyaux que $f : \mathbb{W}_1 \to \mathbb{W}_2$ est un isomorphisme si et seulement si $f_C : \mathbb{W}_1(C) \to \mathbb{W}_2(C)$ est un isomorphisme. Autrement dit, $\mathbb{W}$ est déterminé par $\mathbb{W}(C)$, ce qui permet de penser à $\mathbb{W}$ comme étant l'espace de Banach $\mathbb{W}(C)$ auquel on a ajouté des structures « analytiques » supplémentaires. En général, c'est l'espace $\mathbb{W}(C)$ qui nous intéresse, mais sans ces structures supplémentaires, il serait impossible de parler de sa Dimension.

Remarque 2.14. — Le corps $\mathscr{C}$ peut se voir comme l'anneau des endomorphismes de la limite projective des $\mathbb{V}^1/V$, où V décrit les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie de $C = \mathbb{V}^1(C)$. Que $\mathscr{C}$ soit un corps est une traduction de ce que cet objet est un objet simple (on a quotienté par tout ce qui était possible !).

2.3.1. La conjecture « fa ⇒ a ». — Soit D un (φ, N)-module filtré sur K, de rang h. Si $r \in \mathbf{N}$, on pose

$$X^r_{\mathrm{st}}(D) = (t^{-r}\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \quad \text{et} \quad X_{\mathrm{dR}}(D) = (t^{-r}\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0.$$

Alors $X^r_{\mathrm{st}}(D)$ et $X_{\mathrm{dR}}(D)$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{X}^r_{\mathrm{st}}(D)$ et $\mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D)$, et on a ([**12**, prop. 10.1 et 10.7]) :

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}^r_{\mathrm{st}}(D) = \sum\nolimits_{r_i \leq r} (r - r_i, 1), \text{ où les } r_i \text{ sont les pentes de } \varphi, \text{ avec multiplicité,}$$

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}^r_{\mathrm{dR}}(D) = (r \dim_K D_K - \sum\nolimits_{i=1}^{r} \dim_K D^i_K, 0)$$

En particulier, si $r(D)$ est le plus petit entier r vérifiant $D_K^{r+1} = 0$ et $r_i \leq r$ pour tout r_i, et si $r \geq r(D)$, alors

$$\operatorname{Dim} \mathbb{X}^r_{\mathrm{st}}(D) = (rh - t_N(D), h) \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim} \mathbb{X}^r_{\mathrm{dR}}(D) = (rh - t_H(D), 0).$$

L'application naturelle $X^r_{\mathrm{st}}(D) \to X^r_{\mathrm{dR}}(D)$ (induite par l'inclusion $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \to \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$) s'étend en un morphisme $\mathbb{X}^r_{\mathrm{st}}(D) \to \mathbb{X}_{\mathrm{dR}}(D)$ d'Espaces de Banach. Par ailleurs, si $r \geq r(D)$, alors $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est le noyau de $X^r_{\mathrm{st}}(D) \to X^r_{\mathrm{dR}}(D)$. On déduit alors du th. 2.12, le résultat suivant.

Proposition 2.15. — *Si* $t_H(D) = t_N(D)$, *sont équivalents :*

(i) $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ *est de dimension finie sur* $\mathbf{Q}_p$.

(ii) $X^r_{\mathrm{st}}(D) \to X^r_{\mathrm{dR}}(D)$ *est surjective pour* $r = r(D)$.

(ii′) $X^r_{\mathrm{st}}(D) \to X^r_{\mathrm{dR}}(D)$ *est surjective pour tout* $r \geq r(D)$.

De plus, ces énoncés impliquent :

(iii) D *est faiblement admissible.*

(iv) $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \operatorname{rg} D$.

Comme on sait que « D faiblement admissible » implique que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D)$ est de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, avec égalité si et seulement si D est admissible (en fait, on montre que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D')$, où D' est le plus grand sous-objet admissible de D, cf. [**14**, prop. 4.5] ou [**12**, prop. 11.11]), cette proposition permet d'en déduire que « D faiblement admissible » implique « D est admissible ».

2.3.2. La conjecture « dR ⇒ pst ». — La théorie des Espaces de Banach de Dimension finie peut être utilisée pour démontrer le résultat ci-dessous (la preuve est trop combinatoire – le problème est qu'il n'y a pas moyen de prédire à l'avance quel h va marcher – pour être résumée ici).

Théorème 2.16. — ([**13**, prop. 0.3]) *Soit M un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ et soit*

$$\widetilde{M}_{\mathrm{rig}}^+ = \{x \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+)^d,\ \varphi^n(x) \in M,\ \forall n \in \mathbf{Z}\}.$$

Alors $\widetilde{M}_{\mathrm{rig}}^+$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$-module libre de rang d, et possède une base $e_1, \dots, e_d$ vérifiant :
- *il existe $h \in \mathbf{N}$ et $a_1 \leq \cdots \leq a_d \in \mathbf{N}$, tels que $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$, pour tout i,*
- *$\varphi^n(e_1), \dots, \varphi^n(e_d)$ est une base de M sur $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tout $n \in \mathbf{Z}$.*

On utilise ce résultat de la manière suivante pour démontrer « dR ⇒ pst ». Soit V une représentation de de Rham à poids de Hodge-Tate ≤ 0 (on peut s'y ramener en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique). Soit

$$\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V).$$

C'est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$, isomorphe à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$ en tant que G_K-module. Soit $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ le sous-G_K-module de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes V$ défini par :

$$\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V) = \{x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \otimes V,\ \forall n \in \mathbf{Z},\ \varphi^{-n}(x) \in \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)\}.$$

Le th. 2.16, appliqué à $M = \mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ (après avoir identifié $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V$ à $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+)^d$), fournit une base $e_1, \dots, e_d$ de $\widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+$ vérifiant $\varphi^h(e_i) = p^{a_i} e_i$, si $1 \leq i \leq d$.

Si tous les a_i sont égaux à un même a, alors $W = \mathbf{Q}_{p^h} e_1 \oplus \cdots \oplus \mathbf{Q}_{p^h} e_d$ est l'ensemble des $x \in \widetilde{\mathbf{N}}_{\mathrm{rig}}^+(V)$ vérifiant $\varphi^h(x) = p^a x$; c'est donc un $\mathbf{Q}_{p^h}$-espace de dimension d stable par G_K. Par ailleurs, $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\mathbf{Q}_p} W$ est le sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-module de $(\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V))$ engendré par les $(0, \dots, 0, \varphi^j(e_i), 0, \dots, 0)$, pour $0 \leq j \leq h-1$, $1 \leq i \leq d$, le $\varphi^j(e_i)$ étant en $j+1$-ième position. Comme les $\varphi^j(e_i)$, pour $1 \leq i \leq d$, forment une base de $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ pour tout j, et comme $\mathbf{N}_{\mathrm{dR}}^+(V)$ est un $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+[G_K]$-module trivial, on en déduit que W est une représentation de de Rham dont tous les poids de Hodge-Tate sont nuls. Il existe donc, d'après le th. 2.4, une extension finie L_1 de K telle que l'inertie de G_{L_1} agisse trivialement.

Dans le cas général, on démontre, par récurrence sur le nombre de a_i différents, en utilisant la prop. 2.17 ci-dessous, qu'il existe une extension finie L de K et des $\alpha_{i,j} \in (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+)^{\varphi^h = p^{a_i - a_j}}$, tels que $f_i = e_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_{i,j} e_j$ soit fixe par l'inertie de G_L. Cela

prouve que la restriction de V à G_L est semi-stable, et donc que V est potentiellement semi-stable, puisque les f_i sont des éléments de $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes V$.

Proposition 2.17. — ([**13**, prop. 0.4]) *Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocyle continu sur G_K, à valeurs dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\varphi^h=p^a}$, et tel que $\sigma \mapsto N^k(\varphi^{-n}(c_\sigma))$ soit un cobord dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, pour tous $k \in \mathbf{N}$ et $n \in \mathbf{Z}$. Alors il existe $c \in (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{\varphi^h=p^a}$, tel que $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$, pour tout $\sigma \in G_K$.*

2.3.3. $\mathbf{B}_e$ *est principal.* — Pour déduire le fait que $\mathbf{B}_e$ est principal de la théorie des Espaces de Banach, on a besoin, en plus du lemme fondamental (rem. 2.7), du résultat suivant (qui intervient aussi dans la preuve du th. 2.16).

Proposition 2.18. — *Si $\mathbb{W}$ est un sous-Espace de Banach de $(\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$, de Dimension finie, et si $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{W}(C)$ désigne le sous-$\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-module de $(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}})^d$ engendré par $\mathbb{W}(C)$, alors $\mathrm{ht}(\mathbb{W}) \geq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}}(\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \cdot \mathbb{W}(C))$. En particulier, $\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$ ne contient pas de $\mathbb{V}^1$.*

Si $m \in \mathbf{N}$, soient $U_m = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p^m}$ et $B_m = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^m$, Alors U_m et B_m sont les C-points d'Espace de Banach $\mathbb{U}_m$ et $\mathbb{B}_m$, de Dimensions $(m,1)$ et $(m,0)$, et l'application naturelle $\mathbb{U}_m \to \mathbb{B}_m$ est surjective, de noyau $\mathbf{Q}_p t^m$.

L'anneau $\mathbf{B}_e$ est presque euclidien : si $a \in \mathbf{B}_e$ et si $b \in \mathbf{B}_e$ est non nul, il existe $q, r \in \mathbf{B}_e$ avec $\deg r \leq \deg b$ et $a = bq + r$. Si $\deg a \leq \deg b$, on prend $q = 0$ et $r = a$. Si $\deg a - \deg b = k \geq 1$, on choisit un relèvement q_0 dans U_k de l'image de $t^k(a/b)$ dans $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et on pose $q = \frac{q_0}{t^k}$ et $r = a - bq$. Alors $t^{k+d}r \in U_{k+d}$ et a une image nulle dans $t^k\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$, et donc $t^{k+d}r \in t^r U_d$ et $\deg r \leq d$.

Soit I un idéal non nul de $\mathbf{B}_e$, et soit $a \in I$ de degré minimal d. On veut prouver que a est un générateur de I, et donc que tout $b \in I$ est un multiple de a. Quitte à retirer à b un multiple de a comme ci-dessus, on peut supposer que $\deg b = \deg a$. Soient $a_0 = t^d a$ et $b_0 = t^d b$ de telle sorte que $a_0, b_0 \in U_d$. Il y a, *a priori*, deux cas :

• Si $\theta(a_0)$ et $\theta(b_0)$ sont colinéaires sur $\mathbf{Q}_p$, il existe $u, v \in \mathbf{Q}_p$, non tous deux nuls, tels que $\theta(ua_0 + vb_0) = 0$, ce qui implique que $ua_0 + vb_0 = tb'$, avec $b' \in U_{d-1}$, et donc que I contient $t^{1-d}u'$ qui est de degré $< d$ et donc nul par minimalité de a. Il s'ensuit que b est un multiple de a.

• Si $\theta(a_0)$ et $\theta(b_0)$ ne sont pas colinéaires sur $\mathbf{Q}_p$, la correspondance f_{a_0,b_0} n'est pas nulle, et il résulte du lemme fondamental (cf. rem. 2.7), que $(u,v) \mapsto a_0u - b_0v$ est une surjection de $U_1 \times U_1$ sur $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$ dont le noyau V est un $\mathbf{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 2. Par ailleurs, il existe $(u_0, v_0) \in V$ tel que $a_0u_0 - b_0v_0 \neq 0$, sinon l'application $(u,v) \mapsto a_0u - b_0v$ se factoriserait à travers $(U_1 \times U_1)/V \cong \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$; et on aurait une injection d'Espaces de Banach de $t\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2\mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}} \cong \mathbb{V}^1$ dans $\mathbb{U}_{d+1} \subset \mathbb{B}^+_{\mathrm{dR}}$, ce qui n'est pas possible (prop 2.18). On a donc construit un élément $\frac{u_0}{t^d}a - \frac{v_0}{t^d}b$ de I, de degré $< d$, contrairement à l'hypothèse, et donc ce cas n'est pas possible.

Remarque 2.19. — Notons $P_d = t^{-d}U_d$ l'ensemble des éléments de degré $\leq d$ de $\mathbf{B}_e$. Soient $a, b \in \mathbf{B}_e$, premiers entre eux, de degrés n et m respectivement, et $g_{a,b}$ l'application $(x, y) \mapsto ax + by$. Alors $g_{a,b} : P_m \oplus P_n \to P_{n+m}$ est surjective de noyau $\mathbf{Q}_p \cdot (-b, a)$ (comme pour les polynômes), mais $g_{a,b} : P_{m-1} \oplus P_{n-1} \to P_{n+m-1}$ n'est pas surjective (contrairement au cas des polynômes). (Si $g_{a,b}(x, y) = 0$, alors b divise x, et donc $x = bu$ et $y = -au$, avec u de degré 0 dans le premier cas et -1 dans le second ; il s'ensuit que le noyau est $\mathbf{Q}_p \cdot (-b, a)$ dans le premier cas, et 0 dans le second. Pour étudier la surjectivité, on passe aux Espaces de Banach associés et on regarde les Dimensions : $\mathbb{P}_d$ est de Dimension $(d, 1)$.)

2.4. Les presque C-représentations. — Soient K une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ et $C = \mathbf{C}_p$. La théorie des presque C-représentations [**29**] de G_K a été développée par Fontaine dans son cours à l'IHP, pendant le semestre p-adique, en 1997, avec pour but une preuve de « fa $\Rightarrow$ a » selon les lignes esquissées au n° 2.3.1 (cf. rem. 2.27). Elle était conditionnelle au th. 2.25 ci-dessous, dont la preuve utilise la prop. 2.9, conséquence du lemme fondamental (th. 2.5). Elle présente de grandes similarités avec celle des Espaces de Banach de dimension finie, ce qui s'explique, *a posteriori*, par le fait que la catégorie des presque C-représentations se plonge dans celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Un joli [19] résultat à la base de la théorie est le suivant [**28**, prop. 6.2] ou [**34**] :

Théorème 2.20. — *Si $\lambda : C \to C$ est $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue, et commute à l'action de Galois, alors il existe $c \in K$ tel que $\lambda(x) = cx$, pour tout $x \in C$.*

Combiné avec la classification des C-représentations en termes de l'opérateur de Sen [**52**], ce résultat permet de prouver [**28**, th. 6.1] que beaucoup d'information est encodée dans l'action de G_K :

Théorème 2.21. — *Si W_1, W_2 sont deux C-représentations de G_K, toute application $\mathbf{Q}_p$-linéaire continue, G_K-équivariante, de W_1 dans W_2, est C-linéaire.*

Une *presque-C représentation* W est un $\mathbf{Q}_p$-banach muni d'une action continue de G_K tel qu'il existe une C-représentation W' de G_K (i.e. un C-espace de dimension finie, muni d'une action semi-linéaire de G_K) et $V' \subset W'$, $V \subset W$ des $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie stables par G_K, tels que $W/V \cong W'/V'$, en tant que représentations de $\mathscr{G}_K$. On a donc des suites exactes :

$$0 \to V' \to W' \to W'/V' \to 0, \quad 0 \to V \to W \to W'/V' \to 0,$$

de telle sorte que W est obtenu à partir de W' « en quotientant par V' et en rajoutant V ». Une telle description s'appelle une présentation de W.

19. Ce résultat est frappant car il devient archi-faux si on remplace C par $\overline{\mathbf{Q}}_p$.

Théorème 2.22. — ([**29**, th. 5.1])

(i) *Si W est une presque-C-représentation,*

$$\operatorname{Dim} W = (\dim W, \operatorname{ht} W), \quad \textit{avec } \dim W = \dim_C W' \textit{ et } \operatorname{ht}(W) = \dim_{\mathbf{Q}_p} V - \dim_{\mathbf{Q}_p} V',$$

ne dépend que de W et pas de la présentation.

(ii) *Si $f : W_1 \to W_2$ est un morphisme de presque-C-représentations, alors* $\operatorname{Ker} f$, $\operatorname{Im} f$ *et* $\operatorname{Coker} f$ *sont des presque-C-représentations, et :*

$$\operatorname{Dim} W_1 = \operatorname{Dim} \operatorname{Ker} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Im} f \quad \text{et} \quad \operatorname{Dim} W_2 = \operatorname{Dim} \operatorname{Coker} f + \operatorname{Dim} \operatorname{Im} f.$$

Exemple 2.23. — (i) $U = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p}$ est une presque-C-représentation de Dimension $(1,1)$ puisque $U/\mathbf{Q}_p t = C$.

(ii) $B_2 = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}/t^2$ est une presque-C-représentation de Dimension $(2,0)$: si $V = \mathbf{Q}_p t \oplus \mathbf{Q}_p a$, avec $a = \log[1 + p^\flat]$, alors V est une sous-$\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension 2 de U, et l'application $U \otimes V \to B_2$ envoyant $u \otimes v$ sur $uv \pmod{t^2}$ réalise B_2 comme le quotient de la presque-C-représentation $U \otimes V$, de Dimension $(2,2)$, par la $\mathbf{Q}_p$-représentation de dimension 2 engendrée par $t \otimes t$ et $t \otimes a - a \otimes t$.

Remarque 2.24. — (i) Que $\operatorname{ht}(W)$ ne dépende pas des choix peut se démontrer en utilisant les calculs de cohomologie galoisienne de Tate : les groupes $H^i(G_K, W)$ sont de dimension finie sur $\mathbf{Q}_p$, nuls si $i \geq 2$, et

$$\dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(G_K, W) - \dim_{\mathbf{Q}_p} H^1(G_K, W) + \dim_{\mathbf{Q}_p} H^2(G_K, W) = -[K : \mathbf{Q}_p]\operatorname{ht}(W).$$

Bizarrement, il est beaucoup plus difficile de prouver que $\dim W$ ne dépend pas du choix de la présentation.

(ii) De manière surprenante, on peut imposer à W' d'être la représentation triviale C^d dans la définition de presque C-représentation (cf. [**29**], corollaire du th. 5.13, p. 355), ce qui donne une définition complètement analogue à celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Théorème 2.25. — ([**29**, th. 4.1]) *Soit V une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K de dimension h, et soit E une extension de C par V. Soit $f : E \to C$, continue, G_K équivariant, telle que $f(E) \neq f(V)$. Alors f est surjective et* $\operatorname{Ker} f$ *est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K de dimension h.*

Démonstration. — Si V est une $\mathbf{Q}_p$-représentation de G_K, et si $\alpha \in (C \otimes V(-1))^{G_K}$, on peut considérer l'image inverse E_α de $C \cdot \alpha$ dans $U(-1) \otimes V$ qui vit dans la suite exacte $0 \to tV(-1) \to U \otimes V(-1) \to C \otimes V(-1) \to 0$. Alors E_α est une extension de C par $tV(-1) = V$, et *le point crucial est de prouver que toute extension de C par V est de ce type*; cela se fait par des calculs de dimensions de groupes de cohomologie galoisienne (ce qui impose de travailler avec une extension finie de $\mathbf{Q}_p$) du genre de ceux de la prop. 2.28 ci-dessous.

Maintenant, soit $\beta : V \to C$, un morphisme G_K-équivariant, i.e. $\beta \in (C \otimes V^*)^{G_K}$. Fixons une base $e_1, \ldots, e_h$ de V et notons $e_1^*, \ldots, e_h^*$ la base de V^* duale ; on peut écrire

β sous la forme $\beta_1 e_1^* + \cdots + \beta_h e_h^*$ et α sous la forme $\alpha_1 e_1(-1) + \cdots + \alpha_h e_h(-1)$, avec $\alpha_i, \beta_i \in C$. Alors $u = \sum_i (\beta_i e_i^* \otimes \alpha_i e_i) \in (C \otimes \mathrm{End}(V)(-1))^{G_K}$, et donc la trace de u appartient à $C(-1)^{G_K} = 0$; on en déduit que $\sum_i \beta_i \alpha_i = 0$. Ceci permet, en choisissant des relèvements $\hat{\beta}_i$ des β_i dans U, et en voyant E_α comme un sous-espace de $U \otimes V(-1)$ (c'est l'espace de $x_1 e_1 + \cdots + c_h e_h$ tels que $(\theta(x_1), \ldots, \theta(x_h)) \in C \cdot (\alpha_1, \ldots, \alpha_h)$), de définir $f_\beta : E_\alpha \to C$, par $f_\beta(\sum_{i=1} x_i e_i) = \theta\big(\frac{1}{t} \sum_i \hat{\beta}_i x_i\big)$. Alors la restriction de f_β à V n'est autre que β, et on a construit une section de $0 \to \mathrm{Hom}_{G_K}(C, C) \to \mathrm{Hom}_{G_K}(E_\alpha, C) \to \mathrm{Hom}_{G_K}(V, C)$. Tout morphisme G_K-équivariant de E_α dans C est donc de la forme étudiée dans la prop. 2.9. Le résultat s'en déduit. □

Remarque 2.26. — (i) Comme U est l'espace des C-points d'un Espace de Banach de Dimension finie, l'extension E_α construite dans la preuve du th. 2.25 est aussi l'espace des C-points d'un Espace de Banach de Dimension finie. Le fait que toute extension de C par une représentation finie est de la forme E_α implique que toute presque C-représentation peut « s'analytifier » : la catégorie des presque C-représentations peut se plonger dans celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

(ii) Soit $\mathscr{D}_K$ l'anneau des endomorphismes de la limite projective des C/V, où V décrit les sous-$\mathbf{Q}_p$-espaces de dimension finie et stables par G_K. Alors $\mathscr{D}_K$ est un corps et on a une suite exacte [20]

$$0 \to K \to \mathscr{D}_K \to (C \otimes C)^{G_K} \to K \to 0,$$

qui est la suite obtenue en prenant les G_K-invariants [21] de la suite du th. 2.8.

Remarque 2.27. — La catégorie des presque-C-représentations contient celle des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-*représentations* (i.e. des $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-modules de longueur finie, munis d'une action semi-lináire continue de G_K), cf. [**29**, th. 5.13]. Elle contient donc aussi celle des *presque* $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-*représentations*. En particulier, si D est un (φ, N)-module filtré sur K, les espaces $X_{\mathrm{st}}^r(D)$ et $X_{\mathrm{dR}}(D)$ introduits au n° 2.3.1 sont des presque-C-représentations dont la Dimension est la même que celle de l'Espace de Banach correspondant. On peut donc

20. Fontaine utilise $(C \otimes C_f)^{G_K}$ au lieu de $(C \otimes C)^{G_K}$, où C_f est la réunion de toutes les sous-représentations de dimension finie de G_K contenues dans C, mais les deux espaces sont égaux. En effet, soit $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i \otimes x_i \in (C \otimes C)^{G_K}$. Quitte à changer d'écriture, on peut supposer que les λ_i forment une base de $\mathscr{O}_C \cap (\mathbf{Q}_p \lambda_1 + \cdots + \mathbf{Q}_p \lambda_d)$, ce qui permet de complèter $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ en une base de Banach $(\lambda_j)_{j \geq 1}$ de C sur $\mathbf{Q}_p$. Alors tout élément de C (resp. de $C \widehat{\otimes} C$) peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $\sum_{i \geq 1} a_i \lambda_i$ (resp. $\sum_{i \geq 1} \lambda_i \otimes x_i$), avec $a_i \in \mathbf{Q}_p$, (resp. $x_i \in C$) et $a_i, x_i \to 0$ quand $i \to +\infty$. En particulier, on peut écrire $\sigma(\lambda_i)$ sous la forme $\sum_{j \geq 1} a_{j,i}^\sigma \lambda_j$ et $\sigma(z)$ sous la forme $\sum_{j \geq 1} \lambda_j \otimes \big(\sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma \sigma(x_i)\big)$. L'invariance de z par G_K entraîne alors que $x_j = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma \sigma(x_i)$, et donc $\sigma^{-1}(x_j) = \sum_{i=1}^n a_{i,j}^\sigma x_i$. On en déduit que le $\mathbf{Q}_p$-espace engendré par les x_i est stable par G_K, ce qui permet de conclure.

21. On peut munir $\mathscr{C}$ d'une action de G_K par la formule $f^\sigma = f^{\tilde{\sigma}} - f^{\tilde{\sigma}}(0)$, où $\tilde{\sigma}$ est n'importe quel relèvement de σ dans $\mathrm{Aut}_{\mathrm{cont}}(\widetilde{C\{T\}}/K\{X\})$: on a $\{f^{\tilde{\sigma}}(x)\} = \sigma(f(\{\sigma^{-1}(x)\}))$, ce qui permet de montrer que, si f est une correspondance analytique additive, alors f^σ aussi et que f^σ ne dépend pas du choix de $\tilde{\sigma}$.

prouver « fa $\Rightarrow$ a », via la théorie des presque-C-représentations, de la même manière que via celle des Espaces de Banach de Dimension finie.

Terminons ce paragraphe par un résultat général sur les extensions de presque C-représentations ; des cas particuliers de cet énoncé sont présents dans la preuve du th. 2.25.

Proposition 2.28. — (Fontaine) *Soient X, Y des presque C-représentations de G_K.*
(i) *Les* $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ *sont des* $\mathbf{Q}_p$*-espaces de dimension finie, nuls si* $i > 2$*, et*

$$\sum_{i=0}^{2} \dim_{\mathbf{Q}_p} \mathrm{Ext}^i(X,Y) = -[K:\mathbf{Q}_p]\mathrm{ht}(X)\,\mathrm{ht}(Y).$$

(ii) $\mathrm{Ext}^i(X,Y)$ *et* $\mathrm{Ext}^{2-i}(Y,X(1))$ *sont en dualité.*

Remarque 2.29. — Si X est une variété algébrique propre et lisse sur $\overline{K}$, les groupes de cohomologie syntomique $H^i_{\mathrm{Syn}}(X,r)$ de X sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie [**15, 47**]. Si X est définie sur K, alors ce sont en plus des presque-C-représentations.

2.5. Les (φ,Γ)-modules sur l'anneau de Robba. — L'équivalence de catégories de Fontaine [**25**] et le théorème de surconvergence [**9**] permettent de traduire les problèmes concernant les représentations de G_K en termes de (φ,Γ)-modules. Les démonstrations de « fa $\Rightarrow$ a » et « dR $\Rightarrow$ pst » obtenues par cette voie résultent d'une interaction entre les travaux de Berger [**3, 4, 5**] et de Kedlaya [**37, 38, 39**]. Juste après sa thèse, Berger [**3**] a réalisé que l'on pouvait utiliser les bonnes propriétés de l'anneau de Robba pour *modifier un* (φ,Γ)*-module en un nombre infini de points* et réduire « dR $\Rightarrow$ pst » à la conjecture de Crew [**16**] sur les équations différentielles p-adiques. Cela semble avoir donné l'impulsion nécessaire pour la preuve de cette conjecture puisque, peu après, trois preuves (par André [**1**], Mebkhout [**45**] et Kedlaya [**37**]) ont vu le jour (cf. [**11**] pour un résumé de ces travaux). Un des apports de Kedlaya est l'existence d'une filtration canonique sur un φ-module sur l'anneau de Robba.

Quelques années plus tard, Berger [**4**] a réalisé que sa technique de modification de (φ,Γ)-modules, mélangée avec les propriétés de la filtration de Kedlaya, permettait d'obtenir une preuve très élégante de « fa $\Rightarrow$ a ». Cette technique a été reprise par Kisin [**41**] dans le cadre des « modules de Breuil-Kisin » pour fabriquer encore une preuve de « fa $\Rightarrow$ a ». Kedlaya [**38, 39**] a ensuite rendu plus naturels un certain nombre des ingrédients précédents en interprétant, inspiré par un travail de Hartl et Pink [**35**], sa filtration comme une filtration de Harder-Narasimhan sur la catégorie des φ-modules sur l'anneau de Robba.

2.5.1. L'anneau de Robba. — Si I est un intervalle de $]0,+\infty]$, on note $\mathscr{E}^I$ l'anneau des fonctions holomorphes sur la couronne $C(I)=\{v_p(T)\in I\}$ (cette couronne est un disque fermé si $+\infty\in I$ et un disque épointé si $+\infty\notin I$ mais $\sup I=+\infty$), définies sur $\mathbf{Q}_p$.

Si $r\in]0,+\infty]$, et si $f=\sum_k a_kT^k\in\mathbf{Q}_p[T,T^{-1}]$, soit $v_r(f)=\inf_k v_p(a_k)+kr$. Alors v_r est une valuation d'algèbre sur $\mathbf{Q}_p[T,T^{-1}]$, multiplicative ($v_r(fg)=v_r(f)+v_r(g)$). Si J est un intervalle compact de $]0,+\infty]$, on note v_J la valuation $v_J=\inf_{r\in J}v_r$ (c'est une valuation d'algèbre, i.e. $v_r(fg)\geq v_r(f)+v_r(g)$, non multiplicative sauf si J est réduit à un point) ; on a aussi $v_J(f)=\sum_{z\in C(J)}v_p(f(z))$. Alors $\mathscr{E}^I$ est le complété de $\mathbf{Q}_p[T,T^{-1}]$ pour la famille de valuations v_J, où J parcourt l'ensemble des intervalles compacts de I. Il s'ensuit que $\mathscr{E}^I$ est une algèbre de Fréchet, et même une algèbre de Banach si I est compact.

La structure algébrique de ces algèbres a été identifiée par Lazard [**43**]. On appelle *diviseur sur* $C(I)$ une somme formelle $D=\sum_{x\in C(I)}n_x(x)$, avec $n_x\in\mathbf{N}$. On dit que D *est localement fini* si, pour tout intervalle compact $J\subset I$, la somme $\sum_{x\in C(J)}n_x$ est finie, et que D *est* $G_{\mathbf{Q}_p}$*-invariant* si $n_{\sigma(x)}=n_x$, pour tous $x\in C(I)$ et $\sigma\in G_{\mathbf{Q}_p}$.

Théorème 2.30. — *Soit I un intervalle de $]0,+\infty]$.*

(i) *$\mathscr{E}^I$ est un anneau de Bézout (et même principal si I est compact), et un idéal de $\mathscr{E}^I$ est fermé si et seulement si il est principal.*

(ii) *L'application qui, à un idéal fermé, associe le diviseur d'un de ses générateurs est une bijection de l'ensemble des idéaux fermés de $\mathscr{E}^I$ sur l'ensemble des diviseurs localement finis sur $C(I)$, qui sont $G_{\mathbf{Q}_p}$-invariants.*

Remarque 2.31. — (i) Un des ingrédients principaux des preuves de ces résultats est la théorie des polygones de Newton qui permet de localiser les zéros des fonctions holomorphes d'une variable.

(ii) On peut remplacer $\mathbf{Q}_p$ par un corps valué complet arbitraire L dans la définition des anneaux ci-dessus, et le résultat reste inchangé si I est compact ; par contre, si I n'est pas compact, le résultat n'est vrai que si L est sphériquement complet.

On définit *l'anneau de Robba* $\mathscr{R}$ comme la limite inductive

$$\mathscr{R}=\varinjlim_{r>0}\mathscr{E}^{]0,r]}$$

des $\mathscr{E}^{]0,r]}$, pour $r>0$. On peut le voir comme l'anneau des fonctions holomorphes sur la « couronne surconvergente » $C(]0,0])^\dagger=\varprojlim_{r>0}C(]0,r])$. C'est un anneau de Bézout, mais ses seuls idéaux fermés sont $\{0\}$ et $\mathscr{R}$.

2.5.2. Extensions de l'anneau de Robba. — Un élément x de $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p},\frac{1}{[p^\flat]}]$ s'écrit, de manière unique, sous la forme $x=\sum_{k\gg-\infty}p^k[x_k]$, avec $x_k\in(p^\flat)^{-N(x)}\mathscr{O}_{C^\flat}$. Si

$r > 0$, on pose alors

$$w_r\big(\sum_{k\gg-\infty} p^k[x_k]\big) = \inf_k(k + rv_{C^\flat}(x_k)),$$

ce qui définit une valuation d'algèbre, multiplicative ([**38**, lemme 2.1.7 et def. 2.1.8]).

Si $0 < r_1 \leq r_2$, on pose alors $w_{[r_1,r_2]}(x) = \inf_{s\in[r_1,r_2]} w_s(x)$, et $w_{[r_1,r_2]}$ est aussi une valuation d'algèbre sur $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$ (non multiplicative). Si I est un intervalle de $]0,+\infty[$, on note $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ le complété de $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$ pour la famille de valuations $w_{[r,s]}$, pour $[r,s] \subset I$. Alors $\widetilde{\mathbf{B}}^I$ est une algèbre de Fréchet (de Banach si I est compact).

Enfin, on note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ la limite inductive $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} = \varinjlim_{r>0} \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ des $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, pour $r > 0$. Alors l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$ du § 2.1 est l'adhérence de $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p}]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$.

Remarque 2.32. — (i) Comme $w_{s/p}(\varphi(x)) = w_r(s)$, le frobenius φ s'étend par continuité en des isomorphismes $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}^I \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}^{p^{-1}I}$ et $\varphi : \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$.

(ii) L'action de G_K sur $W(\mathscr{O}_{C^\flat})[\frac{1}{p}, \frac{1}{[p^\flat]}]$ est isométrique pour w_r, et s'étend donc par continuité à tous les anneaux ci-dessus ; l'action ainsi obtenue commute à φ.

(iii) On aurait envie de penser [22], par continuité, que tout élément z de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $z = \sum_{k\in\mathbf{Z}} p^k[x_k]$, avec $x_k \in C^\flat$ vérifiant des conditions de croissance convenables, mais c'est FAUX ! La vie aurait été plus facile si, par exemple, tout élément de $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p^2}$ avait eu une écriture unique sous la forme $\sum_{k\in\mathbf{Z}} p^{2k}[x^{p^{-k}}] + p^{2k+1}[y^{p^{-k}}]$, mais ce n'est pas le cas : l'Espace de Banach $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}})^{\varphi=p^2}$ est vraiment un diamant, et pas un espace analytique.

Proposition 2.33. — ([**3**, prop. 3.2]) *Si $x \in \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, et si les $\varphi^n(x)$, pour $x \in \mathbf{N}$, engendrent un K_0-espace de dimension finie, alors $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}$.*

Soit $\pi = [\varepsilon] - 1$. On note $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}$ (resp $\mathbf{B}^I_{\mathbf{Q}_p}$) l'adhérence de $\mathbf{Q}_p[\pi,\pi^{-1}]$ dans $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}^I$). Alors $f \mapsto f(\pi)$ induit un isomorphisme d'anneaux topologiques de $\mathscr{R}$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}$ (resp. $\mathscr{E}^I$ sur $\mathbf{B}^{I'}_{\mathbf{Q}_p}$, avec $I' = \frac{p}{p-1}I$, si $I \subset]0,1]$).

Si K est une extension finie de F, on note K_n le corps $K(\zeta_{p^n})$, et $K_\infty = \cup_{n\in\mathbf{N}} K_n$ l'extension cyclotomique de K. On note $\chi : G_F \to \mathbf{Z}_p^*$ le caractère cyclotomique. Si K est une extension finie de F, on note $H_K \subset G_K$ le noyau de χ et $\Gamma_K = G_K/H_K$, et donc $H_K = \mathrm{Gal}(\overline{F}/K_\infty)$ et $\Gamma_K = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$.

On note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ les anneaux $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}})^{H_K}$ et $(\widetilde{\mathbf{B}}^I)^{H_K}$. Alors il existe $r(K) > 0$ tel que, si $I \subset]0, r(K)]$, alors $\widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ contient une unique extension étale $\mathbf{B}^I_K$ de $\mathbf{B}^I_{\mathbf{Q}_p}$ telle que l'application naturelle $\widetilde{\mathbf{B}}^I_{\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{B}^I_{\mathbf{Q}_p}} \mathbf{B}^I_K \to \widetilde{\mathbf{B}}^I_K$ soit un isomorphisme. On pose $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} = \varinjlim_{r\leq r(K)} \mathbf{B}^{]0,r]}_K$; alors $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}} \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$.

22. Je suis tombé dans ce piège, et ne suis pas le seul...

Théorème 2.34. — (i) *Si* $0 < r \leq s$ (*resp.* $0 < r < s \leq r(K)$), *les anneaux* $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{[s,r]}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}^{[s,r]}$ (*resp.* $\mathbf{B}_K^{[s,r]}$) *sont principaux.*

(ii) $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ *et, si* $r \leq r(K)$, $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$, *sont de Bézout, et un idéal est fermé si et seulement si il est principal.*

(iii) $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ *et* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ *sont de Bézout.*

Les cas de $\mathbf{B}_K^{[r,s]}$, $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ découlent du th. 2.30 car ces anneaux sont du même type que l'anneau correspondant pour $K = \mathbf{Q}_p$. le reste de l'énoncé est dû [23] à Kedlaya [**37**, th. 3.20] ou [**38**, prop. 2.6.8, th. 2.9.6].

Terminons ce numéro par un résultat fort utile sur les modules de rang fini ([**32**] pour $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ et [**38**, § 2.8] pour $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$).

Théorème 2.35. — *Soit* $R = \mathbf{B}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, *et soit* M *un* R*-module libre de rang* d. *Un sous-*R*-module de* M *est libre si et seulement si il est fermé, et alors son rang est* $\leq d$.

2.5.3. Le théorème de Dieudonné-Manin et ses variantes. — Rappelons l'énoncé du classique théorème de Dieudonné-Manin ($\breve{\mathbf{Q}}_p = W(\overline{\mathbf{F}}_p)[\frac{1}{p}]$) :

Proposition 2.36. — *Un* φ*-module* M *sur* $\breve{\mathbf{Q}}_p$ *admet une décomposition canonique*

$$M \cong \oplus_{\lambda \in \mathbf{Q}} \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)^{m_\lambda},$$

où, si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, *on note* $\breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)$ *le* φ*-module sur* $\breve{\mathbf{Q}}_p$ *de base* $e_1, \ldots, e_h$, *avec* $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ *si* $i \leq h-1$, *et* $\varphi(e_h) = \pi^d e_1$.

Un φ-module M sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ est un $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$-module libre de rang fini muni d'un frobenius semi-linéaire et bijectif φ. Si $\lambda \in \mathbf{Q}$, on note $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)$ le φ-module $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)$.

Théorème 2.37. — ([**37**, th. 4.16], [**38**, th. 4.5.7]) *Si* M *est un* φ*-module sur* $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, *alors* M *admet une décomposition*

$$M \cong \oplus_{\lambda \in \mathbf{Q}} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)^{m_\lambda}.$$

Les λ pour lesquels $m_\lambda \neq 0$ sont *les pentes de frobenius de* M ; si $\lambda = \frac{d}{h}$, la multiplicité de λ comme pente est hm_λ. On dit que M est *isocline* s'il n'a qu'une pente et *étale* s'il est isocline de pente 0.

Remarque 2.38. — (i) La décomposition ci-dessus n'est pas canonique, contrairement au cas classique ; ce qui est canonique est la filtration croissante par les $M_\mu = \oplus_{\lambda \geq \mu} \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}(\lambda)^{m_\lambda}$.

(ii) Soit $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger \subset \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ le sous-anneau des éléments bornés de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$: c'est l'intersection de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ et de $W(C^\flat)[\frac{1}{p}]$, ce qui permet de munir $\widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$ de la valuation v_p existant sur

23. (K_∞ est perfectoïde, et les anneaux $\widetilde{\mathbf{B}}_K^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$, $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ et $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ correspondent aux anneaux $\Gamma_{\mathrm{an},r}^{K_\infty^\flat}$, $\Gamma_{\mathrm{an},r}^{C^\flat}$, $\Gamma_{\mathrm{an,con}}^{K_\infty^\flat}$ et $\Gamma_{\mathrm{an,con}}^{C^\flat}$ de Kedlaya).

$W(C^b)[\frac{1}{p}]$, et on a $v_p(\varphi(x)) = v_p(x)$, pour tout $x \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$. Par ailleurs, $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}})^* = (\mathbf{B}^\dagger)^*$. Il en résulte que, si M est un φ-module de rang 1 sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$, et si e est une base de M, alors $\varphi(e) = \lambda e$, avec $\lambda \in \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$, et $v_p(\lambda)$ ne dépend pas du choix de e ; on note $\deg M$ cette quantité. Si M est de rang d, alors $\wedge^d M$ est de rang 1, et on définit *le degré* $\deg M$ de M par $\deg M = \deg(\wedge^d M)$. Munie des fonctions rang et degré, la catégorie des φ-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}$ a une structure de catégorie de Harder-Narasimhan, et la filtration du (i) n'est autre que la filtration de Harder-Narasimhan [**38, 39**].

La canonicité de la filtration de Harder-Narasimhan a la conséquence suivante ([**37**, th, 6.10], [**38**, th. 6.4.1] ou [**39**, th.1.7.1]) pour un φ-module Δ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ (les pentes de Δ sont celles de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta$, et $\mathbf{B}_K^\dagger = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \cap \widetilde{\mathbf{B}}^\dagger$).

Théorème 2.39. — *Si Δ est un φ-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, alors Δ admet une unique filtration $0 = \Delta_0 \subset \Delta_1 \subset \cdots \subset \Delta_r = \Delta$ par des sous-φ-modules saturés, telle que :*

- *Si $1 \leq i \leq r$, alors Δ_i/Δ_{i-1} est isocline.*
- *Si λ_i est la pente de Δ_i/Δ_{i-1}, alors $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_r$.*

De plus, Δ_i/Δ_{i-1} admet un unique sous-$\mathbf{B}_K^\dagger$-module D_i, stable par φ, tel que $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_i \cong \Delta_i/\Delta_{i-1}$.

Remarque 2.40. — Si Δ est un (φ, Γ)-module, alors tous les objets du th. 2.39 sont stables par Γ (par unicité).

2.5.4. Représentations de G_K et (φ, Γ)-modules. — Comme $\varphi(\pi) = (1+\pi)^p - 1$ et $\sigma_a(\pi) = (1+\pi)^a - 1$, les anneaux $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},\mathbf{Q}_p}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ sont stables par φ et G_K (qui agit à travers Γ_K).

Théorème 2.41. — (i) *Si Δ est un (φ, Γ)-module étale sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ (resp. $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$), alors $V(\Delta) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta)^{\varphi=1}$ (resp. $V(\Delta) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}} \Delta)^{\varphi=1}$) est une représentation de G_K, de dimension le rang de Δ.*

(ii) *Si V est une représentation de G_K, alors $\widetilde{\Delta}(V) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes V)^{H_K}$ est un (φ, Γ)-module sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$, de rang $\dim V$, et $\widetilde{\Delta}(V)$ contient un unique sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module $\Delta(V)$, stable par φ et Γ, tel que $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta(V) \to \widetilde{\Delta}(V)$ soit un isomorphisme.*

(iii) *Les foncteurs $V \mapsto \Delta(V)$ et $\Delta \mapsto V(\Delta)$ (resp. $V \mapsto \widetilde{\Delta}(V)$ et $\Delta \mapsto V(\Delta)$) sont inverses l'un de l'autre, et induisent des équivalences de catégories :*

$$\begin{aligned}\{\text{représentations de } G_K\} &\cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales sur } \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}\}\\ &\cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules étales sur } \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}\}\end{aligned}$$

Ce théorème se démontre en combinant l'équivalence de catégories de Fontaine [**25**], le théorème de surconvergence de [**9**] (ou [**8**]) et le th. 2.39 ci-dessus.

2.5.5. Localisation. — Soit

$$\omega = \frac{\pi}{\varphi^{-1}(\pi)} = 1 + [\varepsilon^{1/p}] + \cdots + [\varepsilon^{1/p}]^{p-1}.$$

Alors ω est un générateur de $\ker\theta$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, et comme φ est bijectif sur $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, on a $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/(\varphi^n(\omega)) \cong \mathscr{O}_C$, pour tout $n \in \mathbf{N}$, et le complété du localisé de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}[\frac{1}{p}]$ en $\varphi^n(\omega)$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$, pour tout n. On en déduit que, si $p^{-n} \leq r$, le complété du localisé de $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$ en $\varphi^n(\omega)$ est isomorphe à $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ (si $p^{-n} > r$, alors $\varphi^n(\omega)$ est inversible dans $\widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]}$). On note $\iota_n : \widetilde{\mathbf{B}}^{]0,r]} \to \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ la localisation en $\varphi^n(\omega)$. Alors ι_n commute à G_K et $\iota_{n+1}(\varphi(x)) = \iota_n(x)$.

On a $\iota_n(\pi) = \zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1$. On en déduit que $\iota_n(\mathbf{B}_K^{]0,r]}) \subset K_n[[t]]$, si $p^{-n} \leq r \leq r(K)$.

Si Δ est un (φ, Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, alors Δ est la limite inductive de sous $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-modules $\Delta^{]0,r]}$, pour $0 < r \leq r(\Delta)$, vérifiant les propriétés suivantes :

- $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta^{]0,r]} \to \Delta^{]0,r]}$ est un isomorphisme ;
- $\Delta^{]0,r]}$ est stable par Γ et $\mathbf{B}_K^{]0,r/p]} \otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})} \varphi(\Delta^{]0,r]}) \xrightarrow{\sim} \Delta^{]0,r/p]}$.

Si $n \in \mathbf{N}$, on pose $r_n = v_p(\zeta_{p^n} - 1) = \frac{1}{(p-1)p^{n-1}}$ et, si $r_n \leq r(\Delta)$, on note $\Delta_{\mathrm{dif},n}^+$ le complété $K_n[[t]] \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r_n]}} \Delta^{]0,r_n]}$ du localisé de $\Delta^{]0,r_n]}$ en $\varphi^n(\omega)$, et $\iota_n : \Delta^{]0,r_n]} \to \Delta_{\mathrm{dif},n}^+$ la localisation.

2.5.6. (φ, N)-modules filtrés et (φ, Γ)-modules. — On note $\mathbf{B}_{\log,K}$ l'anneau de polynômes $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}[\log\pi]$, que l'on munit d'actions de φ et Γ_K en posant

$$\varphi(\log\pi) = p\log\pi + \log\tfrac{\varphi(\pi)}{\pi^p} \quad \text{et} \quad \gamma(\log\pi) = \log\pi + \log\tfrac{\gamma(\pi)}{\pi},$$

et d'une dérivation $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-linéaire N, définie par $N(\log\pi) = \frac{-p}{p-1}$. On a $\iota_n(\log\pi) = \log(\zeta_{p^n} e^{t/p^n} - 1)$, et donc $\iota_n(\mathbf{B}_{\log,K}) \subset K_n[[t]]$.

Soit $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \mathbf{B}_{\log,K} = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\log\pi]$; alors $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}$ contient

$$\log[p^\flat] = \tfrac{p}{p-1}\big(\log\pi + \log\big([(p^\flat)^{(p-1)/p}]/\pi\big)\big),$$

et donc aussi l'anneau $\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+[\log[p^\flat]]$ du n° 2.1.1 (actions de φ, N et G_K comprises).

Si D est un (φ, N)-module, de rang h sur K_0, on définit un (φ, Γ)-module $\Delta(D)$ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, par

$$\Delta_0(D) = (\mathbf{B}_{\log,K} \otimes_{K_0} D)^{N=0}.$$

Si D est un (φ, N)-module filtré sur K, et si $r \leq r(K)$, on définit les $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-modules

$$\Delta_0^{]0,r]}(D) = (\mathbf{B}_K^{]0,r]}[\log\pi] \otimes_{K_0} D)^{N=0}$$
$$\Delta^{]0,r]}(D) = \{z \in \Delta_0^{]0,r]}(D)[\tfrac{1}{t}],\ \iota_n(z) \in \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K),\ \forall n \geq n(r)\}$$

Théorème 2.42. — (i) *Le $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module*

$$\Delta(D) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta^{]0,r]}(D)$$

ne dépend pas du choix de r, et est un (φ,Γ)-module de rang h sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$.

(ii) *Le foncteur $D \mapsto \Delta(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, qui respecte les filtrations de Harder-Narasimhan.*

Remarque 2.43. — (i) Le (i) correspond au th. II.1.6 de [**4**] et le (ii) correspond aux th. II.2.6 et IV.2.1 de [**4**].

(ii) Il résulte du (ii) de ce théorème que D est faiblement admissible si et seulement si $\Delta(D)$ est étale. La conjecture « fa $\Rightarrow$ a » s'en déduit en remarquant que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}} \otimes \Delta(D))^{\varphi=1}$, et en utilisant le th. 2.41.

Démonstration. — Commençons par remarquer que, comme N est nilpotent, on a $\Delta_0^{]0,r]}(D) \cong \mathbf{B}_K^{]0,r]} \otimes_{K_0} D$, en tant que $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module (et même en tant que φ-module sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$), l'isomorphisme réciproque étant donné par la formule $a \otimes x \mapsto \sum_{i\geq 0}(\frac{p-1}{p}\log\pi)^i a \otimes \frac{N^i x}{i!}$. En particulier, $\Delta_0^{]0,r]}(D)$ est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang h.

Quitte à tordre D, on peut supposer que $D_K^i = 0$ si $i > 0$, auquel cas $\mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K) \subset K_n[[t]] \otimes_K D_K$. Le « théorème des restes chinois » pour les modules de type fini sur $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$ fournit la suite exacte :

$$0 \to \Delta^{]0,r]}(D) \to \Delta_0^{]0,r]}(D) \to \prod_{n\geq n(r)} (K_n[[t]] \otimes_K D_K)/\mathrm{Fil}^0 \to 0.$$

(La suite est exacte à gauche par définition de $\Delta^{]0,r]}(D)$ et à droite par le théorème des restes chinois.) En particulier, $\Delta^{]0,r]}(D)$ est un sous-$\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module fermé de $\Delta_0^{]0,r]}(D)$ qui contient $t^N\Delta_0^{]0,r]}(D)$ si $D_K^{-N} = D_K$. Il en résulte, grâce au th. 2.35, que $\Delta^{]0,r]}(D)$ est un $\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de rang h.

Maintenant, $\Delta_0(D) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K} \otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} \Delta_0^{]0,r]}(D) = (\mathbf{B}_{\log,K} \otimes_{K_0} D)^{N=0}$ est un (φ,Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ qui ne dépend pas de r ; on en déduit l'indépendance de $\Delta(D)$ et ce qui précède montre que $\Delta(D)$ est un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$-module de rang h de $\Delta_0(D)$. De plus, $\Delta(D)$ est stable par Γ_K puisque ι_n commute à Γ_K, et on déduit de ce que $\iota_{n+1}(\varphi(x)) = \iota_n(x)$ et de la suite exacte ci-dessus que $\mathbf{B}_K^{]0,r/p]} \otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})} \varphi(\Delta^{]0,r]}(D)) \to \Delta^{]0,r/p]}(D)$ est un isomorphisme. Il s'ensuit que $\Delta(D)$ est un sous-(φ,Γ)-module de rang h de $\Delta_0(D)$, ce qui prouve le (i).

Pour prouver que $D \mapsto \Delta(D)$ est un $\otimes$-foncteur exact, on utilise intensivement la suite exacte ci-dessus et le fait que $D \mapsto \mathrm{Fil}^0(K_n((t)) \otimes_K D_K)$ est un $\otimes$-foncteur exact.

Enfin, pour montrer que $D \mapsto \Delta(D)$ respecte les filtrations de Harder-Narasimhan, il suffit de vérifier que :

• Tout sous-(φ,Γ)-module Δ', facteur direct de $\Delta(D)$, est de la forme $\Delta(D')$, avec D' sous-(φ,N)-module de D : de fait, on a $D' = (\mathbf{B}_{\log,K}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} \Delta')^{\Gamma_K}$.

• $\deg(\Delta(D)) = \deg(D)$, ce qui est immédiat si D est de rang 1, et le cas général s'en déduit car $\deg(D) = \deg(\det D)$ et $\deg(\Delta) = \deg(\det \Delta)$. □

2.5.7. La conjecture « dR ⇒ pst ». — Si V est une représentation de G_K, et si $\Delta(V)$ est le (φ,Γ)-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ associé, l'opérateur $\frac{\gamma-1}{\chi(\gamma)-1}$ a une limite ∇, quand $\gamma\to 1$, et ∇ est une connexion sur $\Delta(V)$, l'action de ∇ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ étant donnée par $\nabla = t\partial$, où $\partial = (1+\pi)\frac{d}{d\pi}$ (cf. [**3**, § 5.1]).

Supposons maintenant que V est de de Rham, de dimension d, et que les poids de Hodge-Tate de V sont ≤ 0 (on peut se ramner à ce cas en tordant par une puissance convenable du caractère cyclotomique), de telle sorte que $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)\subset \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+\otimes V$, et $K_n[[t]]\otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ est un sous-$K_n[[t]]$-réseau de $\Delta^+_{\mathrm{dif},n}$, si $r_n\leq r(\Delta)$. Ceci permet de définir un modifié $N^{]0,r]}$ de $\Delta^{]0,r]}$ en les $\varphi^n(\omega)$ en posant :

$$N^{]0,r]} = \{z\in\Delta^{]0,r]},\ \iota_n(z)\in K_n[[t]]\otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V),\ \forall n\geq n(r)\}.$$

Alors $N^{]0,r]}$ est un sous-$\mathbf{B}_K^{]0,r]}$-module de $\Delta^{]0,r]}$, stable par Γ et ∇ ; de plus il est de rang d car fermé et contenant $t^N\Delta^{]0,r]}$, si $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V) = \mathrm{Fil}^{-N}\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$.

Le théorème des restes chinois fournit une suite exacte

$$0\to N^{]0,r]}\to \Delta^{]0,r]}\to \prod_{n\geq n(r)} \Delta^+_{\mathrm{dif},n}/(K_n[[t]]\otimes_K \mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V))\to 0,$$

dont on déduit que $\nabla(N^{]0,r]})\subset tN^{]0,r]}$ car $\nabla=0$ sur $\mathbf{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ et $\nabla = t\frac{d}{dt}$ sur $K_n[[t]]$, et, comme ci-dessus, que $N^{]0,r/p]} = \mathbf{B}_K^{]0,r/p]}\otimes_{\varphi(\mathbf{B}_K^{]0,r]})}\varphi(N^{]0,r]})$. Il s'ensuit que $N(V) = \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}\otimes_{\mathbf{B}_K^{]0,r]}} N^{]0,r]}$ est un φ-module sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, et comme $\partial\circ\varphi = p\,\varphi\circ\partial$ la filtration de Kedlaya $0=\Delta_0\subset\Delta_1\subset\cdots\subset\Delta_r=\Delta$ est stable par ∂, ainsi que les $\mathbf{B}_K^\dagger$-modules D_i du th. 2.39. Il resulte alors du théorème de Tsuzuki [**55**] rappelé ci-dessous (th. 2.44), qu'il existe une extension finie L de K telle que la connexion ∂ devienne triviale sur $\mathbf{B}_L^\dagger\otimes_{\mathbf{B}_K^\dagger} D_i$, et donc aussi sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},L}\otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}}(\Delta_i/\Delta_{i-1})$. On en déduit que ∂ est triviale sur $\mathbf{B}_{\log,L}\otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}}\Delta$, car $\partial:\mathbf{B}_{\log,L}\to\mathbf{B}_{\log,L}$ est surjective. L'action de Γ_L sur $(\mathbf{B}_{\log,L}\otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}}\Delta)^{\partial=0}$ est alors localement constante puisque son action infinitésimale est nulle ; il existe donc n tel que Γ_{L_n} agisse trivialement, ce qui implique que $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}\otimes V)^{G_{L_n}}$ est de dimension d sur $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log})^{G_{L_n}}$, puis, en utilisant la prop. 2.33, que $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+\otimes V)^{G_{L_n}}$ est de dimension d sur $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\log})^{G_{L_n}}$ et donc que V est semi-stable comme représentation de G_{L_n}. Ceci termine la preuve de « dR ⇒ pst ».

Théorème 2.44. — *Si D est un (φ,∂)-module étale sur $\mathbf{B}_K^\dagger$, il existe une extension finie L de K telle que ∂ soit triviale sur $\mathbf{B}_L^\dagger\otimes D$.*

Remarque 2.45. — La représentation V ne joue pas vraiment de rôle dans ce qui précède, et le résultat s'étend [**4**, th. III.2.4] aux (φ,Γ)-modules Δ non nécessairement étales : la condition « V de Rham » étant remplacée par « $(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}\otimes_{K_n[[t]]}\Delta^+_{\mathrm{dif},n})^{G_K}$ de dimension $\mathrm{rg}\,\Delta$ sur K ».

2.5.8. Les B-paires. — Berger [**5**] définit une B-paire comme la donnée de :

- un $\mathbf{B}_e$-module libre M_e, de rang fini, avec action semi-linéaire continue de G_K,
- un sous $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau M_{dR}^+ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e$, stable par G_K.

Nous appellerons (G_K, B)-*paire* un tel objet pour insister sur l'existence d'une action de G_K, et *une B-paire* sera juste la donnée de :

- un $\mathbf{B}_e$-module libre de rang fini M_e,
- un sous $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$-réseau M_{dR}^+ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_{\mathbf{B}_e} M_e$.

Exemple 2.46. — On peut associer à une $\mathbf{Q}_p$-représentation V de G_K, un (φ, N)-module filtré D sur K ou un (φ, Γ)-module Δ sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$, des (G_K, B)-paires $M(V)$, $M(D)$ ou $M(\Delta)$, en posant :

$$M(V) = (M_e(V), M_{\mathrm{dR}}^+(V)) = (\mathbf{B}_{\mathrm{cris}}^{\varphi=1} \otimes V, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes V)$$
$$M(D) = (M_e(D), M_{\mathrm{dR}}^+(D)) = ((\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[\tfrac{1}{t}] \otimes D)^{N=0,\varphi=1}, \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}} \otimes_K D_K))$$
$$M(\Delta) = (M_e(\Delta), M_{\mathrm{dR}}^+(\Delta)) = \big((\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\tfrac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}} D)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{K_n[[t]]} \iota_n(\Delta^{]0,r_n]})\big)$$

On a $V = M_e(V) \cap M_{\mathrm{dR}}^+(V)$, ce qui prouve que $V \mapsto M(V)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des représentations de G_K sur une sous-catégorie de celle des (G_K, B)-paires.

Théorème 2.47. — ([**5**, th. 2.2.7]) *Le foncteur $\Delta \mapsto M(\Delta)$ est une équivalence de catégories de la catégorie des (φ, Γ)-modules sur $\mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}$ sur celle des (G_K, B)-paires.*

3. Les courbes X_E, Y_E et les espaces analytiques associés

Il se trouve que comprendre les idéaux de $\mathbf{B}_e$ demande de commencer par comprendre ceux de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$. Comme $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}/([p^\flat] - p) = \mathscr{O}_C$, et comme $([p^\flat] - p)^n \to 0$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ quand $n \to +\infty$, relever une base de Banach de $\mathscr{O}_C$ sur $\mathbf{Z}_p$ dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ fournit un scindage $s : \mathscr{O}_C \to \mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ de la projection $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$, et permet d'écrire tout élément de $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$, de manière unique, sous la forme $\sum_{n \in \mathbf{N}} s(a_n)([p^\flat] - p)^n$. Ceci fait que $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ ressemble beaucoup à $\mathscr{O}_C[[T]]$.

Cette ressemblance est utile pour beaucoup de questions (par exemple pour démontrer la convergence de séries dans $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$), mais n'est pas assez fidèle pour comprendre l'arithmétique dans $\mathbf{A}_{\mathrm{inf}}$ en particulier pour déterminer ses idéaux premiers. La clé pour résoudre ce genre de questions est de prendre vraiment au sérieux l'analogie avec le cas d'égale caractéristique, et de considérer p comme une variable (par exemple, si on fait du 3-adique, il faut considérer 3 comme une variable !), ce qui demande d'écrire, comme dans [**38**], un vecteur de Witt sous la forme $\sum_{i \in \mathbf{N}} [x_i] p^i$ au lieu de la forme standard $\sum_{i \in I} p^i [x_i]$.

3.1. L'anneau A_E. — Soit E une extension finie de $\mathbf{Q}_p$ contenue dans C. On note $\mathscr{O}_E$ l'anneau de ses entiers, k_E son corps résiduel, et on choisit une uniformisante

π. Soit $q = p^f$ le cardinal de k_E (et donc $k_E = \mathbf{F}_q$). Soit $\breve{E} = E \otimes_{W(k_E)} W(k_C)$, l'extension maximale non ramifiée de E dans C. Soit

$$A_E = \mathscr{O}_E \otimes_{W(k_E)} \mathbf{A}_{\inf}.$$

C'est un anneau local d'idéal maximal $\mathrm{Ker}(A_E \to \mathscr{O}_{C^\flat} \to k_{C^\flat})$, séparé et complet pour la topologie $(\pi, [\pi^\flat])$-adique. On note φ_E l'automorphisme $1 \otimes \varphi^f$ de A_E. Tout élément de A_E peut s'écrire, de manière unique, sous la forme $x = \sum_{k\in\mathbf{N}} [x_k]\pi^k$, où les x_k sont des éléments arbitraires de $C^\flat$, et on a $\varphi_E(\sum_{k\in\mathbf{N}} [x_k]\pi^k) = \sum_{k\in\mathbf{N}} [x_k^q]\pi^k$.

3.1.1. Idéaux premiers de A_E.— L'écriture ci-dessus fait ressembler A_E à l'anneau $\mathscr{O}_C[[T]]$, où l'on a pris comme variable T l'uniformisante π. Par analogie, on définit le *polygone de Newton* NP_x de $x = \sum_{k\in\mathbf{N}} [x_k]\pi^k$ comme la plus grande fonction convexe $f : \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}_+ \cup \{+\infty\}$ telle que $f(k) \leq \inf_{i\leq k} v_{C^\flat}(x_i)$, pour tout $k \in \mathbf{N}$. Alors NP_x est une fonction convexe décroissante, linéaire par morceaux, et on dit que $\lambda < 0$ est *une pente de* NP_x s'il existe un intervalle sur lequel la dérivée de NP_x est λ ; la multiplicité de λ est alors la longueur de cet intervalle (c'est un entier). Le polygone de Newton de x peut fort bien comporter une infinité de pentes ; c'est le cas par exemple de $x = \sum [a^{q^{-k}}]\pi^k$, si $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$.

Le résultat suivant [**FF**, th. 2.4.6 et n° 1.5.2] est crucial pour l'étude des zéros des éléments de A_E.

Théorème 3.1. — (i) *Si* NP_x *est constant, alors x est inversible dans* $A_E[\frac{1}{[\pi^\flat]}]$.

(ii) *Si λ est une pente de* NP_x*, de multiplicité d, il existe $a_1, \ldots, a_d \in \mathscr{O}_{C^\flat}$ vérifiant $v_{C^\flat}(a_i) = -\lambda v_p(\pi)$ tels que $x = (\pi - [a_1]) \cdots (\pi - [a_d])y$ avec $y \in A_E$. De plus,* NP_y *est obtenu en enlevant*[24] *de* NP_x *le segment de pente λ.*

Remarque 3.2. — Dans l'énoncé analogue sur $\mathscr{O}_C[[T]]$, les a_i sont uniquement déterminés ; ce n'est pas le cas ici. Par exemple, l'idéal $\mathrm{Ker}\,\theta$ est engendré par $\pi - [\pi^\flat]$ pour n'importe quel choix de $\pi^\flat$. Il est un peu difficile d'expliciter la relation d'équivalence $a \sim b$ exprimant l'égalité des idéaux $(\pi - [a])$ et $(\pi - [b])$; cela revient à décrire[25] ε à partir de $\pi^\flat$.

Corollaire 3.3. — *Les idéaux premiers fermés*[26] *de A_E sont :*

- (0)*, de corps résiduel* $\mathrm{Fr}(A_E)$*,*
- *l'idéal maximal, de corps résiduel $k_{C^\flat} = k_C$,*
- (π)*, de corps résiduel $C^\flat$,*

24. $\mathrm{NP}_y(t) = \mathrm{NP}_x(t)$ si $t \gg 0$, et les pentes de NP_y sont celles de NP_x (avec les mêmes multiplicités) privées de λ.

25. On peut obtenir une description en utilisant le corps des normes de l'extension $E(\mu_{p^\infty}, \pi^{1/p^\infty})$: si ϖ en est une uniformisante, il existe des séries $P, Q \in \mathbf{F}_q[[X^{p^{-\infty}}]]$ telles que $\pi^\flat = P(\varpi)$ et $\varepsilon = Q(\varpi)$. Il n'est pas sûr qu'expliciter P et Q soit très utile (ou même faisable...).

26. Si on n'impose pas aux idéaux d'être fermés, le lemme de Zorn permet de fabriquer des idéaux maximaux exotiques à partir d'éléments dont le polygone de Newton comporte une infinité de pentes.

• $(\pi - [a])$, *pour* $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat} - \{0\}$ *à équivalence près, de corps résiduel* C_a *algébriquement clos de caractéristique* 0, *complet pour* v_p, *et tel que* $C_a^\flat \cong C^\flat$,

• $W(\mathfrak{m}_{C^\flat})$, *noté* $([\pi^\flat])$, *de corps résiduel* $\breve{E}$.

(Tout résulte facilement du th. 3.1, à part le fait que C_a est algébriquement clos [**FF**, prop. 2.2.19] ou [**53**, prop. 3.8].)

3.1.2. L'ensemble $|Y_E|$. — Les idéaux π et $[\pi^\flat]$ sont clairement de vilains petits canards, et on définit [27] $|Y_E|$ comme l'ensemble des idéaux fermés, non triviaux, de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$. On note $\infty \in |Y_E|$ l'idéal $\operatorname{Ker}\theta_E$, où $\theta_E = \mathrm{id} \otimes \theta : \mathscr{O}_E \otimes_{W(k_E)} \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$.

Si $y \in |Y_E|$ (et donc y est de la forme $(\pi - [a])$), et si $K_y = A_E[\frac{1}{p}]/(\pi - [a]) = C_a$ est son corps résiduel, alors K_y contient E, et l'isomorphisme $\mathscr{O}_{K_y}/\pi \cong \mathscr{O}_{C^\flat}/a$ se prolonge, de manière unique, en un isomorphisme ι_y de $K_y^\flat$ sur $C^\flat$; autrement dit, (K_y, ι_y) est *un* E*-débasculé* [28] (untilt) de $C^\flat$. Réciproquement, si $(K, \iota : K^\flat \cong C^\flat)$ est un E-débasculé de $C^\flat$, on peut lui associer l'idéal $(\pi - [\iota(\pi^\flat)])$ de A_E. On en déduit le résultat suivant [**FF**, cor. 2.2.22 et 2.2.23].

Proposition 3.4. — $|Y_E|$ *est l'ensemble des* E*-débasculés de* $C^\flat$.

On peut donner une description agréable de $|Y_E|$ en utilisant la théorie de Lubin-Tate. Soit donc $\oplus$ une loi de groupe formel de Lubin-Tate associée [29] à (E, π) On dispose alors, pour tout $\alpha \in \mathscr{O}_E$, de $\sigma_\alpha \in \alpha T + T^2\mathscr{O}_E[[T]]$ telle que $\sigma_\alpha(X \oplus Y) = \sigma_\alpha(X) \oplus \sigma_\alpha(Y)$, et on a $\sigma_\pi \equiv X^q$ modulo π. Ceci munit $\mathfrak{m}_{C^\flat}$ d'une action de $\mathscr{O}_E$, que l'on prolonge en une action de E par $\sigma_{\alpha/\pi^n}(x) = \sigma_\alpha(x^{q^{-n}})$.

Théorème 3.5. — ([**FF**, prop. 2.3.9]) *Soit* $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$.

(i) $[x]_\pi = \lim_{n\to+\infty} \sigma_{\pi^n}([x^{q^{-n}}])$ *est l'unique relèvement de* x *dans* A_E *tel que* $\varphi_E([x]_\pi) = \sigma_\pi([x])$.

(ii) *Si* $\alpha \in E$, *alors* $\sigma_\alpha([x]_\pi) = [\sigma_\alpha(x)]_\pi$.

(iii) $x \mapsto \xi_x = [x]_\pi/[x^{1/q}]_\pi$ *induit une bijection de* $(\mathfrak{m}_{C^\flat} - \{0\})/\mathscr{O}_E^*$ *sur* $|Y_E|$.

Remarque 3.6. — $\mathfrak{m}_{D^\flat}$ est, par construction, l'ensemble des points classiques de la boule perfectoïde $\tilde{D}_C$ sur C ou $\tilde{D}_{C^\flat}$ sur $C^\flat$ et donc $\mathfrak{m}_{C^\flat} - \{0\}$ est l'ensemble des points classiques de la boule perfectoïde épointée, et le (iii) du th. 3.5 nous fournit des bijections :

$$|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^* \cong |\tilde{D}_{C^\flat}^\times|/\mathscr{O}_E^*.$$

27. La notation est justifiée par le fait [**19**] que $|Y_E|$ est l'ensemble des points de type I d'une courbe analytique (adique) Y_E^{ad} (cf. § 3.3).

28. Un E-débasculé de $C^\flat$ est un couple (K, ι), où K est un corps perfectoïde contenant E, complet pour v_p, et ι un isomorphisme de $K^\flat$ sur $C^\flat$.

29. Une telle loi n'est unique qu'à isomorphisme près ; en changer modifie les constructions qui suivent de manière parfaitement transparente.

3.1.3. L'anneau B_E. — Si $r \in]0,+\infty[$, notons v_r la valuation

$$v_r(\sum_{k\gg 0}[x_k]\pi^k) = \inf_k \big(v_{C^\flat}(x_k) + krv_p(\pi)\big).$$

Cette valuation est multiplicative [**FF**, prop. 1.4.9] : $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$. Si $x \in A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$, la fonction $r \mapsto v_r(x)$ est croissante, concave, linéaire par morceaux, à pentes entières ; elle admet donc des limites à gauche $\partial_g v_r(x)$ et à droite $\partial_d v_r(x)$ vérifiant $\partial_g v_r(x), \partial_d v_r(x) \in \mathbf{N}$ et $\partial_g v_r(x) \geq \partial_d v_r(x)$. La fonction $r \mapsto v_r(x)$ est la transformée de Legendre de NP_x, et on récupère NP_x en prenant la transformée de Legendre inverse (cf. [**FF**, § 1.5]) : la multiplicité de $-\lambda$ comme pente de NP_x est $\partial_g v_\lambda(x) - \partial_d v_\lambda(x)$. Notons que $v_r(x)$ admet une limite $v_0(x)$ quand $x \to 0$, mais la dérivée à droite en 0 peut être $+\infty$.

Si I est un intervalle de $]0,+\infty[$, on note $B_E(I)$ le complété de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$ pour la famille de valuations v_r, pour $r \in I$. Alors $B_E(I)$ est une algèbre de Fréchet (et même de Banach, si I est compact, avec $v_I(x) = \inf_{r\in I} v_r(x)$). On note simplement B_E et B_E^+ les anneaux :

$$B_E = B_E(]0,+\infty[), \quad B_E^+ \text{ adhérence de } A_E[\tfrac{1}{\pi}] \text{ dans } B_E.$$

Alors φ_E se prolonge par continuité en des isomorphismes $\varphi_E : B_E(I) \xrightarrow{\sim} B_E(qI)$, $\varphi_E : B_E \xrightarrow{\sim} B_E$, $\varphi_E : B_E^+ \xrightarrow{\sim} B_E^+$. Si $r > 0$, on a $B_E = \cap_{n\in\mathbf{N}}\varphi^{-n}(B_E([r,+\infty[))$ et, pour faire bonne mesure, on définit *l'anneau de Robba* $\mathscr{R}_E(C^\flat)$ relatif à cette situation par $\mathscr{R}_E(C^\flat) = \cup_{n\in\mathbf{N}}\varphi^n(B_E([r,+\infty[))$.

Remarque 3.7. — (i) Si $E = \mathbf{Q}_p$, les anneaux ci-dessus sont reliés à ceux du n° 2.5.2 : soit $\iota :]0,+\infty[\to]0,+\infty[$ donnée par $x \mapsto \frac{1}{x}$. Alors

$$B_{\mathbf{Q}_p}(I) = \widetilde{\mathbf{B}}^{\iota(I)}, \quad B_{\mathbf{Q}_p}^+ = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}^+ \quad \text{et} \quad \mathscr{R}_E(C^\flat) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}.$$

(ii) Dans [**FF**], les normes sont préférées aux valuations, et notre $B_E(I)$ correspond au $B_{q(I)}$ de [**FF**], où $q :]0,+\infty[\to]0,1[$ est la fonction $x \mapsto q^{-x}$.

3.1.4. Localisation des zéros. — Si $x \in B_E(I)$, on définit son polygone de Newton NP_x^I par passage à la limite : si x_n est une suite d'éléments de $A_E[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\pi^\flat]}]$ ayant pour limite x dans $B_E(I)$, la suite de fonction $r \mapsto v_r(x_n)$ tend vers $r \mapsto v_r(x)$ sur I (la suite des restrictions à un sous-intervalle compact J de I est même constante à partir d'un certain rang [**FF**, lemme 1.6.10]). Concrètement, *si a, b sont les bornes inférieure et supérieure de I, alors NP_x^I est définie sur $]\partial_g v_b(x), \partial_d v_a(x)[$,* intervalle qui peut être $\emptyset$, *est convexe décroissante, à pentes dans $-I$ et, si $\lambda \in -I$, la multiplicité de λ comme pente est $\partial_g v_\lambda(x) - \partial_d v_\lambda(x)$.*

On a alors le résultat suivant ([**FF**, prop. 1.6.25]) et [**FF**, prop. 2.4.10]).

Théorème 3.8. — (i) *x est inversible dans $B_E(I)$ si et seulement si NP_x^I est vide.*

(ii) *Si λ est une pente de NP_x^I, de multiplicité d, il existe $a_1, \dots, a_d \in \mathscr{O}_{C^\flat}$ vérifiant $v_{C^\flat}(a_i) = -\lambda v_p(\pi)$ tels que $x = (\pi - [a_1]) \cdots (\pi - [a_d])y$ avec $y \in B_E(I)$. De plus, NP_y^I est obtenu en enlevant de NP_x^I le segment de pente λ.*

Si $y = (\pi - [a]) \in |Y_E|$, notons K_y le corps résiduel de y ; c'est un corps algébriquement clos, complet pour v_p. Posons $\delta(y) = v_p(\pi)/v_p([\pi^\flat]) \in]0, +\infty[$ (on considère les images dans K_y pour évaluer v_p ; on a aussi $\delta(y) = v_{C^\flat}(a)/v_{C^\flat}(\pi^\flat)$). Si I est un intervalle de $]0, +\infty[$, on note $|Y_E(I)|$ l'image inverse de I par δ.

Un *diviseur sur* $|Y_E(I)|$ est une somme formelle $D = \sum_{y \in |Y_E(I)|} n_y(y)$, avec $n_y \in \mathbf{N}$. On dit que D *est localement fini* si, pour tout intervalle compact $J \subset I$, la somme $\sum_{y \in |Y_E^J|} n_y$ est finie. Le th. 3.8 permet d'associer à $x \in B_E(I)$, son diviseur $\mathrm{Div}(x)$, qui est un diviseur localement fini sur $|Y_E(I)|$. Si N est un idéal principal, de $B_E(I)$, on note $\mathrm{Div}(N)$ le diviseur de n'importe lequel de ses générateurs.

Le résultat suivant (combinaison des th. 2.5.1, 2.6.1 et 2.7.4 de [**FF**]), que l'on comparera au th. 2.30, précise les résultats de Kedlaya du th. 2.34.

Théorème 3.9. — (i) *Si I est un intervalle compact, alors $B_E(I)$ est un anneau principal et l'application $N \mapsto \mathrm{Div}(N)$ induit une bijection de l'ensemble des idéaux de $B_E(I)$ sur l'ensemble des diviseurs à support fini sur $|Y_E(I)|$.*

(ii) *Si I est de la forme $[r, +\infty[$, avec $r > 0$, alors $B_E(I)$ est un anneau de Bézout, un idéal est fermé si et seulement si il est principal, et l'application $N \mapsto \mathrm{Div}(N)$ induit une bijection de l'ensemble des idéaux fermés de $B_E(I)$ sur l'ensemble des diviseurs localement finis sur $|Y_E(I)|$.*

Remarque 3.10. — (i) Si $I = [r, +\infty[$, avec $r > 0$, et si $D = \sum_i n_i(\pi - [a_i])$ est un diviseur localement fini sur $|Y_E(I)|$, alors $\prod_i (1 - \frac{[a_i]}{\pi})$ converge dans $B_E(I)$ et le diviseur du produit est D.

(ii) Si $I =]0, +\infty[$, le produit n'a aucune raison de converger (il peut y avoir une sous-suite de a_i, avec $v_{C^\flat}(a_i) \to 0$), et il semble raisonnable de penser, par analogie avec le cas d'égale caractéristique, que B_E n'est pas de Bézout (au moins si $C^\flat$ n'est pas maximalement complet). En tout cas, B_E^+ n'est pas de Bézout [**5**, rem. 1.1.3].

3.2. La courbe algébrique X_E. — [**FF**, th. 6.5.2]

3.2.1. Factorisation des éléments de $B_E^{\varphi_E = \pi^d}$. — Soit ℓ le logarithme de la loi de Lubin-Tate introduite ci-dessus. Si $x \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, soit

$$t_x = \ell([x]_\pi) = \lim_{n \to +\infty} \pi^{-n} \sigma_{\pi^{2n}}([x^{q^{-n}}]) = [x]_\pi \prod_{n \geq 1} \frac{\varphi^n(\xi_x)}{\pi}.$$

Théorème 3.11. — (i) *Si $\alpha \in E^*$, alors $t_{\sigma_\alpha(x)} = \alpha t_x$.*

(ii) *$x \mapsto t_x$ induit une bijection de $\mathfrak{m}_{C^\flat} - \{0\}$ sur $B_E^{\varphi_E = \pi} - \{0\}$.*

(iii) *A multiplication par E^* près, t_x est l'unique élément de $B_E^{\varphi_E = \pi}$ divisible par ξ_x.*

(iv) *Si $d \geq 1$, tout $y \in B_E^{\varphi_E=\pi^d}$ est le produit de $t_1, \dots, t_d \in B_E^{\varphi_E=\pi}$, uniques à permutation et multiplication près par des éléments de E^*.*

(v) *Tout élément y de $\mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}$ peut s'écrire sous la forme $y = \frac{t_1 \cdots t_d}{t_{d+1} \cdots t_{2d}}$, avec $t_1, \dots, t_{2d} \in B_E^{\varphi_E=\pi}$, et donc $\mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1} = \mathrm{Fr}(B_E^{\varphi_E=1})$.*

Remarque 3.12. — (i) Le diviseur de t_x est $\sum_{k\in\mathbf{Z}}(\varphi_E^k(\xi_x))$. Réciproquement, si $D \in |Y_E|$ est invariant par φ_E, il existe $x_1, \dots, x_d$ tels que $D = \sum_{i=1}^d \sum_{k\in\mathbf{Z}}(\varphi_E^k(\xi_{x_i}))$, ce qui permet de déduire les (iv) et (v) du th. 3.11 du (ii) du th. 3.9.

(ii) En combinant des arguments de diviseurs, le (i) du th. 3.8 et le (i) de la remarque, on montre que $B_E^{\varphi_E=\pi^d} = (B_E^+)^{\varphi_E=\pi^d}$, pour tout $d \in \mathbf{N}$.

(iii) On peut aussi utiliser des produits de Weierstrass pour construire des éléments de $B_E^{\varphi_E=\pi}$ de diviseur donné. Si $a \in \mathfrak{m}_{C^\flat}$, le produit $\prod_{n\geq 0}\big(1 - \frac{\varphi_E^n([a])}{\pi}\big)$ converge dans B_E^+, vers un élément ℓ_a^+ vérifiant $\varphi_E(\ell_a^+) = \frac{\pi}{\pi-[a]}\ell_a^+$. Soit ℓ_a^- une solution dans A_E de $\varphi_E(x) = (\pi - [a])x$. Alors $\mathrm{Div}(\ell_a^-)$ est à support dans $|Y_E(]0,r])|$, avec $r > 0$, et satisfait $\varphi_E(\mathrm{Div}(\ell_a^-)) = \mathrm{Div}(\ell_a^-) + (\pi - [a])$, et donc $\mathrm{Div}(\ell_a^-) = \sum_{k\leq -1}\varphi_E^k(\pi - [a])$. Il s'ensuit que, si $\ell_a = \ell_a^+\ell_a^-$, alors $\varphi_E(\ell_a) = \pi\ell_a$ et $\mathrm{Div}(\ell_a) = \sum_{k\in\mathbf{Z}}\varphi^k(\pi - [a])$.

Si $E = \mathbf{Q}_p$ et si $a = p^\flat$, on obtient de la sorte un élément ayant même diviseur que $t = \log[\varepsilon]$. On en déduit que, si $x \in A_E - \{0\}$ vérifie $\varphi(x) = (p - [p^\flat])x$, il existe $c \in \mathbf{Q}_p^*$ tel que $t = cx\prod_{n\geq 0}\big(1 - \frac{[(p^\flat)^{p^n}]}{p}\big)$.

3.2.2. La courbe X_E. — Remarquons que $P_E = \oplus_{d\in\mathbf{N}} B_E^{\varphi_E=\pi^d}$ est une algèbre graduée. On définit la courbe algébrique X_E par :

$$X_E = \mathrm{Proj}(P_E) = \mathrm{Proj}\big(\oplus_{d\in\mathbf{N}} B_E^{\varphi_E=\pi^d}\big).$$

Notons $|X_E|$ l'ensemble des points fermés de X_E. On déduit du th. 3.12 que $|X_E|$ est en bijection avec $\big((B_E^+)^{\varphi_E=\pi} - \{0\}\big)/E^*$: si $x \in |X_E|$, l'idéal homogène correspondant est engendré par $t_x \in (B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$, bien déterminé à multiplication près par E^*.

Théorème 3.13. — (i) *$H^0(X_E, \mathscr{O}) = E$, mais X_E n'est pas de type fini sur E.*

(ii) *Si $x \in |X_E|$, et si $t_x \in (B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$ est un générateur de l'idéal homogène correspondant, alors :*

a) *$\mathscr{O}(X_E - \{x\}) = (B_E^+[\frac{1}{t_x}])^{\varphi_E=1}$ est un anneau principal* (et donc X_E est une courbe car recouvert par des spectres d'anneaux de Dedekind).

b) *Le corps résiduel K_x est un corps algébriquement clos de caractéristique* 0, *complet pour v_p, t_x est un paramètre local en x, et $\widehat{\mathscr{O}}_{X_E,x} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_x)$.*

c) *Tout élément non nul de $\mathscr{O}(X_E - \{x\})$ est un produit $\frac{t_1}{t_x}\cdots\frac{t_d}{t_x}$, avec $t_i \notin E^*t_x$, et $t_1, \dots, t_d$ uniques à permutation et multiplication par E^*.*

Remarque 3.14. — (i) Si $E = \mathbf{Q}_p$ et $t_x = t$, on a $(B_E^+[\frac{1}{t_x}])^{\varphi_E=1} = \mathbf{B}_e$. La principalité de $\mathbf{B}_e$ est donc un cas particulier du (ii) a) et le (ii) c) répond (positivement) à la question 2 des « devoirs de vacances » de Fontaine.

(ii) On a une suite exacte

$$0 \to H^0(X_E, \mathscr{O}) \to \mathscr{O}(X_E - \{x\}) \to \mathscr{O}_{X_E,x}[\tfrac{1}{t_x}]/\mathscr{O}_{X_E,x} \to 0$$

induite par l'application qui à une fonction associe sa partie principale en x. Si $E = \mathbf{Q}_p$ et $t_x = t$, on retrouve la suite exacte fondamentale.

(iii) Si $x_0, x_1, \ldots, x_d$ sont des points fermés de X_E, distincts deux à deux, et si $t_{x_0}, \ldots, t_{x_d} \in (B_E^+)^{\varphi_E = \pi}$ sont des générateurs des idéaux homogènes correspondants, le théorème des restes chinois couplé avec le (ii) b) impliquent que la réponse à la question 3 des « devoirs de vacances » est "oui".

(iv) Si $y \in |Y_E|$, il existe $t_x \in (B_E^+)^{\varphi_E = \pi}$, bien déterminé à multiplication près par E^*, dont le diviseur est $\sum_{k \in \mathbf{Z}} (\varphi_E^k(y))$, et t_x détermine un élément x de $|X_E|$. On en déduit des bijections naturelles

$$|X_E| \cong |Y_E|/\varphi^{\mathbf{Z}} \cong |\tilde{D}_C^\times|/E^* \cong |\tilde{D}_{C^\flat}^\times|/E^*,$$

l'action de E^* sur $|\tilde{D}_C^\times| = |\tilde{D}_{C^\flat}^\times| = \mathfrak{m}_{C^\flat} - \{0\}$ étant donnée par la loi de Lubin-Tate comme dans le th. 3.5. On note $\infty \in |X_E|$ l'image de $\infty \in |Y_E|$.

Théorème 3.15. — ([**FF**, th. 8.6.1])

(i) *Si E' est une extension finie de E, alors $X_{E'} = E' \otimes_E X_E$. En particulier $X_{E'}$ est un revêtement étale de degré $[E' : E]$ de X_E.*

(ii) *Tout revêtement étale fini de X_E est de cette forme, i.e. X_E est géométriquement simplement connexe.*

Si $k_{E'} = \mathbf{F}_{q^a}$, alors $\varphi_{E'} = \varphi_E^a$ et $\mathrm{Fr}(B_{E'}) = E' \otimes_{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E} \mathrm{Fr}(B_E)$, avec $\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E = \mathbf{Q}_{q^a} \otimes_{\mathbf{Q}_q} E$, et donc

$$\mathrm{Fr}(B_{E'})^{\varphi_{E'}=1} = E' \underset{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_{E'}=1} = E' \underset{\mathbf{Q}_{q^a} \cdot E}{\otimes} (\mathbf{Q}_{q^a} \underset{\mathbf{Q}_q}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}) = E' \underset{E}{\otimes} \mathrm{Fr}(B_E)^{\varphi_E=1}$$

On en déduit le (i). Le (ii) est un résultat profond, dont la preuve utilise la classification des fibrés sur X_E (th. 4.5).

3.3. La courbe analytique Y_E^{ad} et son quotient X_E^{ad}. — La bijection $|X_E| = |Y_E|/\varphi_E^{\mathbf{Z}}$ provient d'un morphisme de variétés analytiques : on a le résultat suivant.

Théorème 3.16. — ([**FF**, th. 2.1]) *Si $I = [r_1, r_2]$, avec $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, alors $Y_E^{\mathrm{ad}}(I) = \mathrm{Spa}(B(I), B(I)^+)$ est un espace adique, i.e. le préfaisceau $\mathscr{O}$ est un faisceau.*

On définit Y_E^{ad} comme la limite inductive des $Y_E^{\mathrm{ad}}([r_1, r_2])$, pour $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$ et, plus généralement, si I est un intervalle de $]0, +\infty[$, on note $Y_E(I)^{\mathrm{ad}}$ la limite inductive des $Y_E([r_1, r_2])^{\mathrm{ad}}$, pour $r_1, r_2 \in \mathbf{Q}$, avec $[r_1, r_2] \subset I$. Alors

$$\mathscr{O}(Y_E^{\mathrm{ad}}) = B \quad \mathscr{O}(Y_E^{\mathrm{ad}}(I)) = B(I).$$

Il résulte du th. 3.9 que $|Y_E(I)|$ est l'ensemble des points classiques de $Y_E^{\mathrm{ad}}(I)$.

Remarque 3.17. — On peut même analytifier $\mathrm{Spec}(A_E)$ ([**54**, prop. 13.1.1]). Soit $\delta : \mathrm{Spa}\, A_E \to [0, +\infty]$ défini par $\delta(x) = \frac{v_{\overline{x}}(\pi)}{v_{\overline{x}}([\pi^\flat])}$, où $\overline{x}$ est la valuation à valeurs réelles déterminée par x. L'espace Y_E^{ad} est alors l'image inverse de $]0, +\infty[$ par δ.

On a $\delta(\varphi(x)) = q\delta(x)$, et donc φ opère proprement sur Y_E^{ad}, ce qui permet de considérer l'espace quotient

$$X_E^{\mathrm{ad}} = Y_E^{\mathrm{ad}}/\varphi^{\mathbf{Z}}.$$

Remarque 3.18. — (i) X_E^{ad} est l'analytifiée de X_E.

(ii) Le (v) du th. 3.11 peut se traduire sous la forme : toute fonction méromorphe sur X_E^{ad} est une fonction rationnelle, ce qui est une manifestation du principe GAGA, la courbe X_E étant une courbe propre.

(iii) Écrire X_E^{ad} sous la forme $Y_E^{\mathrm{ad}}/\varphi^{\mathbf{Z}}$ fait ressembler X_E^{ad} à une courbe elliptique de Tate. Par ailleurs, X_E ressemble à $\mathbf{P}^1$ puisque tout diviseur de degré 0 est principal (i.e. X_E est de genre 0), mais il s'agit d'un $\mathbf{P}^1$ un peu spécial car il a des quotients qui ne sont pas de genre 0 : Si F un sous-corps fermé de $C^\flat$, on peut associer à F une courbe $X_{E,F}$ en remplaçant $C^\flat$ par F dans les formules. L'anneau $\mathbf{B}_{E,e}(F)$ correspondant est alors seulement un anneau de Dedekind [**FF**, prop. 7.2.1], et pas un anneau principal, et on a [**FF**, prop. 7.2.4]

$$\mathrm{Pic}^0(X_{E,F}) = \mathrm{Hom}(G_F, E^\times).$$

Remarque 3.19. — La bijection $|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^*$ peut aussi s'analytifer, mais il faut sortir du cadre des espaces analytiques (ou même adiques), et utiliser celui des diamants [**54, 22**]. Un certain nombre des énoncés ci-dessus prennent tout leur sens dans le monde des diamants (et ont fortement motivé son introduction).

• On a $E^\diamond \cong \widehat{E}_\infty^\diamond/\mathrm{Gal}(E_\infty/E)$, et comme $\mathrm{Gal}(E_\infty/E) \cong \mathscr{O}_E^*$, la bijection $|Y_E| \cong |\tilde{D}_C^\times|/\mathscr{O}_E^*$ est une manifestation de l'égalité de diamants

$$\widehat{E}_\infty^\diamond \times C^\diamond = (\widehat{E}_\infty^\flat)^\diamond \times (C^\flat)^\diamond \cong (\tilde{D}_{C^\flat}^\times)^\diamond = (\tilde{D}_C^\times)^\diamond$$

• La prop. 3.4 est une manifestation de l'égalité de diamants $E^\diamond \times C^\diamond \cong Y_E^\diamond$.

• Le th. 3.15 (ou sa version [**56**] pour X_E^{ad}) se traduit par

$$\pi_1((E^\diamond \times C^\diamond)/(1 \times \varphi)) = G_E.$$

Comme $C^\diamond/G_E \cong E^\diamond$, on a aussi

$$\pi_1((E^\diamond \times E^\diamond)/(1 \times \varphi)) = G_E \times G_E.$$

Ce dernier énoncé est un analogue arithmétique d'un lemme de Drinfeld à la base de la construction des représentations galoisiennes associées aux formes modulaires sur les corps de fonctions. Il réalise un vieux fantasme de pouvoir faire des produits « absolu » (dans le monde des schémas, $E \times E = E$...). C'est un des points de départ de la géométrisation de la correspondance de Langlands locale [**19, 20, 21, 22, 54**].

4. Fibrés sur X_E

Si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, on peut associer à $\mathscr{E}$ deux invariants additifs dans les suites exactes : son rang $\mathrm{rg}(\mathscr{E})$ et son degré $\deg(\mathscr{E})$ défini par $\deg(\mathscr{E}) = \deg(\det \mathscr{E})$ où, si $\mathscr{L}$ est un fibré de rang 1 sur X et si s une section rationnelle de $\mathscr{L}$, on définit $\deg(\mathscr{L})$ comme étant $\sum_{x\in|X_E|} v_x(s)$, ce qui ne dépend pas du choix de s car $\sum_{x\in|X_E|} v_x(f) = 0$ si $f \in \mathrm{Fr}(\mathbf{B}_e)^*$.

Munie de ces deux invariants, la catégorie des fibrés sur X_E est une catégorie de Harder-Narasimhan (comme celle des fibrés sur une courbe projective lisse). Tout fibré sur X_E est donc muni d'une filtration canonique, croissante, telle que les quotients successifs soient semi-stables et la suite des pentes strictement décroissante.

4.1. Modifications de fibrés. — Si $y_1, \dots, y_k \in X_E$, et si $U = X_E - \{y_1, \dots, y_k\}$, on peut décrire un fibré $\mathscr{E}$ sur X_E, à la Beauville-Laszlo, en utilisant le recouvrement de X_E formé de U et de voisinages infinitésimaux des y_i. Soient $t_1, \dots, t_k$ les éléments de $(B_E^+)^{\varphi_E=\pi}$ de diviseurs respectifs $(y_1), \dots, (y_k)$, et K_i le corps résiduel en y_i, de telle sorte que $\mathscr{O}(U) = (B_E^+[\frac{1}{t_1\cdots t_k}])^{\varphi_E=1}$ et $\widehat{\mathscr{O}}_{X_E,y_i} = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$. Alors $\mathscr{E}$ est équivalent à la donnée de :

- un $\mathscr{O}(U)$-module projectif M de rang fini,
- pour $1 \le i \le k$, un sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$-réseau $\widehat{M_i}$ de $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}(K_i) \otimes_{\mathscr{O}(U)} M$.

L'application $\mathscr{E} \mapsto (M, (\widehat{M_i})_{1\le i\le r})$ est celle obtenue en posant

$$M = H^0(U, \mathscr{E}), \quad \widehat{M_i} = \widehat{\mathscr{O}}_{X_E,y_i} \otimes_{\mathscr{O}_{X_E}} \mathscr{E}.$$

Cette description des fibrés rend totalement transparentes *les modifications d'un fibré $\mathscr{E}$* en des points $y_1, \dots, y_k$: une telle modification revient juste à changer les sous-$\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_i)$-réseaux $\widehat{M_i}$, pour $1 \le i \le k$.

Remarque 4.1. — (i) Nous n'aurons besoin que de modifications en ∞ dans la suite, mais les modifications en un nombre arbitraire de points [**19, 20, 21, 22, 54**], analogues aux chtoukas multipattes de V. Lafforgue [**42**], semblent devoir jouer un rôle important pour la géométrisation de la correspondance de Langlands locale.

(ii) Si $\{y_1, \dots, y_k\} = \{\infty\}$, et si on note $\mathbf{B}_{E,e}$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ les anneaux $(B_E^+[\frac{1}{t}])^{\varphi_E=1}$ (avec $t = t_\infty$) et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_\infty)$, on obtient une B-paire (cf. n° 2.5.8). Il résulte de la discussion ci-dessus que *la catégorie des fibrés sur X_E est équivalente à celle des B-paires.*

4.2. Le fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$. — Si h est un entier ≥ 1, on note E_h l'extension non ramifiée de E, de degré h. Si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, avec d, h entiers premiers entre eux et $h \ge 1$, on note D_λ l'algèbre centrale simple de centre E et d'invariant λ :

$$D_\lambda = E_h[\Pi]/(\Pi^h = \pi^d), \quad \Pi x \Pi^{-1} = \varphi_E(x), \text{ si } x \in E_h.$$

Si $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbf{Q}$, on définit un fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ sur X_E de la manière suivante. On considère le P-module gradué $\oplus_{n\in\mathbf{N}} B_E^{\varphi_E^h=\pi^{d+n}}$, et on note $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ le fibré associé : si $y \in |X_E|$, alors $H^0(X_E - \{y\}, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \big(B_E[\frac{1}{t_y}]\big)^{\varphi_E^h=\pi^d} = \big(B_E^+[\frac{1}{t_y}]\big)^{\varphi_E^h=\pi^d}$.

Remarque 4.2. — Il y a une définition plus conceptuelle [**FF**, n° 8.2.2] de $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$: X_{E_h} est un revêtement fini étale de degré h de X_E, et $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ est l'image directe du fibré en droites $\mathscr{O}_{X_{E_h}}(d)$ sur X_{E_h}.

Proposition 4.3. — (i) *$\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ est de rang h, de degré d, et de pente λ.*

(ii) *Les groupes de cohomologie $H^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda))$ sont donnés par* ([**FF**, prop. 8.2.3]) *:*

- $H^0(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \begin{cases} (B_E^+)^{\varphi_E^h=\pi^d} & si\ \lambda \geq 0, \\ 0 & si\ \lambda < 0, \end{cases}$
- $H^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \begin{cases} 0 & si\ \lambda \geq 0, \\ \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+/(t^d\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ + E_h) & si\ \lambda < 0, \end{cases}$
- $H^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = 0$ *si* $i \geq 2$.

(iii) $\mathrm{End}(\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = D_\lambda$ ([**FF**, prop. 8.2.8]).

Remarque 4.4. — (i) On a privilégié le point ∞ mais, si $\lambda < 0$, on a, pour tout $y \in |Y_E|$, $H^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y)/(t_y^d\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y)+E_h)$, ce qui est un peu troublant car $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+(K_y)$ dépend de y (en tant qu'anneau topologique [**40**]).

(ii) Les groupes de cohomologie de $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{H}^i(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda))$, et on a

$$\mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^0(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) - \mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^1(X_E, \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)) = (d, h).$$

4.3. Classification des fibrés sur X_E. — [**FF**, chap. 8]

Théorème 4.5. — ([**FF**, th. 8.2.10]) *Si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, il existe des nombres rationnels $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$, uniquement déterminés, tels que*

$$\mathscr{E} \cong \mathscr{O}_{X_E}(\lambda_1) \oplus \cdots \oplus \mathscr{O}_{X_E}(\lambda_r).$$

Remarque 4.6. — (i) Il résulte de ce théorème que la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}$ est scindée, et que l'on a une décomposition de $\mathscr{E}$ sous la forme $\mathscr{E} = \oplus_{\lambda\in\mathbf{Q}}\mathscr{E}_\lambda$ où $\mathscr{E}_\lambda \cong \mathscr{O}_{X_E}(\lambda)^{m_\lambda}$, est semi-stable de pente λ.

(ii) Un fibré semi-stable de pente 0 est trivial.

(iii) En utilisant le (ii) de la prop. 4.3 et la décomposition ci-dessus, on voit que :

$$\dim_E(H^0(X_E, \mathscr{E})) < +\infty \Leftrightarrow \text{toutes les pentes de } \mathscr{E} \text{ sont} \leq 0.$$

(iv) Il résulte du (ii) de la rem. 4.4 que, si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X_E, les groupes de cohomologie de $\mathscr{E}$ sont les C-points d'Espaces de Banach de Dimension finie $\mathbb{H}^i(X_E, \mathscr{E})$, et que la caractéristique d'Euler-Poincaré de $\mathscr{E}$ est :

$$\mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^0(X_E, \mathscr{E}) - \mathrm{Dim}\,\mathbb{H}^1(X_E, \mathscr{E}) = (\deg(\mathscr{E}), \mathrm{rg}(\mathscr{E})).$$

4.4. Fibrés et φ-modules. — [**FF**, chap. 11].

Un φ-module M sur $\Lambda = \breve{E}, B_E^+$ est un Λ-module libre muni d'un morphisme semi-linéaire $\varphi : M \to M$, tel que $a \otimes x \mapsto a\varphi(x)$ induise un isomorphisme $\Lambda \otimes_{\varphi(\Lambda)} M \cong M$ (autrement dit, la matrice dans une base appartient à $\mathrm{GL}_d(\Lambda)$).

Théorème 4.7. — *On a des foncteurs naturels :*

$$\begin{tikzcd}
 & \{B\text{-paires}\} \arrow[dr, "\sim"] & & \\
\{\text{Fibrés sur } X_E\} \arrow[ur, "\sim"] & & \{\varphi\text{-modules sur } B_E^+\} \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[r, shift left] & \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\} \arrow[l, shift left]
\end{tikzcd}$$

(Les foncteurs du triangle sont des équivalences de catégories, les autres sont essentiellement surjectifs mais pas pleinement fidèles.)

On a déjà expliqué comment marchait l'équivalence $\{B\text{-paires}\} \cong \{\text{Fibrés sur } X_E\}$. Les autres foncteurs sont obtenus de la manière suivante.

• La projection $\mathscr{O}_{C^\flat} \to k_{C^\flat}$ induit des projections $A_E \to \mathscr{O}_{\breve{E}}$ et $B_E^+ \to \breve{E}$ commutant à φ_E. Réciproquement, le choix d'une section $k_{C^\flat} \to \mathscr{O}_{C^\flat}$ permet d'identifier $\breve{E}$ à un sous-anneau de B_E^+. D'où des foncteurs $B_E^+ \otimes_{\breve{E}} -$ et $\breve{E} \otimes_{B_E^+} -$ d'extension des scalaires. La preuve de la surjectivité essentielle [**FF**, n° 11.1.5] utilise un nouveau venu dans le monde des anneaux de Fontaine, à savoir l'anneau $\overline{B}_E$, qui est à la fois un quotient de B_E^+ et un quotient de $A[\frac{1}{p}]$ par des idéaux sur lesquels φ_E est très topologiquement nilpotent.

• Si M^+ est un φ-module sur B_E^+, la B-paire associée est

$$(M_e, M_{\mathrm{dR}}^+) = \big((B_E^+[\tfrac{1}{t}] \otimes_{B_E^+} M^+)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{B_E^+} M\big).$$

• Si (M_e, M_{dR}^+) est une B-paire, le φ-module sur B_E^+ associé est

$$M^+ = \{x \in B_E^+[\tfrac{1}{t}] \otimes M_e,\ \varphi^n(x) \in M_{\mathrm{dR}}^+,\ \forall n \in \mathbf{Z}\}.$$

• Si M est un φ-module sur $\breve{E}$,

◇ le φ-module sur B_E^+ associé est simplement $M^+ = B_E^+ \otimes_{\breve{E}} M$,

◇ la B-paire associée est $\big((B_E^+[\frac{1}{t}] \otimes_{\breve{E}} M)^{\varphi=1}, \mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_{\breve{E}} M\big)$

◇ le fibré $\mathscr{E}(M)$ est celui défini par le P-module gradué $\oplus_{n\in\mathbf{N}}(B_E^+ \otimes_{\breve{E}} M)^{\varphi=\pi^n}$: si $y \in |X_E|$, alors $H^0(X - \{y\}, \mathscr{E}(M)) = (B_E^+[\frac{1}{t_y}] \otimes M)^{\varphi=1}$.

Il est élémentaire de vérifier que, si on part d'un φ-module sur $\breve{E}$, le diagramme obtenu en considérant les objets associés commute. Par contre, il n'est pas clair que le M^+ obtenu à partir d'une B-paire (M_e, M_{dR}^+) soit libre sur B_E^+ ni que, si M^+ est un φ-module sur B_E^+, le $\mathbf{B}_e$-module $\big((B_E^+[\frac{1}{t}] \otimes_{B_E^+} M^+)^{\varphi=1}$ ait le bon rang (ou même qu'il soit non nul si M^+ est non nul) ; cela résulte [30] du théorème de classification des fibrés sur X_E (th. 4.5), de l'équivalence entre φ-modules sur B_E^+ et $\breve{E}$, et du classique théorème de Dieudonné-Manin (prop. 2.36).

30. On peut aussi utiliser le th. 2.16 qui contient un certain nombre des énoncés précédents.

Remarque 4.8. — Via l'équivalence $\{\text{Fibrés sur } X_E\} \cong \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\}$, le fibré $\mathscr{O}_{X_E}(\lambda)$ correspond à $\breve{E}(-\lambda)$. Autrement dit, *les pentes de Harder-Narasimhan sont les opposées des pentes de Frobenius.*

Remarque 4.9. — Le diagramme du th. 4.7, peut s'étendre en un diagramme faisant intervenir la courbe analytique X_E^{an}.

$$\begin{tikzcd}
 & \{B\text{-paires}\} \arrow[dr, "\sim"] & & \\
\{\text{Fibrés sur } X_E\} \arrow[ur, "\sim"] \arrow[d, "\text{GAGA}"', "\wr"] & & \{\varphi\text{-modules sur } B^+\} \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[r, shift left] \arrow[d, "\wr"] & \{\varphi\text{-modules sur } \breve{E}\} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\{\text{Fibrés sur } X_E^{\mathrm{an}}\} \arrow[rr, equal] & & \{\varphi\text{-modules sur } B\} \arrow[r, "\sim"] & \{\varphi\text{-modules sur } \mathscr{R}(C^\flat)\}
\end{tikzcd}$$

Dans ce diagramme, la flèche $\{\text{Fibrés sur } X_E\} \to \{\text{Fibrés sur } X_E^{\mathrm{an}}\}$ est l'analytification (que ce soit une équivalence de catégories est une manifestation d'un principe GAGA, mais les preuves existantes ne sont pas directes). Les φ-modules sur B sont les B-modules localement libres, de rang fini, munis d'une action semi-linéaire de φ telle que $B \otimes_{\varphi(B)} \varphi(M) \to M$ soit un isomorphisme. Les flèches non encore décrites s'obtiennent juste par extension des scalaires, en utilisant les injections $\breve{E} \subset B^+ \subset B \subset \mathscr{R}(C^\flat)$.

5. Fibrés G_K-équivariants et représentations de G_K

Comme il transparait des extraits des courriels de Fontaine reproduits dans le chap. 1, mieux comprendre les diverses démonstrations des conjectures « faiblement admissible $\Rightarrow$ admissible » et « de Rham $\Rightarrow$ potentiellement semi-stable », ainsi que les objets qu'elles font intervenir, a été une motivation puissante pour l'introduction de la courbe X_E et l'étude des fibrés sur X_E.

L'utilisation des fibrés sur X_E fournit une preuve de « fa $\Rightarrow$ a » complètement naturelle ([**FF**, § 10.5] ou § 5.2 ci-dessous). Cette preuve est très proche dans sa structure de la preuve de Berger (cf. n° 2.5.6), mais l'utilisation des modifications de fibrés en trivialise l'étape la plus délicate, i.e. celle consistant à modifier un (φ, Γ)-module en un nombre infini de points.

Supposons dorénavant que $E = \mathbf{Q}_p$ et notons X et Y les courbes X_E et Y_E.

5.1. Fibrés G_K-équivariants et (G_K, B)-paires. — Le groupe G_K agit sur $C^\flat$, et donc aussi sur Y et X. Le morphisme $\theta : \mathbf{A}_{\mathrm{inf}} \to \mathscr{O}_C$ définit un point $\infty \in |Y|$ (correspondant à l'idéal $(p - [p^\flat])$), qui est invariant par G_K.

On note $\infty \in |X|$, l'image de $\infty \in |Y|$. C'est le zéro du $2i\pi$ p-adique $t = \log[\varepsilon]$ de Fontaine. Alors ∞ est fixe par G_K et tous les autres points de X ont une orbite infinie sous l'action de G_K ([**FF**, prop. 10.1.1] ou [**5**, lemme 1.1.8]). De plus, les anneaux

$\mathscr{O}(X-\{\infty\})$ et $\widehat{\mathscr{O}}_{X,x}$ s'identifient aux anneaux $\mathbf{B}_e$ et $\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+$ du § 1.2, avec leur action naturelle de G_K.

Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, sa filtration de Harder-Narasimhan est constituée de fibrés G_K-équivariants (car l'action de G_K respecte les pentes des fibrés). Il découle du th. 4.5 que, si $\mathscr{E}$ est semi-stable de pente 0, alors $H^0(X,\mathscr{E})$ est *une* $\mathbf{Q}_p$-*représentation de* G_K, i.e. un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie muni d'une action linéaire continue de G_K. On déduit du (ii) de la rem. 4.6 le résultat suivant.

Théorème 5.1. — *Les foncteurs*

$$V \mapsto V \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathscr{O}_X \quad \text{et} \quad \mathscr{E} \mapsto H^0(X,\mathscr{E})$$

induisent des équivalences de catégories inverses l'une de l'autre entre la catégorie des $\mathbf{Q}_p$*-représentations de* G_K *et celle des fibrés* G_K*-équivariants sur* X*, semi-stables de pente* 0.

Remarque 5.2. — (i) Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, et si $\mathscr{E}'$ est un fibré obtenu par modification de $\mathscr{E}$, alors $\mathscr{E}'$ est G_K-équivariant si et seulement si la modification n'a lieu qu'en ∞ (c'est une traduction du fait que ∞ est fixe par G_K et est l'unique point de X ayant une orbite finie sous l'action de G_K).

(ii) Si E est une extension finie de $\mathbf{Q}_p$, X_E est un revêtement de degré $[E:\mathbf{Q}_p]$ de X, et la fibre au-dessus de ∞ est stable par G_K et finie. Une modification G_K-équivariante peut se faire en chacune des orbites de cette fibre sous l'action de G_K, ce qui complique un peu l'étude des E-représentations de G_K.

Si $\lambda = \frac{d}{h}$, on fait agir G_K sur $D_\lambda = \mathbf{Q}_{p^h}[\Pi]$ à travers son action sur $\mathbf{Q}_{p^h}$. Une D_λ*-représentation* V *de* G_K est alors un D_λ module à droite de rang fini muni d'une action semi-linéaire de G_K : si $\sigma \in G_K$, $v \in V$, et $a \in D_\lambda$, alors $\sigma(x\cdot a) = \sigma(x)\cdot\sigma(a)$.

Théorème 5.3. — ([**FF**, th. 10.1.7]) *Les foncteurs*

$$V \mapsto V \otimes_{D_\lambda} \mathscr{O}_X(\lambda) \quad \text{et} \quad \mathscr{E} \mapsto \mathrm{Hom}(\mathscr{O}_X(\lambda),\mathscr{E})$$

induisent des équivalences inverses l'une de l'autre entre la catégorie des D_λ*-représentations de* G_K *et celle des fibrés* G_K*-équivariants sur* X*, semi-stables de pente* λ.

Remarque 5.4. — Via l'équivalence de catégories entre fibrés sur X et B-paires, un fibré G_K-équivariant sur X correspond à une (G_K,B)-paire (cf. n° 2.5.8), et le th. 5.3 est équivalent à [**5**, th. B].

5.2. (φ,N)-modules et fibrés G_K-équivariants. — Comme on l'a vu (ex. 2.46), à un (φ,N)-module filtré sur K, on peut associer une (G_K,B)-paire $(M_e(D),M_{\mathrm{dR}}^+(D))$, et donc un fibré G_K-équivariant $\mathscr{E}(D)$ sur X, en posant

$$M_e(D) = (\widetilde{\mathbf{B}}_{\log}^+[\tfrac{1}{t}] \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=1} \quad \text{et} \quad M_{\mathrm{dR}}^+(D) = \mathrm{Fil}^0(\mathbf{B}_{\mathrm{dR}}^+ \otimes_K D_K)$$

On a alors

$$\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = H^0(X, \mathscr{E}(D)).$$

Il en résulte que D *est admissible si et seulement si* $\mathscr{E}(D)$ *est semi-stable de pente* 0.

Remarque 5.5. — (i) On dit que $\mathscr{E}$ est *log-cristallin* si $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes M_e(\mathscr{E}))^{G_K}$ est de dimension $\mathrm{rg}(\mathscr{E})$ sur K_0. Alors $D \mapsto \mathscr{E}(D)$ induit une équivalence de $\otimes$-catégories de la catégorie des (φ, N)-modules filtrés sur celle des fibrés G_K-équivariants, log-cristallin.

(ii) Si D est un (φ, N)-module sur K_0, on peut voir D comme un (φ, N)-module filtré sur K en mettant la filtration triviale sur D_K (i.e $D_K^0 = D_K$ et $D_K^1 = 0$). Le fibré $\mathscr{E}(D)$ associé est celui associé au P-module gradué $\oplus_{k\in\mathbf{Z}}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes_{K_0} D)^{N=0,\varphi=p^k}$. Si $\mathrm{Fil}^\bullet$ est une filtration sur D_K, on obtient $\mathscr{E}(D, \mathrm{Fil}^\bullet)$ à partir de $\mathscr{E}(D)$ par une modification en ∞.

Proposition 5.6. — *Soit D un (φ, N)-module filtré sur K.*

(i) $\mathrm{rg}(\mathscr{E}(D)) = \mathrm{rg}(D)$, $\deg(\mathscr{E}(D)) = \deg(D)$ *et* $\mu(\mathscr{E}(D)) = \mu(D)$.

(ii) *Si* $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ *est la filtration de Harder-Narasimhan de D, alors celle de* $\mathscr{E}(D)$ *est* $0 = \mathscr{E}(D_0) \subset \mathscr{E}(D_1) \subset \cdots \subset \mathscr{E}(D_r) = \mathscr{E}(D)$.

(iii) *D est faiblement admissible si et seulement si* $\mathscr{E}(D)$ *est semi-stable, de pente* 0.

Démonstration. — L'égalité des rangs repose sur les ingrédients suivants :

• $a \otimes v \mapsto a \otimes (v + uNv + \frac{u^2}{2!}N^2v + \cdots)$ induit un isomorphisme de φ-modules de $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes D$ sur $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes D)^{N=0}$.

• $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes_{K_0} D = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes_{\breve{\mathbf{Q}}_p} (\breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{K_0} D)$ et $\breve{\mathbf{Q}}_p \otimes_{K_0} D \cong \oplus_\lambda \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda)^{m_\lambda}$.

• Si $\lambda = \frac{d}{h}$, alors $(\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}] \otimes \breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda))^{\varphi=1}$ est un $\mathbf{B}_e$-module naturellement isomorphe à $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig}}[\frac{1}{t}]^{\varphi^h=p^d} \cong t_h^d \mathbf{Q}_{p^h} \otimes_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{B}_e$, et donc est libre de rang $h = \mathrm{rg}(\breve{\mathbf{Q}}_p(\lambda))$.

Si la filtration sur D_K est triviale, l'égalité des degrés résulte de la décomposition ci-dessus et de la rem. 4.8. Le cas général s'en déduit en utilisant la formule reliant le degré d'un fibré et celui d'une de ses modifications ([**FF**, lemme 10.5.5]). L'égalité des pentes est alors immédiate, ce qui prouve le (i).

Pour prouver le (ii), commençons par remarquer que la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}(D)$ est stable par G_K (par unicité). Il suffit donc, compte-tenu du (i), de prouver qu'un sous-fibré $\mathscr{E}'$ de $\mathscr{E}(D)$, stable par G_K, et facteur direct, est de la forme $\mathscr{E}(D')$, avec D' sous-(φ, N)-module filtré de D.

Pour cela, introduisons le foncteur $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}$ associant à une $\mathbf{B}_e$-représentation M (i.e. un $\mathbf{B}_e$-module libre de rang fini muni d'une action semi-linéaire de G_K) le (φ, N)-module $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M)$ sur K_0 défini par $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_e} M)^{G_K}$. Comme $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}]$ est G_K-régulier et $\mathrm{Fr}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}])^{G_K} = K_0$, on a $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M)) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M)$ et, s'il y a égalité, l'application naturelle $\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{K_0} \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) \to \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log}[\frac{1}{t}] \otimes_{\mathbf{B}_e} M$ est un isomorphisme.

Soient alors $M = M_e(D)$, $M' = H^0(X - \{\infty\}, \mathscr{E}')$ et $M'' = M/M'$. Comme $\mathscr{E}'$ est facteur direct, M'' est un $\mathbf{B}_e$-module libre, et on a une suite exacte $0 \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M') \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) \to \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M'')$. Or $\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = D$ et donc $\dim_{K_0} \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M) = \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M)$; il s'ensuit

que les inégalités $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M')) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M')$ et $\dim_{K_0}(\mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M'')) \leq \mathrm{rg}_{\mathbf{B}_e}(M'')$ sont des égalités et donc, en particulier, que si on pose $D' = \mathscr{D}_{\mathrm{st}}(M')$, alors $M' = M_e(D')$. Comme $\mathscr{E}'$ est facteur direct, cela implique que $\mathscr{E}' = \mathscr{E}(D')$, ce qui prouve le (ii).

Le (iii) est une conséquence immédiate des (i) et (ii) et des définitions. □

Théorème 5.7. — *Soit D un (φ, N)-module filtré sur K.*

(i) *Si $\mu(D) > 0$, alors* $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = +\infty$.

(ii) *Si $\mu(D) = 0$, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- *D est faiblement admissible,*
- $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) < +\infty$,
- $\dim_{\mathbf{Q}_p} \mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = \dim_{K_0} D$ (i.e. D est admissible).

Démonstration. — Soit $0 = D_0 \subset D_1 \subset \cdots \subset D_r = D$ la filtration de Harder-Narasimhan de D. On rappelle que $\mathbf{V}_{\mathrm{st}}(D) = H^0(X, \mathscr{E}(D))$.

• Si $\mu(D) > 0$, alors $\mu(D_1) > 0$, et donc $\mu(\mathscr{E}(D_1)) > 0$, et $\dim_{\mathbf{Q}_p} H^0(X, \mathscr{E}(D)) = +\infty$, d'après le (iii) de la rem. 4.6, puisque $H^0(X, \mathscr{E}(D))$ contient $H^0(X, \mathscr{E}(D_1))$. On en déduit le (i).

• Si $\mu(D) = 0$, alors $\mu(D_1) > 0$ sauf si D est semi-stable (et donc de pente 0, i.e. D est faiblement admissible), ce qui équivaut, d'après le (iii) de la prop. 5.6, à ce que $\mathscr{E}(D)$ soit semi-stable de pente 0, et donc à ce que D soit admissible. □

5.3. Le théorème de monodromie p-adique. — Si $\mathscr{E}$ est un fibré G_K-équivariant sur X, de rang d, on dit que $\mathscr{E}$ *est de de Rham* si $\dim_K M_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E})^{G_K} = d$. On dit que $\mathscr{E}$ *est potentiellement log-cristallin* s'il existe une extension finie L de K, telle que $\mathscr{E}$, vu comme fibré G_L-équivariant, soit de la forme $\mathscr{E}(D)$, où D est un (φ, N)-module filtré sur L. Il est élémentaire que « $\mathscr{E}$ potentiellement log-cristallin » implique « $\mathscr{E}$ de de Rham », et on a le résultat ci-dessous qui montre que la réciproque est vraie ; compte-tenu du lien entre représentations de G_K et fibrés G_K-équivariants sur X, cela fournit une preuve de « dR $\Rightarrow$ pst ».

Théorème 5.8. — ([**FF**, th. 10.6.10]) *Si $\mathscr{E}$ est de de Rham, alors $\mathscr{E}$ est potentiellement log-cristallin.*

Démonstration. — La preuve comporte trois étapes :

• Quitte à modifier $\mathscr{E}$ en ∞, ce qui ne fait que changer les pentes et la filtration finale, on peut supposer que $M^+_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E}) = \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes_K M_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E})^{G_K}$.

• Le cas isocline : si $\mathscr{E}$ est semi-stable de pente λ, alors $\mathscr{E} \cong V \otimes_{D_\lambda} \mathscr{O}(\lambda)$, où V est une D_λ^{op}-représentation de G_K de dimension finie (th. 5.3). Maintenant, $M^+_{\mathrm{dR}}(\mathscr{O}(\lambda))$ est une $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation triviale, et comme il en est de même de $M^+_{\mathrm{dR}}(\mathscr{E})$ par hypothèse, on en déduit que $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes V$ est une $\mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}}$-représentation triviale. D'après le th. 2.4, cela implique que V est potentiellement non ramifiée, et donc que $\mathscr{E}$ est potentiellement cristallin.

• Le cas général se traite par récurrence sur le nombre de pentes de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{E}$ n'a qu'une seule pente, on est dans le cas isocline qui a déjà été traité. Si $\mathscr{E}$ n'est pas isocline, on peut l'écrire comme une extension $\mathscr{E}_1 \to \mathscr{E} \to \mathscr{E}_2$ où les pentes de $\mathscr{E}_1$ sont strictement supérieures à celles de $\mathscr{E}_2$. L'hypothèse de récurrence implique que, quitte à remplacer K par une extension finie, il existe des (φ, N)-modules D_1, D_2 tels que $\mathscr{E}_i = \mathscr{E}(D_i)$, et on cherche à prouver que $\mathscr{E} = \mathscr{E}(D)$, où D est une extension $D_1 \to D \to D_2$ de (φ, N)-modules sur K_0. On peut, pour ce faire, supposer que k_K est algébriquement clos.

Si $\Delta = D_2^* \otimes D_1$, l'hypothèse sur les pentes de $\mathscr{E}_1$ et $\mathscr{E}_2$ implique que les pentes de frobenius de Δ sont < 0 et, en particulier, que $\varphi - 1$ est bijectif sur Δ. On a $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta) = \Delta^{\varphi = p^{-1}}$ [**FF**, lemme 10.6.12] :

$$\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) = \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta) \cong \frac{\{(x, y) \in \Delta \times \Delta,\ (p\varphi - 1)x = Ny\}}{\{(Nz, (\varphi - 1)z),\ z \in \Delta\}} \cong \Delta^{\varphi = p^{-1}}$$

l'inverse du dernier isomorphisme envoyant a sur la classe de $(a, 0)$, le précédent envoyant une extension $\Delta \to E \to \mathbf{1}$ sur $(Ne, (\varphi - 1)e)$, où $e \in E$ est un relèvement de $1 \in \mathbf{1}$. En particulier, $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ est un $\mathbf{Q}_p$-espace de dimension finie.

Par ailleurs (cf. [**FF**, prop. 9.2.3]),

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1) = H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1)) = H^1(G_K, (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}).$$

L'hypothèse que $\mathscr{E}$ est trivial en ∞ se traduit par le fait que sa classe est nulle dans $H^1(G_K, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \Delta)$, et donc appartient à

$$Z = \mathrm{Ker}\big(H^1(G_K, (\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}) \to H^1(G_K, \mathbf{B}^+_{\mathrm{dR}} \otimes \Delta)\big).$$

Soit $\sigma \mapsto c_\sigma$ un 1-cocycle sur G_K, à valeurs dans $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}$, dont la classe appartient à Z. Comme k_K est algébriquement clos, on peut décomposer le G_K-module $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta)^{N=0, \varphi=1}$ comme une somme directe d'espaces de la forme $(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log})^{N^k=0, \varphi^h=p^d}$, et on déduit de la prop. 2.17 qu'il existe $c \in \widetilde{\mathbf{B}}^+_{\log} \otimes \Delta$ tel que $c_\sigma = (\sigma - 1) \cdot c$ pour tout $\sigma \in G_K$. Alors $(\varphi - 1)c$ et Nc sont fixes par G_K, et donc appartiennent à Δ, et $(Nc, (\varphi - 1)c)$ définit un élément de $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ qui est nul si et seulement si $\sigma \mapsto c_\sigma$ est un cobord, ce qui fournit une injection de Z dans $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$.

Comme $\mathscr{E}(D)$ est trivial en ∞, si D est un (φ, N)-module, l'application naturelle $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) \to \mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_2, \mathscr{E}_1)$ fournit une injection de $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1)$ dans Z, et comme $\mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ est de dimension finie et isomorphe à $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1)$, les injections $\mathrm{Ext}^1(D_2, D_1) \to Z \to \mathrm{Ext}^1(\mathbf{1}, \Delta)$ sont des bijections. On en déduit que $\mathscr{E}$ est de la forme $\mathscr{E}(D)$, ce que l'on voulait. □

5.4. Descente à une extension de type de Lie. — Soit K_∞ une extension galoisienne de K, infiniment ramifiée, de type Lie (ce qui signifie que le groupe de Galois $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty/K)$ est un groupe de Lie p-adique). Une telle extension est perfectoïde, et son basculé $K_\infty^\flat$ est un sous-corps fermé de $C^\flat$ muni d'une action continue de Γ, et on a $\mathrm{Gal}(C^\flat/K_\infty^\flat) = \mathrm{Gal}(C/K_\infty)$.

L'anneau $\mathbf{B}_e(K_\infty^\flat)$ n'est plus principal, mais il est de Dedekind [**FF**, prop. 7.2.1]. Il s'ensuit que

$$X_{K_\infty} = \mathrm{Proj}(\oplus_{n\in\mathbf{N}}(\widetilde{\mathbf{B}}^+_{\mathrm{rig}}(K_\infty^\flat))^{\varphi=p^n})$$

est une courbe complète, et comme Γ agit sur K_∞, la courbe X_{K_∞} est munie d'une action de Γ.

Par ailleurs, l'inclusion de $K_\infty^\flat$ dans $C^\flat$ induit un morphisme $\mathscr{O}_{X_{K_\infty}} \to \mathscr{O}_X$ de faisceaux, et donc un morphisme $X \to X_{K_\infty}$.

Théorème 5.9. — ([**FF**, th. 10.1.5]) *Le morphisme $X \to X_{K_\infty}$ induit une équivalence de catégories de Harder-Narasimhan :*

$$\{\text{Fibrés } \Gamma\text{-équivariants sur } X_{K_\infty}\} \cong \{\text{Fibrés } G_K\text{-équivariants sur } X\}.$$

Remarque 5.10. — (i) Si on combine ce résultat avec le th. 5.1, on obtient une classification des $\mathbf{Q}_p$-représentations de G_K en termes de fibrés Γ-équivariants sur X_{K_∞}, semi-stables de pente 0.

(ii) Dans le diagramme de la rem. 4.9, on peut rajouter une action de G_K partout, et utiliser le th. 5.9 pour descendre à K_∞ ; on obtient le diagramme de catégories suivant :

$$\begin{tikzcd}
\{G_K\text{-Fibrés sur } X\} \arrow[r, "\sim"] & \{(G_K,B)\text{-paires}\} & \\
\{\Gamma\text{-Fibrés sur } X_{K_\infty}\} \arrow[u, "\wr"'] \arrow[d, "\mathrm{GAGA}"', "\wr"] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B^+(K_\infty^\flat)\} \arrow[l] \arrow[r, shift left] \arrow[d] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } K_0\} \arrow[l, shift left] \arrow[d] \\
\{\Gamma\text{-Fibrés sur } X^{\mathrm{an}}_{K_\infty}\} \arrow[r, equal] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B(K_\infty^\flat)\} \arrow[r, "\sim"] & \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \mathscr{R}(K_\infty^\flat)\}
\end{tikzcd}$$

Notons que $\{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B^+(K_\infty^\flat)\} \to \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } B(K_\infty^\flat)\}$ n'est pas essentiellement surjective contrairement au cas algébriquement clos.

(iii) Si V est de de Rham, et si $\mathscr{E}(V)$ désigne le fibré Γ-équivariant sur X_{K_∞} qui lui correspond, alors $H^0(X_{K_\infty} - \{\infty\}, \mathscr{E}(V)) = (\mathbf{B}_e \otimes V)^{\mathrm{Gal}(\overline{K}/K_\infty)}$ est lié de près à la cohomologie d'Iwasawa de V, que ce soit dans le cas cyclotomique [**10**] (où ce module est noté $D_{\mathrm{Iw}}(V)$) ou dans le cas d'une extension du type Lubin-Tate [**33**].

(iv) Si K_∞ est l'extension cyclotomique, on a $\mathscr{R}(K_\infty^\flat) = \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$, et on peut décompléter un (φ,Γ)-modules sur $\widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}$ en utilisant des traces de Tate, ce qui permet de compléter le diagramme précédent en rajoutant l'équivalence de catégories

$$\{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \widetilde{\mathbf{B}}_{\mathrm{rig},K}\} \cong \{(\varphi,\Gamma)\text{-modules sur } \mathbf{B}_{\mathrm{rig},K}\}$$

qui entre dans la preuve des th. 2.47 et 2.41. Si la dimension de Γ est ≥ 2, on ne dispose plus de traces de Tate (et on n'a pas d'équivalence de catégories comme ci-dessus), mais [**7**] propose une solution alternative.

Références

[FF] L. Fargues et J.-M. Fontaine, Courbes et fibrés vectoriels en théorie de Hodge p-adique, ce volume.

[1] Y. André, Filtrations de type Hasse-Arf et monodromie p-adique, Invent. math. **148** (2002), 285–317.

[2] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, thèse Orsay (2001).

[3] L. Berger, Représentations p-adiques et équations différentielles, Invent. math. **148** (2002), 219–284.

[4] L. Berger, Équations différentielles p-adiques et (φ, N)-modules filtrés, Astérisque **319** (2008), 13–38.

[5] L. Berger, Construction de (φ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires, Algebra Number Theory **2** (2008), 91–120.

[6] L. Berger, Presque $\mathbf{C}_p$-représentations et (φ, Γ)-modules, J. Inst. Math. Jussieu **8** (2009), 653–668.

[7] L. Berger, Multivariable (φ, Γ)-modules and locally analytic vectors, Duke Math. J. **165** (2016), 3567–3595.

[8] L. Berger et P. Colmez, Familles de représentations de de Rham et monodromie p-adique, Astérisque **319** (2008), 303–337.

[9] F. Cherbonnier, P. Colmez, Représentations p-adiques surconvergentes, Invent. math. **133** (1998), 581–611.

[10] P. Colmez, Théorie d'Iwasawa des représentations de de Rham d'un corps local, Ann. of Math. **148** (1998), 485–571.

[11] P. Colmez, Les conjectures de monodromie p-adique, Astérisque **290** (2003), 53–101.

[12] P. Colmez, Espaces de Banach de dimension finie, J. Inst. Math. Jussieu **1** (2002), 331–439.

[13] P. Colmez, Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham, Astérisque **319** (2008), 117–186.

[14] P. Colmez et J.-M. Fontaine, Construction des représentations p-adiques semi-stables, Invent. math. **140** (2000), 1–43.

[15] P. Colmez et W. Nizioł, Syntomic complexes and p-adic nearby cycles, Invent. math. **208** (2017).

[16] R. Crew, Finiteness theorems for the cohomology of an overconvergent isocrystal on a curve, Ann. ENS **31** (1998), 717–763.

[17] G. Faltings, Mumford-Stabilität in der algebraischen Geometrie, in *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Zürich, 1994), Vol. 1*, (1995), 648–655, Birkhäuser.

[18] L. Fargues, Groupes analytiques rigides p-divisibles, à paraître dans Math. Ann.

[19] L. Fargues, Quelques résultats et conjectures concernant la courbe. Astérisque **369** (2015), 325–374.

[20] L. Fargues, Geometrization of the local Langlands correspondence, an overview, arXiv :1602.00999.

[21] L. Fargues, Simple connexité des fibres d'une application d'Abel-Jacobi et corps de classe local, prépublication 2017.

[22] L. Fargues et P. Scholze, Geometrization of the local Langlands correspondence, en préparation.

[23] J.-M. Fontaine, Modules galoisiens, modules filtrés et anneaux de Barsotti-Tate, Astérisque **65** (1979), 3–80.

[24] J.-M. Fontaine, Sur certains types de représentations p-adiques du groupe de Galois d'un corps local ; construction d'un anneau de Barsotti-Tate, Ann. of Math. **115** (1982), 529–577.

[25] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques des corps locaux. I, in *The Grothendieck Festschrift, Vol. II*, Progr. Math. **87** (1990) 249–309, Birkhäuser.

[26] J.-M. Fontaine, Le corps des périodes p-adiques, avec un appendice de P. Colmez, Astérisque **223** (1994), 59–111.

[27] J.-M. Fontaine, Représentations p-adiques semi-stables, Astérisque **223** (1994), 113–184.

[28] J.-M. Fontaine, Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques, Astérisque **295** (2004), 1–115.

[29] J.-M. Fontaine, Presque $\mathbf{C}_p$-représentations, Kazuya Kato's fiftieth birthday, Doc. Math., Extra Vol. (2003), 285–385.

[30] J.-M. Fontaine, Représentations de de Rham et représentations semi-stables, prépublication Orsay 2004-12 (2004), 20p.

[31] J.-M. Fontaine, et G. Laffaille, Constructions de représentations p-adiques, Ann. ENS **15** (1982), 547–608.

[32] O. Forster, Zur Theorie der Steinschen Algebras und Moduln, Math. Z. **97** (1967), 376–405.

[33] L. Fourquaux, Logarithme de Perrin-Riou pour des extensions associées à un groupe de Lubin-Tate, thèse Paris 6 (2005).

[34] L. Fourquaux, Applications $\mathbf{Q}_p$-linéaires, continues et Galois-équivariantes de $\mathbf{C}_p$ dans lui-même. J. Number Theory **129** (2009), 1246–1255.

[35] U. Hartl et R. Pink, Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc, Compos. Math. **140** (2004), 689–716.

[36] O Hyodo, $H^1_g(K,V) = H^1_{\mathrm{st}}(K,V)$, *proceedings of a symposium on arithmetic geometry*, ed. K. Kato, M. Kurihara, T. Saito, Univ. Tokyo (1991).

[37] K. Kedlaya, A p-adic monodromy theorem, Ann. of Math. **160** (2004), 93–184.

[38] K. Kedlaya, Slope filtrations revisited, Doc. math. **10** (2005), 447–525 ; errata, ibid. **12** (2007), 361-362.

[39] K. Kedlaya, Slope filtrations for relative Frobenius, Astérisque **319** (2008), 259–301.

[40] K. Kedlaya et M. Temkin, Endomorphisms of power series fields and residue fields of Fargues-Fontaine curves, arXiv :1506.00742v6 (2016).

[41] M. Kisin, Crystalline representations and F-crystals, in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. in Math. **253** (2006) 459–496, Birkhäuser.

[42] V. Lafforgue, Chtoucas pour les groupes réductifs et paramétrisation de Langlands globale, arXiv :1209.5352.

[43] M. Lazard, Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. IHES **14** (1962), 47–75.

[44] A.-C. Le Bras, Espaces de Banach-Colmez et faisceaux cohérents sur la courbe de Fargues-Fontaine, en préparation.

[45] Z. Mebkhout, Analogue p-adique du théorème de Turrittin et le théorème de la monodromie p-adique, Invent. math. **148** (2002), 319–351.

[46] J. Nekovář, On p-adic height pairings, In *Séminaire de Théorie des Nombres, Paris, 1990-91*, Progr. in Math. **108** (1993), 127–202, Birkhäuser.

[47] W. Nizioł, Geometric syntomic cohomology and vector bundles on the Fargues-Fontaine curve, preprint 2016.

[48] J. Plût, Espaces de Banach analytiques p-adiques et espaces de Banach-Colmez, thèse Orsay (2009).

[49] J. Plût, Analytic p-adic Banach spaces and the fundamental lemma of Colmez and Fontaine, arXiv :1610.09821.

[50] J. Plût, Slope filtrations on Banach-Colmez spaces, arXiv :1610.09822.

[51] S. Sen, Lie algebras of Galois groups arising from Hodge-Tate modules, Ann. of Math. **97** (1973), 160–170.

[52] S. Sen, Continuous cohomology and p-adic Galois representations, Invent. math. **62** (1980/81), 89–116.

[53] P. Scholze, Perfectoid spaces, Publ. IHES **116** (2012), 245–313.

[54] P. Scholze, p-adic Geometry, cours à Berkeley, automne 2014, notes disponibles à `http://math.bu.edu/people/jsweinst/`

[55] N. Tsuzuki, Finite local monodromy of overconvergent unit-root F-isocrystals on a curve, Amer. J. Math. **120** (1998), 1165–1190.

[56] J. Weinstein, The Galois group of $\mathbf{Q}_p$ as a geometric fundamental group, Int. Math. Res. Not. (2016).

Pierre Colmez, C.N.R.S., Institut de mathématiques de Jussieu, 4 place Jussieu, 75005 Paris, France • *E-mail :* `colmez@math.jussieu.fr`

CHAPITRE 1

FONCTIONS HOLOMORPHES DE LA VARIABLE p ET ANNEAUX DE PÉRIODES

Introduction

L'un des anneaux de base intervenant en théorie de Hodge p-adique est l'anneau $B^+_{cris}(\mathbb{C}_p)$ des périodes cristallines. L'étude de l'arithmétique des représentations galoisiennes amène souvent à introduire une variable auxiliaire provenant de la théorie du corps des normes, par exemple :

— $[\underline{p}] \in B^+_{cris}$ où $\underline{p}$ est tel que $\underline{p}^{(0)} = p$ et est associé à l'extension arithmétiquement profinie $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$.

— $u_\epsilon = 1 + [\epsilon^{1/p}] + \cdots + [\epsilon^{\frac{p-1}{p}}] \in B^+_{cris}$ où ϵ est un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ associé à l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$.

L'un des principes de base pour l'étude des représentations galoisiennes consiste alors à interpréter les éléments de B^+_{cris} en termes de fonctions holomorphes de cette variable auxiliaire. C'est un des procédés de base de la théorie des φ-modules sur l'anneau de Robba : à certaines fonctions holomorphes à coefficients dans $\mathbb{Q}_p$ sur une couronne on associe une période par évaluation sur une des variables auxiliaires précédentes.

Il se trouve que pour l'étude de l'aspect arithmétique de la théorie de Hodge p-adique on peut remplacer l'anneau B^+_{cris} par l'anneau $B^+_{rig} = \cap_{n\geq 0}\varphi^n(B^+_{cris})$, le plus grand sous-anneau sur lequel le Frobenius cristallin est bijectif. Un de ses premiers avantages est qu'il ne dépend que du corps valué complet algébriquement clos de caractéristique p

$$F = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} \mid x^{(n)} \in \mathbb{C}_p, (x^{(n+1)})^p = x^{(n)}\right\}.$$

Mais de plus, il peut s'interpréter comme une algèbre de « fonctions holomorphes de la variable p à coefficients dans F ». C'est le point de vue que nous développons ici. Plus précisément, d'un point de vue « classique » on interpréterait la période

$$\sum_{n\geq 0} a_n \frac{u_\epsilon^n}{n!} \in B^+_{cris},\ a_n \in \mathbb{Z}_p$$

comme la fonction holomorphe $\sum_{n\geq 0} a_n \frac{X^n}{n!}$ évaluée en u_ϵ. Du point de vue de ce texte, la variable n'est pas u_ϵ mais p et les coefficients sont les $[x]$, $x \in F$. L'un des avantages est que cette variable est intrinsèque.

Plus précisément, nous définissons et étudions dans ce chapitre de telles algèbres de Fréchet de « fonctions holomorphes » à partir de n'importe quel corps F valué complet parfait de caractéristique p. Il se trouve que de nombreuses propriétés des fonctions holomorphes « classiques » d'une variable sur une couronne, telles qu'elles apparaissent dans [**49**], se transposent dans ce contexte (on renvoie au chapitre 1 de [**22**] pour une introduction aux résultats de [**49**] de notre point de vue). Bien sûr, la plupart de ces anneaux ne sont pas nouveaux et apparaissent déjà dans les travaux de Berger, Colmez et Kedlaya sous d'autres noms ([**11**],[**4**],[**42**] par exemple). Ceci dit, le point de vue qui consiste à les étudier comme fonctions de la variable p est nouveau. Ce point de vue est particulièrement agréable grâce à la multiplicativité des normes de Gauss (def. 1.4.1, prop. 1.4.9) qui n'avait apparemment pas été remarquée avant ce travail. Grâce à cela on dispose d'une bonne théorie des polygones de Newton et de nombreux résultats concernant les fonctions holomorphes non-archimédiennes sur un disque épointé s'adaptent à ce contexte.

1.1. Hypothèses et notations

La donnée de départ est la suivante. Soit E un corps valué complet de valuation discrète de corps résiduel le corps fini $\mathbb{F}_q$, $q = p^{f_E}$. On choisit une uniformisante π de $\mathcal{O}_E$ qu'on notera parfois π_E lorsqu'on voudra souligner sa dépendance en E. Si E est de caractéristique p alors $E = \mathbb{F}_q((\pi))$. S'il est de caractéristique 0 alors $E|\mathbb{Q}_p$. On notera Frob_q le morphisme de Frobenius à la puissance f_E d'une $\mathcal{O}_E$-algèbre de caractéristique p.

Soit F un corps parfait de caractéristique p extension de $\mathbb{F}_q$, valué complet pour une valuation non triviale

$$v : F \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}.$$

On note $|.| = q^{-v(.)}$ la valeur absolue associée, $\mathfrak{m}_F = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) > 0\}$ l'idéal maximal de $\mathcal{O}_F$ et k_F son corps résiduel. On utilise parfois la notation ϖ_F pour désigner n'importe quel élément de F vérifiant $0 < |\varpi_F| < 1$.

1.2. $\mathcal{O}_E$-vecteurs de Witt

Dans cette section on suppose E de caractéristique zéro. Tous les résultats de cette section ne seront pas utiles dans la suite. Le but est de faire le point sur les vecteurs de Witt ramifiés. Lorsque R est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite on a $W_{\mathcal{O}_E}(R) = W(R) \otimes_{W(\mathbb{F}_q)} \mathcal{O}_E$ et le lecteur peut sauter cette section et prendre ceci comme définition des vecteurs de Witt ramifiés lorsqu'on les évalue sur une telle R.

1.2.1. Le cas « classique »([15]). — Pour tout $n \geq 0$ posons

$$\mathcal{W}_{n,\pi} = \sum_{i=0}^{n} \pi^i X_i^{q^{n-i}} \in \mathcal{O}_E[X_0, \ldots, X_n].$$

Soit le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F} : \mathcal{O}_E - \text{algèbres} & \longrightarrow & \text{Ensembles} \\ A & \longmapsto & A^{\mathbb{N}}. \end{array}$$

On notera $[x_i]_{i\geq 0}$ un élément de $\mathscr{F}(A)$, où pour tout i, $x_i \in A$.

Lemme 1.2.1. — *Il existe une unique factorisation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E\text{-algèbres} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "W_{\mathcal{O}_E,\pi}"'] & & \text{Ensembles} \\ & \mathcal{O}_E\text{-algèbres} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

telle que la transformation naturelle en A

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W}_{\pi,A} : W_{\mathcal{O}_E,\pi}(A) & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}} \\ [a_i]_{i\geq 0} & \longmapsto & \big(\mathcal{W}_{n,\pi}(a_0, \ldots, a_n)\big)_{n\geq 0} \end{array}$$

soit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres.

Démonstration. — Cela résulte de ce que si A est une $\mathcal{O}_E$-algèbre sans p-torsion munie d'un endomorphisme φ relevant Frob_q modulo π, $\mathcal{W}_{\pi,A}$ est injectif d'image

$$\{(x_i)_{i\geq 0} \in A^{\mathbb{N}} \mid x_{i+1} \equiv \varphi(x_i) \bmod \pi^{i+1}\}.$$

□

La description précédente de l'image de $\mathcal{W}_{\pi,A}$ lorsque A est sans p-torsion munie d'un relèvement de Frobenius ne fait pas intervenir π mais l'idéal engendré par celui-ci. Il en résulte que si π' est une autre uniformisante de $\mathcal{O}_E$, il existe un unique isomorphisme de foncteurs en $\mathcal{O}_E$-algèbres

$$u_{\pi,\pi'} : W_{\mathcal{O}_E,\pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E,\pi'}$$

tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{O}_E,\pi}(-) \arrow[dr, "\mathcal{W}_\pi"] \arrow[dd, "u_{\pi,\pi'}"', "\simeq"] & \\ & (-)^{\mathbb{N}} \\ W_{\mathcal{O}_E,\pi'}(-) \arrow[ur, "\mathcal{W}_{\pi'}"'] & \end{tikzcd}$$

On a bien sûr $u_{\pi',\pi''} \circ u_{\pi,\pi'} = u_{\pi,\pi''}$.

Définition 1.2.2. — On pose

$$W_{\mathcal{O}_E} = \varprojlim_{\pi} W_{\mathcal{O}_E,\pi} : \mathcal{O}_E - \text{algèbres} \longrightarrow \mathcal{O}_E - \text{algèbres}$$

où la limite projective est prise suivant toutes les uniformisantes de $\mathcal{O}_E$. On note

$$\mathcal{W} : W_{\mathcal{O}_E}(A) \to A^{\mathbb{N}}$$

pour le morphisme composé $W_{\mathcal{O}_E}(A) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E,\pi}(A) \xrightarrow{\mathcal{W}_\pi} A^{\mathbb{N}}$.

Comme l'anneau $W_{\mathcal{O}_E}$, le morphisme

$$\mathcal{W} : W_{\mathcal{O}_E}(-) \longrightarrow (-)^{\mathbb{N}}$$

ne dépend pas du choix d'une uniformisante.

Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre. Pour $a \in A$ on notera $[a] = [a, 0, \ldots, 0, \ldots] \in W_{\mathcal{O}_E,\pi}(A)$. On vérifie aussitôt que $u_{\pi,\pi'}([a]) = [a]$ qui définit donc une application relèvement de Teichmüller

$$[-] : A \to W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

indépendante du choix de l'uniformisante π. Il existe un unique endomorphisme

$$F : W_{\mathcal{O}_E}(-) \to W_{\mathcal{O}_E}(-)$$

tel que si $a \in W_{\mathcal{O}_E}(A)$, $\mathcal{W}(a) = (x_i)_{i\geq 0}$ alors $\mathcal{W}(Fa) = (x_{i+1})_{i\geq 0}$. Comme le relèvement de Teichmüller $[-]$, cet endomorphisme F ne dépend pas du choix d'une uniformisante. Notons

$$V_\pi : W_{\mathcal{O}_E}(-) \to W_{\mathcal{O}_E}(-)$$

déduit du décalage $[a_i]_{i\geq 0} \to [0, a_1, \ldots, a_i, \ldots]$ sur $W_{\mathcal{O}_E,\pi}$ et de l'isomorphisme $W_{\mathcal{O}_E} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E,\pi}$. Contrairement à $[-]$ et F il dépend du choix de π. On a alors les propriétés :

- $FV_\pi = \pi$
- $V_{\pi'} = \frac{\pi'}{\pi} V_\pi$
- $V_\pi(F(x).y) = x.V_\pi(y)$
- des deux propriétés précédentes il résulte que pour tout $n \geq 1$, $V_\pi^n W_{\mathcal{O}_E}$ est un idéal de $W_{\mathcal{O}_E}$ indépendant du choix de l'uniformisante π
- $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est V_π-adiquement séparé complet : si $W_{\mathcal{O}_E,n}(A) = W_{\mathcal{O}_E}(A)/V_\pi^n W_{\mathcal{O}_E}(A)$ alors
$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\geq 1} W_{\mathcal{O}_E,n}(A).$$
- tout élément $a \in W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n\geq 0} V_\pi^n[a_n]$
- si A est une $\mathbb{F}_q$-algèbre, $V_\pi F = \pi$ et $F(\sum_{n\geq 0} V_\pi[a_n]) = \sum_{n\geq 0} V_\pi[a_n^q]$

— si A est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est π-adiquement complet sans π-torsion et tout élément s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$. De plus, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est à isomorphisme unique près l'unique relévement π-adique sans π-torsion de la $\mathcal{O}_E$-algèbre parfaite A.

Soit $E'|E$. On vérifie facilement le lemme qui suit.

Lemme 1.2.3. — *Il existe un unique morphisme naturelle de $\mathcal{O}_E$-algèbres en la $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre A*

$$u : W_{\mathcal{O}_E}(A) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_{E'}}(A)$$

tel que la diagramme suivante commute

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{O}_E}(A) \arrow[rr] \arrow[dr, "(\mathcal{W}_{f_{E'/E}n})_{n\geq 0}"'] & & W_{\mathcal{O}_{E'}}(A) \arrow[dl, "\mathcal{W}=(\mathcal{W}_n)_{n\geq 0}"] \\ & A^{\mathbb{N}} & \end{tikzcd}$$

On a $u([a]) = [a]$, $u(V_\pi x) = \frac{\pi}{\pi'}V_{\pi'}(F^{f_{E'/E}-1}u(x))$ et $u(F^{f_{E'/E}}x) = Fu(x)$.

Rappelons qu'il y a un unique morphisme naturel de $\mathcal{O}_E$-algèbres

$$\Delta : W_{\mathcal{O}_E}(-) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(W_{\mathcal{O}_E}(-))$$

tel que $\mathcal{W}(\Delta(x)) = (F^n x)_{n\geq 0}$.

Si $E'|E$ comme précédemment, $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$ est l'extension résiduelle et $E'_0|E$ est l'extension maximale non-ramifiée de E dans E', il y a une identification $W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'}) = \mathcal{O}_{E'_0}$. Si A est une $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre il y a donc un morphisme

$$\mathcal{O}_{E'_0} = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'}) \xrightarrow{\Delta} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{E'_0}) \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

qui fait de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ une $\mathcal{O}_{E'_0}$-algèbre. Le morphisme naturel $W_{\mathcal{O}_E}(A) \to W_{\mathcal{O}'_E}(A)$ est alors un morphisme de $\mathcal{O}_{E'_0}$-algèbre et on en déduit donc un morphisme naturel en la $\mathcal{O}_{E'}$-algèbre A,

$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_{E'}}(A).$$

Via ce morphisme, $F_E^{f_{E'/E}} \otimes Id$ correspond à $F_{E'}$.

Si A est une $\mathbb{F}_{q'}$-algèbre parfaite, la réduction modulo π' des deux algèbres précédentes coïncide avec A. Utilisant que $W_{\mathcal{O}'_E}(A)$ est l'unique relévement π'-adique sans π'-torsion de A, on en déduit que dans ce cas là c'est un isomorphisme :

$$W_{\mathcal{O}_E}(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_{E'}}(A).$$

Ainsi, si E_0 désigne l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ dans E, $W = W_{\mathbb{Q}_p}$ les vecteurs de Witt-usuels, pour toute $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite A on a un isomorphisme canonique

$$W(A) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(A)$$

via lequel

$$\begin{array}{rcl} [a]\otimes 1 & \mapsto & [a] \\ F^{f_E}\otimes Id & \leftrightarrow & F \end{array}$$

1.2.2. Le cas « tordu » : déformation du relèvement de Teichmüller. — Le relèvement de Teichmüller sur les vecteurs de Witt est adapté au groupe multiplicatif $\mathbb{G}_m$ au sens où $[xy]=[x][y]$. Cependant lorsqu'on travaille avec les $\mathcal{O}_E$-vecteurs de Witt, $W_{\mathcal{O}_E}$, il est parfois plus commode de travailler avec un autre relèvement de Teichmüller adapté à un groupe de Lubin-Tate associé au corps E.

Soit $Q\in\mathcal{O}_E[X]$ un polynôme tel que $Q\equiv X^q$ modulo π. Posons $Q_0=X$ et pour $n\geq 1$,

$$Q_n=\underbrace{Q\circ\cdots\circ Q}_{n\text{-fois}}.$$

Soit

$$\mathcal{W}_{n,Q,\pi}=\sum_{i=0}^{n}\pi^i Q_{n-i}(X_i)\in\mathcal{O}_E[X_0,\ldots,X_n].$$

Posons comme précédemment

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{F}:\mathcal{O}_E\text{-algèbres} & \longrightarrow & \text{Ensembles} \\ A & \longmapsto & A^{\mathbb{N}}. \end{array}$$

Proposition 1.2.4. —

1. *Il existe une unique factorisation*

$$\begin{tikzcd} \mathcal{O}_E\text{-algèbres} \arrow[rr, "\mathscr{F}"] \arrow[dr, "W_{\mathcal{O}_E,Q,\pi}"'] & & \text{Ensembles} \\ & \mathcal{O}_E\text{-algèbres} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

telle que la transformation naturelle en A

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{W}_{Q,\pi,A}:W_{\mathcal{O}_E,Q,\pi}(A) & \longrightarrow & A^{\mathbb{N}} \\ {[a_i]}_{i\geq 0} & \longmapsto & \big(\mathcal{W}_{n,Q,\pi}(a_0,\ldots,a_n)\big)_{n\geq 0} \end{array}$$

soit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres.

2. *Il existe un unique isomorphisme* $u_{Q,\pi} : W_{\mathcal{O}_E,Q,\pi} \to W_{\mathcal{O}_E,\pi}$ *tel que le diagramme suivant commute*

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{O}_E,Q,\pi}(-) \arrow[dr, "\mathcal{W}_{Q,\pi}"] \arrow[dd, "u_{Q,\pi}"', "\simeq"] & \\ & (-)^{\mathbb{N}} \\ W_{\mathcal{O}_E,\pi}(-) \arrow[ur, "\mathcal{W}_{\pi}"'] & \end{tikzcd}$$

Cette proposition résulte du lemme qui suit.

Lemme 1.2.5. — *Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre sans π-torsion munie d'un relèvement φ de* Frob_q *mod π. Alors, $W_{Q,\pi,A}$ est injectif d'image*

$$\operatorname{Im} \mathcal{W}_{Q,\pi,A} = \{(x_i)_{i\in\mathbb{N}} \mid x_{i+1} \equiv \varphi(x_i) \ \mathit{mod}\ \pi^{i+1}\}.$$

On déduit ce lemme du lemme élémentaire suivant.

Lemme 1.2.6. — *Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre, $i \geq 1$ et $x, y \in A$ tels que $x \equiv y\,[\pi^i]$. Alors, $Q(x) \equiv Q(y)\,[\pi^{i+1}]$.*

Composant les isomorphismes $W_{\mathcal{O}_E,Q,\pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E,\pi} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}$ on déduit la proposition suivante.

Proposition 1.2.7. — *Il existe une unique application naturelle en la $\mathcal{O}_E$-algèbre A*

$$[-]_Q : A \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(A),$$

vérifiant :

— $\mathcal{W}([a]_Q) = (Q_n(a))_{n\geq 0}$

— $Q([a]_Q) = [Q(a)]_Q$

— *Tout élément de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme*

$$\sum_{n\geq 0} V_\pi^n [a_n]_Q.$$

— *Si A est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite, tout élément de $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ s'écrit de façon unique sous la forme $\sum_{n\geq 0}[x_n]_Q\pi^n$, le Q-relèvement de Teichmüller $x \mapsto [x]_Q$ est l'unique relèvement vérifiant $Q([x]_Q) = [x^q]_Q$ et on a*

$$[x]_Q = \lim_{n\to+\infty} Q_n\big([x^{q^{-n}}]\big).$$

Plus généralement, si $x \in A$, $\hat{x}_n$ est un relèvement quelconque de $x^{q^{-n}}$ alors

$$[x]_Q = \lim_{n\to+\infty} Q_n(\hat{x}_n).$$

Exemple 1.2.8. —

— Si $Q(X) = X^q$ on a $[a]_Q = [a]$.

— Si $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q(X) = (1+X)^p - 1$ on a $[a]_Q = [1+a] - 1$.

Le relèvement de Teichmüller classique est multiplicatif, $[xy] = [x][y]$ et se comporte donc bien vis à vis de la loi du groupe $\mathbb{G}_m$. Supposons maintenant de plus que $Q(X) \equiv \pi X \bmod X^2$. Soit $\mathcal{LT}_Q \in \mathcal{O}_E[\![X,Y]\!]$ la loi de groupe formel de Lubin-Tate telle que $[\pi]_{\mathcal{LT}_Q} = Q$. Soit A une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite. Soient $x, y \in A$ tels que A soit séparé complet pour la topologie (x,y)-adique. Il est aisé de vérifier qu'alors, $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est séparé complet pour la topologie $([x]_Q, [y]_Q)$-adique (car $W_{\mathcal{O}_E}(A)$ est séparé complet pour la topologie $([x],[y],\pi)$-adique et $([x]_Q,[y]_Q,\pi) = ([x],[y],\pi)$).

Lemme 1.2.9. — *Sous les hypothèses précédentes,*

$$\mathcal{LT}_Q([x]_Q,[y]_Q) = \big[\mathcal{LT}_Q(x,y)\big]_Q.$$

Démonstration. Pour tout n, $z_n = \mathcal{LT}_Q\big(\big[x^{q^{-n}}\big]_Q, \big[y^{q-n}\big]_Q\big)$ est un relèvement de $\mathcal{LT}_Q\big(x^{q^{-n}}, y^{q^{-n}}\big)$. On a donc

$$\big[\mathcal{LT}_Q(x,y)\big]_Q = \lim_{n\to+\infty} Q_n(z_n).$$

Le résultat s'en déduit facilement puisque $Q_n(\mathcal{LT}_Q(X,Y)) = \mathcal{LT}_Q(Q_n(X), Q_n(Y))$. □

Corollaire 1.2.10. — *Le Q-relèvement de Teichmüller définit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-modules*

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathcal{LT}_Q}{+}\big) & \hookrightarrow & \big(W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F), \underset{\mathcal{LT}_Q}{+}\big) \\ x & \longmapsto & [x]_Q. \end{array}$$

Plus généralement, si $\mathcal{LT}$ est n'importe quelle loi de groupe formelle de Lubin-Tate associée à E, c'est à dire telle que $[\pi]_{\mathcal{LT}} \in \mathcal{O}_E[\![X]\!]$ ne soit pas nécessairement un polynôme, on peut définir pour $x \in \mathfrak{m}_F$

$$[x]_{\mathcal{LT}} = \lim_{n\to+\infty} [\pi^n]_{\mathcal{LT}}\big(\big[x^{q^{-n}}\big]\big),$$

suite qui converge pour la topologie faible (cf. 1.4.3). Cela définit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-modules

$$\begin{array}{ccc} \big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathcal{LT}}{+}\big) & \hookrightarrow & \big(W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F), \underset{\mathcal{LT}}{+}\big) \\ x & \longmapsto & [x]_{\mathcal{LT}}. \end{array}$$

1.3. Les anneaux $\mathscr{E}$, B^b et $B^{b,+}$

Dans cette section on définit les anneaux que nous utiliserons plus tard pour définir nos algèbres de « fonctions holomorphes » par un procédé de complétion.

Puisque F est parfait, la définition suivante a bien un sens.

Définition 1.3.1. — On note $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ l'unique $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adiquement complète sans π-torsion tel que $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}/\pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}} = F$. On note $\mathscr{E} = \mathcal{O}_{\mathscr{E}}[\frac{1}{\pi}]$.

En d'autres termes, $\mathscr{E}|E$ est l'extension complète non-ramifiée induisant l'extension $F|\mathbb{F}_q$ au niveau des corps résiduels. Il existe un unique relèvement multiplicatif

$$[-] : F \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathscr{E}}.$$

et tout élément de $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ s'écrit de façon unique sous la forme

$$\sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n, \quad x_n \in F.$$

Définition 1.3.2. — On note

$$\begin{aligned} B^b &= \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid \sup_n |x_n| < +\infty \Big\} \\ B^{b,+} &= \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid x_n \in \mathcal{O}_F \Big\} \\ \mathbf{A} &= \Big\{ \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid x_n \in \mathcal{O}_F \}. \end{aligned}$$

Dans la littérature « classique » de théorie de Hodge p-adique l'anneau $\mathbf{A}$ est noté A_{inf}, on a préféré ici l'écriture plus compacte $\mathbf{A}$. On a les formules

$$\begin{aligned} B^b &= B^{b,+}[\tfrac{1}{[\varpi_F]}] \\ B^{b,+} &= \mathbf{A}[\tfrac{1}{\pi}]. \end{aligned}$$

Deux cas se présentent :

1. Si E est de caractéristique p alors $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ et $[-]$ est additif. Il définit un plongement de F dans $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathscr{E}} &= F\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q}\mathcal{O}_E = \varprojlim_{n \geq 1} F \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathcal{O}_E/\pi^n\mathcal{O}_E \\ &= F[\![\pi]\!] \end{aligned}$$

   où dans la complétion F est muni de la topologie discrète et $\mathcal{O}_E$ de la topologie π-adique. De plus,

$$\begin{aligned} \mathscr{E} &= F((\pi)) \\ \mathbf{A} &= \mathcal{O}_F\hat{\otimes}\mathcal{O}_E = \mathcal{O}_F[\![\pi]\!]. \end{aligned}$$

2. Si $E|\mathbb{Q}_p$,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\mathscr{E}} &= W_{\mathcal{O}_E}(F) \\ \mathbf{A} &= W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F). \end{aligned}$$

Les lois d'addition et de multiplication des éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(F)$ sont données par des polynômes généralisés :

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n+\sum_{n\geq 0}[y_n]\pi^n &= \sum_{n\geq 0}\big[P_n(x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_n)\big]\pi^n\\ \Big(\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n\Big).\Big(\sum_{n\geq 0}[y_n]\pi^n\Big) &= \sum_{n\geq 0}\big[Q_n(x_0,\dots,x_n,y_0,\dots,y_n)\big]\pi^n\end{aligned}$$

avec

$$P_n,Q_n\in\mathbb{F}_q\big[X_i^{1/p^\infty},Y_j^{1/p^\infty}\big]_{0\leq i,j\leq n}.$$

Convention : dans la suite, lorsqu'on voudra marquer la dépendance de ces anneaux en E, F ou bien les deux on écrira $\mathscr{E}_F$, $\mathscr{E}_E$, $\mathscr{E}_{F,E}$...

Définition 1.3.3. — On note φ l'unique automorphisme de $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$ relevant Frob_q sur F.

Il stabilise tous les anneaux précédents. On a alors

$$\varphi\Big(\sum_{n\gg-\infty}[x_n]\pi^n\Big)=\sum_{n\gg-\infty}[x_n^q]\pi^n.$$

Remarque 1.3.4. — Il faut penser aux élément de B^b comme étant des fonctions holomorphes de la variable π. De ce point de vue, φ est un Frobenius arithmétique.

Remarque 1.3.5. — Soit $K|\mathbb{F}_q$ un corps. Puisque $\mathbb{F}_q$ est parfait, K est une limite inductive filtrante de $\mathbb{F}_q$-algèbres lisses et donc

$$\mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q}\xrightarrow{\sim}\Omega^1_{K/\mathbb{F}_q}[0].$$

Puisque $H^{-2}(\mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q})=0$, $K|\mathbb{F}_q$ se relève en une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique plate $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}$, un *anneau de Cohen*. Puisque $H^{-1}(\mathbb{L}_{K/\mathbb{F}_q})=0$ deux tels relèvements sont isomorphes et de plus le Frobenius Frob_q de K se relève à $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}$. Néanmoins si K n'est pas parfait, $\Omega^1_{K/\mathbb{F}_q}$ peut être non-nul et *deux tels relèvements ne sont pas canoniquement isomorphes*. De même, *il peut exister plusieurs relèvements du Frobenius*. C'est par exemple le cas si $K=\mathbb{F}_q((T))$ et $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}=\widehat{\mathcal{O}_E[\![X]\!][\frac{1}{X}]}$: on peut prendre $X\mapsto X^q$ ou bien $X\mapsto(1+X)^q-1$ comme relèvements de Frobenius. Dans notre situation F parfait, tout est défini à isomorphisme unique près et *le relèvement φ de Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_F}$ est canonique.*

On remarquera également que si φ est un relèvement de Frobenius sur $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}$ il y a alors un isomorphisme canonique

$$\widehat{\varinjlim_{\varphi}\ \mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}}\xrightarrow{\sim}\mathcal{O}_{\mathscr{E}_{K^{1/p^\infty}}}.$$

Cela induit une bijection entre les couples $(\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K},\varphi)$ où φ est un relèvement de Frobenius sur un anneau de Cohen et les couples $(\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K},\iota)$ où ι est un plongement dans

l'anneau canonique $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_{K^{1/p^\infty}}}$

$$\iota : \mathcal{O}_{\mathscr{E}_K} \hookrightarrow \mathcal{O}_{\mathscr{E}_{K^{1/p^\infty}}}$$

induisant l'inclusion $K^{1/p^\infty}|K$ modulo π et dont l'image est stable par le Frobenius canonique de $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_{K^{1/p^\infty}}}$. Dans les deux exemples précédents, cela correspond aux plongements $X \mapsto [T]$ et $X \mapsto [T+1]-1$.

1.4. Normes de Gauss

Dans cette section on définit et étudie les propriétés de base des normes de Gauss que nous utiliserons afin de définir par complétion nos « algèbres de fonctions holomoprhes ». Le résultat principal est la proposition 1.4.9.

1.4.1. Définition et premières propriétés. —

***Définition 1.4.1* (Normes et valuations de Gauss).** — Pour $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^b$ et $\rho \in]0,1]$, $r \in [0,+\infty[$, on note

$$\begin{aligned} |x|_\rho &= \sup_n |x_n|\rho^n \\ v_r(x) &= \inf_n v(x_n) + nr. \end{aligned}$$

On a donc si $\rho = q^{-r}$, $|.|_\rho = q^{-v_r(.)}$. On remarquera que pour $\rho < 1$, resp. $r > 0$, la borne supérieure précédente, resp. la borne inférieure, est atteinte. *Ce n'est pas le cas en général pour* $|.|_1$ *et* v_0. Remarquons les formules suivantes

$$\begin{aligned} |x|_1 &= \lim_{\rho \to 1} |x|_\rho \\ v_0(x) &= \lim_{r \to 0} v_r(x) \\ \lim_{r \to +\infty} \frac{v_r(x)}{r} &= v_\pi(x). \end{aligned}$$

Le comportement vis à vis du Frobenius est donné par les formules

$$\begin{aligned} |\varphi(x)|_\rho &= |x|^q_{\rho^{1/q}} \\ v_r(\varphi(x)) &= q v_{\frac{r}{q}}(x). \end{aligned}$$

Afin d'établir les propriétés de base de ces fonctions nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4.2. — *Pour* $k \geq 0$ *et* $x = \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathbf{A}$ *posons*

$$N_k(x) = \sup_{0 \leq n \leq k} |x_n|.$$

1. *Pour* $\gamma \in [0,1] \cap |F|$, $N_k(x) \leq \gamma$ *si et seulement si pour* $a \in \mathcal{O}_F$ *satisfaisant* $\gamma = |a|$ *on a*

$$x \in \mathbf{A}.[a] + \mathbf{A}\pi^{k+1}$$

2. *La fonction N_k ne dépend pas du choix de l'uniformisante π.*
3. *On a $N_k(x+y) \leq \sup\{N_k(x), N_k(y)\}$.*
4. *On a*
$$N_k(xy) \leq \sup_{i+j=k} N_i(x)N_j(y).$$
5. *On a*
$$|x|_\rho = \sup_{k\geq 0} N_k(x)\rho^k.$$

Démonstration. — Le point (1) résulte de la multiplicativité du Teichmüller et de l'unicité du développement π-adique. Le point (2) résulte du point (1) car l'idéal $\mathbf{A}[a]+\mathbf{A}\pi^{k+1}$ ne dépend pas du choix de π. Pour le point (3), si $x = \sum_n [x_n]\pi^n$ et $y = \sum_n [y_n]\pi^n$, $(a) = (x_n)_{n\leq k}$ et $(b) = (b_n)_{n\leq k}$ comme idéaux de $\mathcal{O}_F$, $(x_n, y_m)_{n,m\leq k} = (a,b) = (c)$, alors $x+y \in \mathbf{A}[c] + \pi^{k+1}\mathbf{A}$ et $|c| = \sup\{|a|, |b|\} = \sup\{N_k(x), N_k(y)\}$. Pour le point (4), on a
$$xy \equiv \sum_{n+m\leq k} [x_n y_m]\pi^{n+m} \bmod \pi^{k+1}\mathbf{A}$$
Mais si $(a) = (x_n y_m)_{n+m\leq k}$, $|a| = \sup_{i+j=k} N_i(x)N_j(y)$. On conclut puisque $xy \in \mathbf{A}[c] + \mathbf{A}\pi^{k+1}$. Le point (5) résulte de ce que
$$\begin{aligned}\sup_{k\geq 0} N_k(x)\rho^k &= \sup_{k\geq 0}\sup_{0\leq n\leq k} |x_n|\rho^k \\ &= \sup_{n\geq 0}\sup_{k\geq n} |x_n|\rho^k \\ &= \sup_{n\geq 0} |x_n|\rho^n\end{aligned}$$
puisque $\rho \in [0,1]$. □

Les normes de Gauss sont entièrement caractérisées par leur restriction à $\mathbf{A}$ ainsi que les propriétés $|[a]x|_\rho = |a|.|x|_\rho, a \in F, x \in B^b$ et $|\pi^n x|_\rho = \rho^n |x|_\rho, n \in \mathbb{Z}, x \in B^b$. Le lemme précédent permet d'obtenir immédiatement la proposition suivante.

Proposition 1.4.3. — *La définition précédente des normes de Gauss est indépendante du choix de l'uniformisante π. De plus ce sont des normes d'algèbre*
$$\begin{aligned}|x+y|_\rho &\leq \sup\{|x|_\rho, |y|_\rho\} \\ |xy|_\rho &\leq |x|_\rho |y|_\rho.\end{aligned}$$

Remarque 1.4.4. — Pour $\rho \in]0,1[$, la restriction de $|.|_\rho$ à E induit la topologie non-archimédienne de E : $|.|_{\rho|E} = \rho^{v_\pi(.)}$. Il faut faire attention que par contre $|.|_{1|E}$ est la valuation triviale et la topologie induite est la topologie discrète.

On a en fait la caractérisation intrinsèque suivante des normes de Gauss lorsque le rayon est dans $]0,1[$.

Proposition 1.4.5. — *Soit $\rho \in]0,1[$. On note $|.|_\rho$ l'unique valeur absolue sur E définissant la topologie de E telle que $|\pi|_\rho = \rho$. On a alors pour $x \in B^b$*

$$|x|_\rho = \inf\Big\{ \sup_{n\geq 0} |x_n|.|\lambda_n|_\rho \;\Big|\; x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\lambda_n, x_n \in F, \lambda_n \in E, \sup_n |x_n| < +\infty, \lim_{n\to+\infty} \lambda_n = 0\Big\}.$$

Démonstration. — Une telle série $\sum_{n\geq 0}[x_n]\lambda_n$ est convergente pour $|.|_\rho$. On a donc si $x = \sum_n [x_n]\lambda_n$ comme dans l'énoncé

$$|x|_\rho \leq \sup_n |[x_n]\lambda_n|_\rho = \sup_n |x_n|.|\lambda_n|_\rho.$$

Dans l'énoncé le membre de gauche est donc plus petit que celui de droite. On obtient l'inégalité dans l'autre sens en écrivant $x = \sum_{n\gg -\infty}[x_n]\pi^n$ et en prenant $\lambda_n = \pi^n$. □

Remarquons que pour $x \in B^b$, la fonction

$$\begin{array}{rcl} [0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R}\cup\{+\infty\} \\ r & \longmapsto & v_r(x) \end{array}$$

est concave. Il en résulte que si $0 < \rho_1 \leq \rho \leq \rho_2 \leq 1$ alors

$$|x|_\rho \leq \sup\{|x|_{\rho_1}, |x|_{\rho_2}\}$$

ce qui se traduit en un *principe du maximum* sur la « couronne » de rayons dans $[\rho_1, \rho_2]$.

Remarque 1.4.6. — D'après Hadamard, si f est une fonction holomorphe sur le disque épointé $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < 1\}$ et pour $0 < r < 1$, $M(R) = \sup_{|z|=R}\{|f(z)|\}$, la fonction $R \mapsto \log M(R)$ est une fonction convexe de $\log R$. La concavité de la fonction $r \mapsto v_r(x)$ précédente est un analogue non-archimédien de cette propriété.

On rajoute à nos définitions la définition suivante.

Définition 1.4.7. — On note $|.|_0 = q^{-v_\pi(.)}$ sur B^b.

On a également un principe du maximum faisant intervenir $|.|_0$ en supposant que « la fonction méromorphe de π est holomorphe en 0 ». On vérifie en effet aussitôt le lemme suivant.

Lemme 1.4.8. — *Soit $x \in B^b$ tel que $|x|_0 \leq 1$. Alors, si $0 < \rho' \leq \rho \leq 1$ on a*

$$|x|_{\rho'} \leq |x|_\rho.$$

Il s'en suit que pour $\rho \in [0,1]$ la topologie définie sur B^b par la famille de normes $(|.|_{\rho'})_{0\leq\rho'\leq\rho}$ est la même que la topologie définie par la norme $\sup\{|.|_0, |.|_\rho\}$.

1.4.2. Multiplicativité. — Le résultat qui suit est un point clef de ce texte qui sera utilisé à de maintes reprises (par exemple pour vérifier que le polygone de Newton d'un produit de « fonctions holomorphes » est obtenu par concaténation des polygones de Newton des éléments dont on prend le produit, cf. sec. 1.5.2 et 1.6.3). Bien que la preuve de ce résultat soit élémentaire, ce résultat est nouveau (la sous-multiplicativité de normes du type de celles que l'on considère apparait à divers endroit dans la littérature de théorie de Hodge p-adique, mais pas la multiplicativité).

Proposition 1.4.9. — *Pour tout $\rho \in [0,1]$, $|.|_\rho$ est multiplicative, $|xy|_\rho = |x|_\rho |y|_\rho$. En d'autres termes, les v_r, $r \geq 0$, sont des valuations.*

Démonstration. — D'après la formule de passage à la limite donnée précédemment il suffit de le faire pour $\rho \in]0,1[$. On peut également supposer que $x, y \in \mathbf{A}$ car la formule de multiplicativité est connue lorsque $x = [a]\pi^k, a \in F, k \in \mathbb{Z}$ et $B^b = \mathbf{A}[\frac{1}{\pi}, \frac{1}{[\varpi_F]}]$. Soient donc $x = \sum_n [x_n]\pi^n$ et $y = \sum_m [y_m]\pi^m$ non nuls. Soit n_0, resp. m_0, le plus petit entier tel que

$$|x_{n_0}|\rho^{n_0} = |x|_\rho, \quad \text{resp. } |y_{m_0}|\rho^{m_0} = |y|_\rho.$$

On peut écrire x et y sous la forme

$$\begin{aligned} x &= x' + [x_{n_0}]\pi^{n_0} + \pi^{n_0+1}x'' \\ y &= y' + [y_{m_0}]\pi^{m_0} + \pi^{m_0+1}y'' \end{aligned}$$

avec $x', x'', y', y'' \in \mathbf{A}$ satisfaisant $|x'|_\rho < |x|_\rho$, $|\pi^{n_0+1}x''|_\rho \leq |x|_\rho$ et $|y'|_\rho < |y|_\rho$, $|\pi^{m_0+1}y''|_\rho \leq |y|_\rho$. Utilisant la propriété de sous-multiplicativité de $|.|_\rho$ on en déduit en développant le produit que

$$xy = z + [x_{n_0}y_{m_0}]\pi^{n_0m_0} + \pi^{n_0+m_0+1}w$$

avec $|z|_\rho < |x|_\rho|y|_\rho$ et $w \in \mathbf{A}$. Posons, avec les notation du lemme 1.4.2, $\|.\| = N_{n_0+m_0}\rho^{n_0+m_0}$ qui est une semi-norme sur $\mathbf{A}$. Puisque $\|.\| \leq |.|_\rho$, $\|z\| < |x|_\rho|y|_\rho$. On a donc

$$\|z + [x_{n_0}y_{m_0}]\pi^{n_0m_0}\| = |x|_\rho|y|_\rho.$$

On conclut aisément. □

1.4.3. Topologie définie par les normes de Gauss sur A. —

Définition 1.4.10. — On appelle topologie faible la topologie de $\mathbf{A}$ définie par la convergence des coefficients dans le développement de Teichmüller i.e. la topologie produit via

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_F^{\mathbb{N}} & \xrightarrow{\sim} & \mathbf{A} \\ (x_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n. \end{array}$$

On vérifie facilement la proposition qui suit.

Proposition 1.4.11. — *1. La topologie faible de* $\mathbf{A}$ *coïncide avec la topologie* $([\varpi_F], \pi)$*-adique.*

2. *La topologie faible de* $\mathbf{A}$ *est définie par la famille de semi-normes* $(N_k)_{k\geq 0}$ *du lemme 1.4.2.*

3. *Pour tout* $\rho \in]0,1[$*, la topologie induite par* $|.|_\rho$ *sur* $\mathbf{A}$ *est la topologie faible.*

4. $\mathbf{A}$ *est séparé complet pour la topologie faible.*

Remarque 1.4.12. — Supposons que $E|\mathbb{Q}_p$. Il faut faire attention lorsqu'on travaille avec $|.|_1$ pour la raison suivante. Pour tout $\epsilon \in 1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}$ on a $|[\epsilon] - 1|_1 = 1$. En effet,

$$\frac{[\epsilon] - 1}{\varphi^{-1}([\epsilon] - 1)} = 1 + [\epsilon^{1/p}] + \cdots + [\epsilon^{\frac{p-1}{p}}]$$

et donc $|[\epsilon]-1|_1^{1-1/p} = |1+[\epsilon^{1/p}]+\cdots+[\epsilon^{\frac{p-1}{p}}]|_1$. Mais l'image de $1+[\epsilon^{1/p}]+\cdots+[\epsilon^{\frac{p-1}{p}}]$ dans $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$ est p et donc ce dernier nombre vaut 1.

On a donc $\lim\limits_{\substack{\alpha\to 0\\ \neq}} |[1+\alpha] - 1|_1 \neq |[1] - 1|_1 = 0$. De cela on déduit que l'application relèvement de Teichmüller $x \mapsto [x]$ n'est pas continue pour la topologie définie par $|.|_1$. C'est là une très grosse différence avec le cas d'égales caractéristiques ($E = \mathbb{F}_q((\pi))$). Lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ la topologie définie par $|.|_1$ sur $\mathbf{A}$ est la topologie de la convergence uniforme des coefficients de Teichmüller. Lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ il n'y a pas de description simple de cette topologie en termes du développement de Teichmüller.

On a tout de même la proposition suivante.

Proposition 1.4.13. — *L'anneau* $\mathbf{A}$ *est séparé complet pour la topologie définie par* $|.|_1$.

Démonstration. — La topologie définie par $|.|_1$ est la topologie $[\varpi_F]$-adique. Puisque $\mathbf{A}$ est séparé complet pour la topologie $([\varpi_F], \pi)$-adique il l'est pour la topologie $[\varpi_F]$-adique en vertu du lemme qui suit. □

Lemme 1.4.14. — *Soit* R *un anneau séparé complet pour la topologie* I*-adique. Alors pour tout idéal de type fini* $J \subset I$*,* R *est séparé complet pour la topologie* J*-adique.*

Corollaire 1.4.15. — *Pour tout* $\rho \in [0,1]$*,* $\mathbf{A}$ *est complet pour* $|.|_\rho$*.*

1. *Si* $\rho = 0$ *la topologie induite est la topologie* π*-adique.*

2. *Si* $\rho \in]0,1[$ *la topologie induite est la topologie* $([\varpi_F], \pi)$*-adique.*

3. *Si* $\rho = 1$ *la topologie induite est la topologie* $[\varpi_F]$*-adique.*

1.5. Polygones de Newton des éléments de B^b

1.5.1. Transformée de Legendre. — Pour une fonction $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$, sa transformée de Legendre est

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L}(\varphi) : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ \lambda & \longmapsto & \inf\{\varphi(x) + \lambda x \mid x \in \mathbb{R}\}. \end{array}$$

C'est une fonction concave. Si φ est convexe, on peut retrouver φ à partir de $\mathscr{L}(\varphi)$ en appliquant sa transformée de Legendre inverse :

$$\varphi(x) = \sup\{\mathscr{L}(\varphi)(\lambda) - \lambda x \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Appelons pente d'un polygone l'opposé de la dérivé de la fonction affine par morceaux associée (cette convention est nécessaire si l'on veut que les pentes des polygones de Newton soient les valuations des racines). Une fonction convexe $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ non identiquement égale à $+\infty$ est un polygone à abscisses de ruptures entières si et seulement si $\mathscr{L}(\varphi)$ est une fonction localement affine sur le segment ouvert $\mathscr{L}(\varphi) \neq -\infty$ à pentes dans $\mathbb{Z}$. Les pentes de $\mathscr{L}(\varphi)$ sont alors les abscisses des points de rupture de φ et les abscisses des points de rupture de $\mathscr{L}(\varphi)$ sont les pentes de $\mathscr{L}(\varphi)$. Ainsi la transformée de Legendre met en dualité

$$\text{Pentes} \overset{\mathscr{L}}{\longleftrightarrow} \text{Abscisses des points de rupture.}$$

Pour $\varphi_1, \varphi_2 : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ posons

$$\begin{array}{rcl} \varphi_1 * \varphi_2 : \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{-\infty\} \\ x & \longmapsto & \inf\{\varphi_1(a) + \varphi_2(b) \mid a + b = x\}. \end{array}$$

Alors,

$$\mathscr{L}(\varphi_1 * \varphi_2) = \mathscr{L}(\varphi_1) + \mathscr{L}(\varphi_2).$$

De cela on déduit que si φ_1 et φ_2 sont des polygones décroissants convexes à abscisses de rupture entières bornés inférieurement, $\varphi_1 * \varphi_2$ en est également un et de plus ses pentes finies strictement positives sont obtenues en « concaténant » celles de φ_1 et φ_2.

Remarque 1.5.1. — L'opération de convolution précédente est un analogue tropical de l'opération de convolution usuelle où l'on a remplacé l'addition par des bornes inférieures et la multiplication pas l'addition. La transformée de Legendre est un analogue tropical de la transformée de Laplace. De la même façon que la transformée de Fourier met en dualité des positions et des fréquences, la transformée de Legendre met en dualité des positions et des pentes.

1.5.2. Polygone de Newton. —

Définition 1.5.2. — Soit $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^b$. On note $\mathcal{N}ewt(x)$ le plus grand polygone convexe décroissant de $\mathbb{R}^2$ en dessous de l'ensemble de points $(n, v(x_n))_{n\in\mathbb{Z}}$.

Le polygone $\mathcal{N}ewt(x)$ est donné par $v_\pi(x)$ et ses pentes $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$, $\lambda_i = +\infty$ pour $i < v_\pi(x)$ et pour tout i, $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$.

On a les formules

$$\begin{aligned} v_0(x) &= \lim_{t\to+\infty} \mathcal{N}ewt(x)(t) \\ ]-\infty, v_\pi(x)[&= \mathcal{N}ewt(x)^{-1}(\{+\infty\}). \end{aligned}$$

Pour $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^b$ non nul, la tranformée de Legendre de son polygone de Newton, c'est à dire de la fonction affine par morceaux associée, est donnée par

$$\mathscr{L}\big(\mathcal{N}ewt(x)\big)(\lambda) = \begin{cases} v_\lambda(x) \text{ si } \lambda \geq 0 \\ -\infty \text{ si } \lambda < 0 \end{cases}.$$

On en déduit en particulier que le polygone de Newton de ne dépend pas du choix de l'uniformisante π. On renvoie à la figure 1 pour une visualisation du polygone précédent.

Soient maintenant $x, y \in B^b$ non nuls. Utilisant que pour tout $r \geq 0$, $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$ (1.4.9) on déduit que

$$\mathcal{N}ewt(xy) = \mathcal{N}ewt(x) * \mathcal{N}ewt(y).$$

On peut donc calculer $\mathcal{N}ewt(xy)$ en fonction de $\mathcal{N}ewt(x)$ et $\mathcal{N}ewt(y)$. Les pentes finies strictement positives de $\mathcal{N}ewt(xy)$ sont obtenues par concaténation des pentes finies strictement positives de $\mathcal{N}ewt(x)$ et de celles de $\mathcal{N}ewt(y)$, avec multiplicité.

Exemple 1.5.3. — Soient $a_0, \ldots, a_d \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $\prod_{i=0}^n (\pi - [a_i]) = \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n$. Alors, $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$ et les pentes non-nulles du polygone convexe enveloppe des $(i, v(x_i))_{0\leq i\leq d}$ sont les $(v(a_i))_{0\leq i\leq d}$.

Remarque 1.5.4. — Soit f une fonction holomorphe sur le disque $\{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ et $0 < R < 1$. Supposons que f ne possède pas de zéros sur le cercle $|z| = R$ et $f(0) \neq 0$. Notons $a_1, \ldots, a_n$ les zéros de f comptés avec multiplicités dans le disque $|z| \leq R$. La formule de Jensen donne alors

$$\log|f(0)| = \sum_{i=1}^n \log|a_i| - n\log R + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(Re^{i\theta})|d\theta.$$

Soit maintenant $x \in \mathbf{A}$ non nul et $r > 0$. Soient $(\lambda_i)_{i\geq 0}$ les pentes finies de $\mathcal{N}ewt(x)$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$. Soit n l'entier tel que $\lambda_{n-1} \geq r$ et $\lambda_n < r$ ($n = 0$ si $\lambda_0 < r$). On a alors

$$v(x_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i - nr + v_r(x)$$

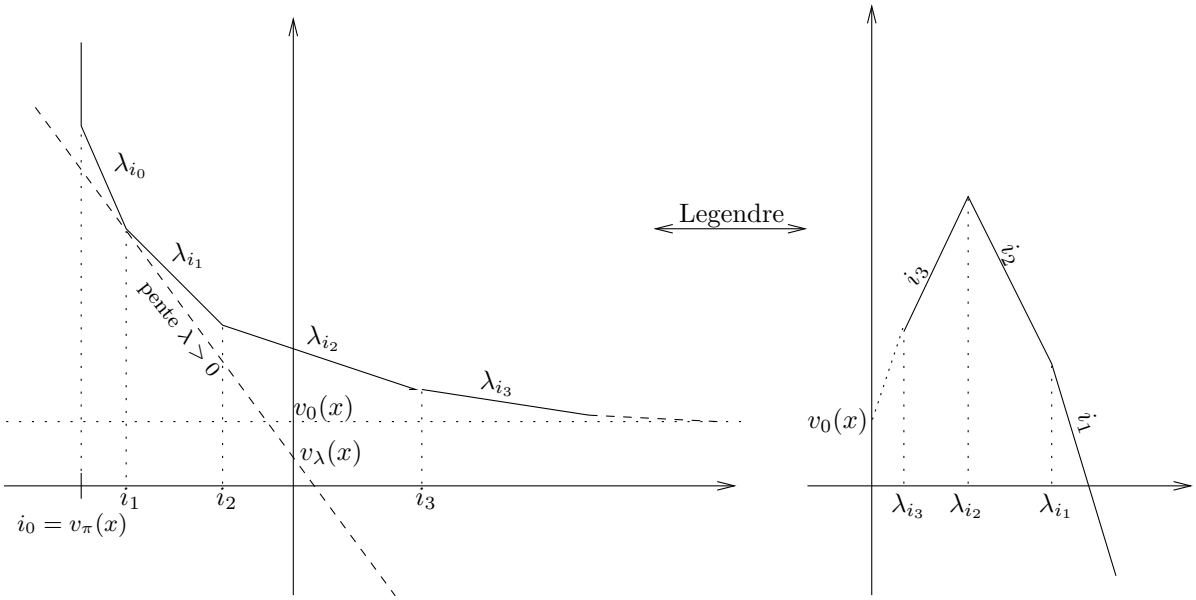

FIGURE 1. Le polygone de Newton de $x \in B^b$ et sa transformée de Legendre $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$. En général, la valuation de F n'étant pas discrète, la borne inférieure définissant $v_0(x)$ n'est pas atteinte, le polygone de Newton peut avoir une infinité de pentes tendant vers 0 au voisinage de $+\infty$ et le comportement de la fonction $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$ peut être « assez compliqué »au voisinage de 0.

qui est un analogue de la formule de Jensen.

1.6. Les algèbres de Fréchet B_I

1.6.1. Définition et premières propriétés. — Par définition, dans ce texte, un intervalle dans $[0, 1]$ est non-vide. On adoptera la terminologie suivante.

Définition 1.6.1. — Soit K un corps topologique dont la topologie est définie par une valeur absolue non-archimédienne. Une K-algèbre de Fréchet est une K-algèbre topologique complète $\mathcal{A}$ dont la topologie peut être définie par une famille de fonctions $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\|.\|_n : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ satisfaisant

— $\|x\|_n = 0 \Leftrightarrow x = 0$
— $\|x + y\|_n \leq \sup\{\|x\|_n, \|y\|_n\}$
— $\|1\|_n = 1$
— $\|xy\|_n \leq \|x\|_n.\|y\|_n$
— la topologie induite par $(\|.\|_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sur K est sa topologie originelle.

Une K-algèbre de Banach est une K-algèbre de Fréchet dont la topologie peut être définie par une seule de ces normes.

Définition 1.6.2. — Pour un intervalle $I \subset [0,1]$ on note B_I le complété de B^b relativement à la famille de normes $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$. On note

$$\|.\|_I = \sup_{\rho\in I} |.|_\rho : B_I \longrightarrow [0,+\infty].$$

On note $B := B_{]0,1[}$.

Dans tous les cas, B_I est une E-algèbre de Fréchet où E est muni de la topologie induite par la restriction de $\|.\|_I$ à E. On note E^{disc} pour E muni de la topologie discrète induite par la valuation triviale. Plusieurs cas se présentent :

— Si $1 \notin I$ alors B_I est une E-algèbre de Fréchet.
— Si $1 \in I$ alors B_I est une E^{disc}-algèbre de Fréchet.

De plus, si I est compact :

— Si $1 \notin I$ alors B_I est une E-algèbre de Banach telle que
  — si $0 \notin I = [\rho_1, \rho_2]$ alors $\|.\|_I = \sup\{|.|_{\rho_1}, |.|_{\rho_2}\}$ qui définit la topologie de B_I
  — si $0 \in I = [0,\rho]$ alors d'après le lemme 1.4.8 la topologie de B_I est définie par $\sup\{|.|_0, |.|_\rho\}$.
— Si $1 \in I$ alors B_I est une E^{disc}-algèbre de Banach.

On note $\varphi : [0,1] \xrightarrow{\sim} [0,1]$ défini par $\varphi(\rho) = \rho^q$. L'automorphisme φ de B^b s'étend alors en un isomorphisme

$$\varphi : B_I \xrightarrow{\sim} B_{\varphi(I)}.$$

Il induit en particulier un automorphisme de B.

Bien sûr, si $J \subset I$ il y a un morphisme continu $B_I \to B_J$ et

$$B_I \xrightarrow{\sim} \varprojlim_J B_J$$

où J parcourt les intervalles compacts dans I. Cela permet d'écrire l'algèbre de Fréchet B_I comme limite projective d'algèbres de Banach.

Enfin, notons que d'après le corollaire 1.4.15 $\mathbf{A} \subset B_I$ est fermé.

Exemple 1.6.3. — Supposons que $I = [\rho_1, \rho_2] \subset]0,1]$ avec $\rho_1, \rho_2 \in |F|$. Soient $a, b \in F$ tels que $|a| = \rho_1$ et $|b| = \rho_2$. La boule unité de $\|.\|_I$ dans B^b est $\mathbf{A}\big[\frac{[a]}{\pi}, \frac{\pi}{[b]}\big]$. On a donc

$$B_I = \widehat{\mathbf{A}\big[\tfrac{[a]}{\pi}, \tfrac{\pi}{[b]}\big]}\big[\tfrac{1}{\pi}\big]$$

où la complétion est pour la topologie π-adique.

Exemple 1.6.4. — On a $B_{\{0\}} = \mathscr{E}$.

Exemple 1.6.5. — Supposons que $E = \mathbb{F}_q((\pi))$. Alors si $0, 1 \notin I$, B_I est l'anneau des fonctions holomorphes de la variable π à coefficients dans F sur la couronne de rayons parcourant I

$$B_I = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \pi^n \mid x_n \in F,\ \forall \rho \in I \lim_{|n|\to+\infty} |x_n|\rho^n = 0 \Big\}.$$

Si $I \neq \{0\}$ et $I \neq \{1\}$ il s'agit des mêmes fonctions holomorphes sur $I \setminus \{0, 1\}$ en ajoutant les conditions

— la fonction est méromorphe en 0 si $0 \in I$

— la fonction est « bornée à l'extérieur de la couronne » si $1 \in I$.

L'anneau

$$B_{\{1\}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \pi^n \mid x_n \in F,\ \lim_{n\to-\infty} x_n = 0,\ \sup_n |x_n| < +\infty \Big\}$$

n'a pas d'interprétation géométrique.

Remarque 1.6.6. — Lorsque $E|\mathbb{Q}_p$, il n'y a pas de bonne notion de fonction holomorphe de la variable π à coefficients dans F sur des couronnes de rayon extérieur ≥ 1. L'ensemble

$$\Big\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in B^b \mid \lim_{n\to+\infty} |x_n| = 0 \Big\}$$

n'est pas stable par l'addition.

Remarque 1.6.7. — Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite de F telle que pour tout $\rho \in]0, 1[$ on ait $\lim_{|n|\to+\infty} |x_n|\rho^n = 0$. Alors, la série

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} [x_n]\pi^n$$

converge dans B. Si $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ alors tout élément de B s'écrit de façon unique sous cette forme mais si $E|\mathbb{Q}_p$:

— on ne sait pas si tout élément de B est de cette forme i.e. « admet un développement en série de Laurent au voisinage de 0 »

— pour un tel élément on ne sait pas si une telle écriture est unique

— on ne sait pas si la somme ou le produit de deux tels éléments est encore de cette forme.

Le même problème se pose pour tous les B_I lorsque $0 \notin I$. On envoie tout de même à la section 1.10.2 pour un sous-ensemble de B sur lequel la remarque précédente est contredite.

1.6.2. Changement du corps E. — Soit $E'|E$ une extension de degré fini. On suppose que le corps résiduel $\mathbb{F}_{q'}$ de E' est plongé dans F. On a donc $F|\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$. Soit E'_0 l'extension maximale non-ramifiée de E dans E'. Lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ on a

$$E'_0 = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'})_{\mathbb{Q}}$$

tandis que si E est de caractéristique p, $E'_0 = E \otimes_{\mathbb{F}_q} \mathbb{F}_{q'}$.

On a alors

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{E'} &= \mathbf{A}_E \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'} \\ B^b_{E'} &= B^b_E \otimes_{E'_0} E'. \end{aligned}$$

Lemme 1.6.8. — *Soient $\rho \in [0,1]$ et $e_{E'/E}$ l'indice de ramification de $E'|E$. Alors, via l'identification*

$$B^b_{E'} = B^b_E \otimes_{E'_0} E'$$

on a

$$|.|_{E',\rho^{1/e_{E'|E}}} = |.|_{E,\rho} \otimes |.|_{E',\rho^{1/e_{E'/E}}}.$$

Démonstration. — Cela est clair lorsque $\rho = 0$. Lorsque $\rho \in]0,1[$ cela se déduit de la proposition 1.4.5. Le cas $\rho = 1$ se déduit du cas précédent par passage à la limite. □

De cela on déduit la proposition suivante.

Proposition 1.6.9. — *Pour un intervalle $I \subset [0,1]$ il y a un isomorphisme*

$$B_{E,I} \hat{\otimes}_{E'_0} E' \xrightarrow{\sim} B_{E',I^{1/e_{E'|E}}}.$$

Lorsque I est compact

$$B_{E,I} \otimes_{E'_0} E' \xrightarrow{\sim} B_{E',I^{1/e_{E'|E}}}.$$

Il faut maintenant remarquer un point important. Via les isomorphismes précédents

$$\varphi_E^{f_{E'/E}} \otimes \mathrm{Id} = \varphi_{E'}.$$

En particulier, *lorsque $E'|E$ est non-ramifiée, $B_{E,I} = B_{E',I}$ mais $\varphi_{E'} = \varphi_E^{[E':E]}$. Donc, même dans le cas d'une extension non-ramifiée, le changement de corps E apporte un changement non-pas à l'algèbre mais au Frobenius.*

1.6.3. Polygone de Newton des éléments de B_I. —

1.6.3.1. Convergence des valuations de Gauss et de leurs dérivées. — Pour $x \in B^b$ non nul et $r \in]0,1[$ on note $\partial_g v_r(x)$ et $\partial_d v_r(x)$ les dérivées à gauche et à droite de la fonction continue affine par morceaux $r' \mapsto v_{r'}(x)$ en r. On note de même $\partial_d v_0(x) \in \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$.

Lemme 1.6.10. — *Soit $r \in]0,+\infty[$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans B^b pour v_r ne tendant pas vers 0. Alors, les suites $(\partial_g v_r(x_n))_{n\geq 0}$ et $(\partial_d v_r(x_n))_{n\geq 0}$ sont constantes pour $n \gg 0$. De plus, si $(y_n)_n$ est une suite tendant vers 0 pour v_r alors pour $n \gg 0$, $\partial_g v_r(x_n + y_n) = \partial_g v_r(x_n)$ et $\partial_d v_r(x_n + y_n) = \partial_d v_r(x_n)$. Le même énoncé s'applique à $\partial_d v_0$.*

Démonstration. — Soit N tel que pour $n \geq N$ on ait $v_r(x_{n+1} - x_n) > v_r(x_N)$. Alors, pour tout $n \geq N$, il existe un voisinage U de r tel que pour $r' \in U$ on ait $v_{r'}(x_n - x_{N'}) > v_{r'}(x_N)$. On en déduit que la fonction $r' \mapsto v_{r'}(x_n)$ coïncide au voisinage de r avec $r' \mapsto v_{r'}(x_N)$. Tous les résultats annoncés s'en déduisent. □

Soit I un intervalle de $[0,1]$. La définition qui suit a donc bien un sens.

Définition 1.6.11. — Soit $x \in B_I$ non nul et $\rho = q^{-r} \in I \cap]0,1[$. On définit $\partial_g v_r(x)$ et $\partial_d v_r(x)$ de telle manière que si $\lim_{n\to+\infty} x_n = x$ avec $x_n \in B^b$ alors $\partial_g v_r(x) = \lim_{n\to+\infty} \partial_g v_r(x_n)$ et $\partial_d v_r(x) = \lim_{n\to+\infty} \partial_d v_r(x_n)$. On définit de même $\partial_d v_0(x)$ lorsque $1 \in I$.

On vérifie aussitôt le résultat suivant.

Proposition 1.6.12. — *Munissons $\mathbb{R} \oplus \mathbb{Z}$ de l'ordre lexicographique. Si $q^{-r} \in I \setminus \{0,1\}$ alors les fonctions*

$$\begin{array}{rcl} B_I \setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & (v_r(x), \partial_d v_r(x)) \\ x & \longmapsto & (v_r(x), -\partial_g v_r(x)) \end{array}$$

définit une valuation sur B_I.

Remarque 1.6.13. — Une façon d'interpréter la preuve du lemme 1.6.10 est de dire que l'on a vérifié que les valuations précédentes de hauteur 2 sur B^b sont continues relativement à $|.|_{q^{-r}}$ et donc s'étendent à B_I dès que $q^{-r} \in I$. Ces valuations sont en fait des spécialisations de v_r et cette propriété d'extension est donc automatique. On remarquera qu'elles appartiennent à $\mathrm{Spa}(B_I, \mathcal{O}_E + B_I^{\circ\circ}) \setminus \mathrm{Spa}(B_I, B_I^{\circ})$.

Exemple 1.6.14. — Si $F = \mathbb{F}_q((\pi))$ et $f = \sum_{n\in\mathbb{Z}} x_n \pi^n \in B_I$ est non nul alors

$$\begin{array}{rcl} \partial_g v_r(f) & = & \sup\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{n \mid v(x_n) + nr = v_r(x)\} \\ \partial_d v_r(f) & = & \inf\limits_{n\in\mathbb{Z}} \{n \mid v(x_n) + nr = v_r(x)\}. \end{array}$$

On a de plus lorsque $1 \in I$

$$\partial_d v_0(f) = \begin{cases} +\infty \text{ si pour tout } n \ v(x_n) > v_0(f) \\ \inf\{n \mid v(x_n) = v_0(f)\} \text{ sinon.} \end{cases}$$

Proposition 1.6.15. — *Si $J \subset I$ l'application $B_I \to B_J$ est injective.*

Démonstration. — On peut supposer que I n'est pas un singleton. Soit $r_0 \in]0,+\infty[$ tel que $q^{-r_0} \in I$. Soit $(x_n)_n$ une suite de Cauchy de B^b pour $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$. Supposons que $\lim_{n\to+\infty} v_{r_0}(x_n) \neq +\infty$. D'après 1.6.10 il existe N tel que pour $n \geq N$ et $* \in \{d,g\}$

on ait $\partial_* v_{r_0}(x_n) = \partial_* v_{r_0}(x_N)$ et $v_{r_0}(x_n) = v_{r_0}(x_N)$. Par concavité de la fonction $r \mapsto v_r(x_n)$ on en déduit que pour $r \geq r_0$, $q^{-r} \in I$ et $n \geq N$

$$v_r(x_n) \leq v_{r_0}(x_N) + \partial_d v_{r_0}(x_N)(r - r_0).$$

De même pour $r \leq r_0$, $q^{-r} \in I$ et $n \geq N$,

$$v_r(x_n) \leq v_{r_0}(x_N) + \partial_g v_{r_0}(x_N)(r - r_0).$$

On a donc pour $r \in [0, +\infty[$ tel que $q^{-r} \in I$, $\lim_{n\to+\infty} v_r(x_n) < +\infty$. Cela permet de conclure si $0 \notin I$.

Si $0 \in I$, de la première inégalité on tire que pour $r \geq r_0$ et $n \geq N$

$$v_\pi(x_n) = \lim_{r\to+\infty} \frac{v_r(x_n)}{r} \leq \partial_d v_{r_0}(x_N)$$

et on conclut ainsi lorsque $0 \in I$.

□

Proposition 1.6.16. — *Soit I un intervalle de $]0, 1]$ et $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de B^b convergeant vers $x \in B_I$ non-nul. Alors, pour tout compact K de I, il existe N tel que pour $n \geq N$ et $\rho \in K$ on ait $|x_n|_\rho = |x|_\rho$.*

Démonstration. — On peut supposer que $K = [q^{-r_1}, q^{-r_2}]$. Soit N tel que pour $n \geq N$ on ait $\partial_g v_{r_1}(x_n) = \partial_g v_{r_1}(x)$ et $v_{r_1}(x_n) = v_{r_1}(x)$ (ce qui et possible d'après 1.6.15). Un argument de concavité montre que pour $n \geq N$ et $r_2 \leq r \leq r_1$ on a

$$v_r(x_n) \leq v_{r_1}(x) + (r - r_1)\partial_g v_{r_1}(x) \leq v_{r_2}(x) + (r_1 - r_2)|\partial_d v_{r_2}(x)|.$$

Notons A la quantité de droite dans les inégalités précédentes. Soit $N' \geq N$ tel que pour $n \geq N'$ on ait

$$v_{r_1}(x_{n+1} - x_n) > A \quad \text{et} \quad v_{r_2}(x_{n+1} - x_n) > A.$$

et donc pour $r_2 \leq r \leq r_1$,

$$v_r(x_{n+1} - x_n) > A.$$

Alors, pour $n \geq N'$ et $r_2 \leq r \leq r_1$ on a

$$v_r(x_n) = v_r(x).$$

□

Corollaire 1.6.17. — *Si $I = q^{-J}$ est un intervalle compact de $]0, 1[$ et $x \in B_I$ non nul alors $J \ni r \mapsto v_r(x)$ est un polygone concave ayant un nombre fini de pentes entières.*

1.6.3.2. Polygone de Newton d'un élément de B_I. —

Définition 1.6.18. — Soit $I = [q^{-r_1}, q^{-r_2}]$ un intervalle compact de $]0,1]$ et $x \in B_I$ non nul. On note $\mathcal{N}ewt_I^0(x)$ la fonction convexe décroissante dont la transformée de Legendre en $\lambda \in [0, +\infty[$ vaut

$$\mathscr{L}(\mathcal{N}ewt_I^0(x))(\lambda) = \begin{cases} v_\lambda(x) \text{ si } q^{-\lambda} \in I \\ v_{r_2}(x) + (r - r_2)\partial_g v_{r_2}(x) \text{ si } \lambda < r_2 \\ v_{r_1}(x) + (r - r_1)\partial_d v_{r_1}(x) \text{ si } \lambda \geq r_1. \end{cases}$$

On définit $\mathcal{N}ewt_I(x)$ comme étant le polygone obtenu à partir de $\mathcal{N}ewt_I^0(x)$ en ne gardant que les pentes λ vérifiant $q^{-\lambda} \in I$. On pose en particulier $\mathcal{N}ewt_I(x) = \emptyset$ s'il n'existe pas de telle pente. On pose également $\mathcal{N}ewt_I(0) \equiv +\infty$.

Une autre façon de reformuler la définition précédente est de dire que $\mathcal{N}ewt_I^0(x)$ est la fonction convexe dont la transformée de Legendre est donnée par les formules précédentes lorsque $\lambda \geq 0$ et vaut $-\infty$ sur $]-\infty, 0[$.

La fonction $\mathcal{N}ewt_I^0(x)$ vaut $+\infty$ sur $]-\infty, \partial_d v_{r_1}(x)[$ et est une droite de pente 0 sur $[\partial_g v_{r_2}(x), +\infty[$. En dehors de ces intervalles ses pentes sont dans $-\log_q I = [r_2, r_1]$. *Il s'en suit qu'à une translation verticale près $\mathcal{N}ewt_I(x)$ est le polygone défini sur le segment $[\partial_d v_{r_1}(x), \partial_g v_{r_2}(x)]$, dont les pentes varient dans $[r_2, r_1]$ et tel que la multiplicité de la pente λ est (cf. figure 2)*

$$\partial_g v_\lambda(x) - \partial_d v_\lambda(x).$$

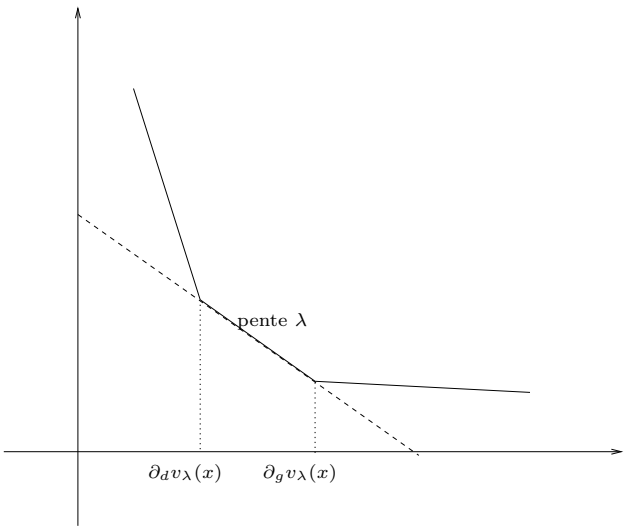

FIGURE 2. Les fonctions $\partial_g v(\lambda)$ et $\partial_d v(\lambda)$.

De la proposition 1.6.16 on déduit ceci.

Corollaire 1.6.19. — *Si I est un intervalle compact de $]0,1]$ et $x \in B_I$ il existe $y \in B^b$ tel que $\mathcal{N}ewt_I(x) = \mathcal{N}ewt_I(y)$. En particulier, si $I \subset]0,1[$, $\mathcal{N}ewt_I(x)$ est un polygone ayant un nombre fini de pentes à abscisses de rupture entières.*

Du fait que $v_r(xy) = v_r(x) + v_r(y)$ et $\partial_* v_r(xy) = \partial_* v_r(x) + \partial_* v_r(y)$ pour $* \in \{g, d\}$ on a le résultat suivant.

Proposition 1.6.20. — *Pour un intervalle compact I de $]0,1]$ et $x, y \in B_I$ on a*

$$\mathcal{N}ewt_I^0(xy) = \mathcal{N}ewt_I^0(x) * \mathcal{N}ewt_I^0(y)$$

et donc les pentes de $\mathcal{N}ewt_I(xy)$ sont obtenues par concaténation de celles de $\mathcal{N}ewt_I(x)$ et de celles de $\mathcal{N}ewt_I(y)$ avec multiplicités.

Soit maintenant I un intervalle de $[0,1]$ et $x \in B_I$. Pour des intervalles compacts J et J' satisfaisant $J' \subset J \subset I \setminus \{0\}$, $\mathcal{N}ewt_{J'}(x)$ est obtenu à partir de $\mathcal{N}ewt_J(x)$ en ne gardant que les pentes λ vérifiant $q^{-\lambda} \in J'$.

Définition 1.6.21. — Si I est un intervalle de $[0,1]$ et $x \in B_I$ on pose

$$\mathcal{N}ewt_I(x) = \bigcup_J \mathcal{N}ewt_J(x)$$

où J parcourt les intervalles compacts de $I \setminus \{0\}$.

Lorsque I est ouvert dans $\mathbb{R}$ on vérifie qu'en fait $\mathcal{N}ewt_I(x)$ est obtenu à partir de la transformée de Legendre inverse de la fonction $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$ définie sur $-\log_q(I \setminus \{0\})$ en ne gardant que les pentes dans $-\log_q(I \setminus \{0\})$. Par exemple, pour $x \in B^b$, $\mathcal{N}ewt_I(x)$ est obtenu à partir de $\mathcal{N}ewt(x) = \mathcal{N}ewt_{[0,1]}(x)$ en ne gardant que les pentes dans $-\log_q(I \setminus \{0\})$.

Exemple 1.6.22. — Pour $x \in B$, $\mathcal{N}ewt_{]0,1[}(x)$ est la transformée de Legendre inverse de la fonction $\lambda \mapsto v_\lambda(x)$ définie sur $]0, +\infty[$ à laquelle on enlève éventuellement la pente 0 si celle-ci intervient.

1.6.4. Le cas particulier où $0 \in I$. — Si $0 \in I$, d'après 1.6.15 il y a un plongement $B_I \subset B_{\{0\}} = \mathscr{E}$.

Proposition 1.6.23. — *Supposons que $0 \in I$. On a alors si $1 \notin I$*

$$B_I = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid \forall \rho \in I \setminus \{0\}, \lim_{n \to +\infty} |x_n|\rho^n = 0 \Big\} \subset \mathscr{E}.$$

Démonstration. — Soit R le membre de droite. Il est clair que si $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in R$ alors cette série est convergente pour $(|.|_\rho)_{\rho \in I}$. Puisque $[x_n]\pi^n \in B^b$ on en déduit que $R \subset B_I$. Dans l'autre sens, soit $x = \sum_{k \geq 0} y_k \in B_I$ avec $y_k \in B^b$ et pour tout $\rho \in I$, $\lim_{k \to +\infty} |y_k|_\rho = 0$ (et donc en particulier $\lim_{k \to +\infty} v_\pi(y_k) = +\infty$). Quitte à multiplier par une puissance de π on suppose que pour tout k, $v_\pi(y_k) \geq 0$ et donc

$x \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}}$. Écrivons $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$ dans $\mathscr{E}$. Soient $\rho \in I \setminus \{0\}$ et $\epsilon > 0$. Choisissons N tel que pour $k > N$ on ait $|y_k|_\rho \leq \epsilon$. Posons

$$z = \sum_{k=0}^{N} y_k \in B^b.$$

Puisque $\lim_{k\to+\infty} v_\pi(y_k) = +\infty$, pour tout entier n le n-ième coefficient de Teichmüller dans le développement de x ne dépend que de

$$z + \sum_{k=N+1}^{N'} y_k, \quad N' \gg N.$$

Avec les notations du point 2 de 1.4.2 (qui reste valable dans $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$) pour tout n,

$$\begin{aligned} N_n\Big(z + \sum_{k=N+1}^{N'} y_k\Big) &\leq \sup\big\{N_n(z), N_n(y_k)\big\}_{N<k\leq N'} \\ &\leq \sup\{|z|_0, \epsilon\rho^{-n}\}. \end{aligned}$$

Si l'entier n est tel que $|z|_0 \leq \epsilon\rho^{-n}$ on a donc si $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$, avec $N' \gg N$,

$$|x_n|\rho^n \leq N_n\Big(z + \sum_{k=N+1}^{N'} y_k\Big)\rho^n \leq \epsilon.$$

Cela étant valable pour tout ϵ, on conclut. □

Il reste à traiter le cas où $I = [0,1]$.

Proposition 1.6.24. — *On a*

$$\begin{aligned} B_{[0,1]} &= B^b \\ B^\circ_{[0,1]} &= \mathbf{A}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Il s'agit de vérifier que B^b est complet pour $(|.|_\rho)_{\rho\in[0,1]}$. Mais cela résulte immédiatement de ce que $\mathbf{A}$ l'est (coro. 1.4.15). □

1.6.5. Caractérisation des éléments inversibles de B_I en termes de polygone de Newton. — Soit $I \subset [0,1[$ un intervalle. Rappelons que pour $x, y \in B_I$ non nuls les pentes de $\mathcal{N}ewt_I(xy)$ sont obtenues par concaténation des pentes de $\mathcal{N}ewt_I(x)$ et de celles de $\mathcal{N}ewt_I(y)$. On en déduit que si $x \in B_I^\times$ alors $\mathcal{N}ewt_I(x) = \emptyset$. La réciproque est vraie.

Proposition 1.6.25. — *On a pour $I \subset [0,1[$*

$$B_I^\times = \{x \in B_I \setminus \{0\} \mid \mathcal{N}ewt_I(x) = \emptyset\}.$$

Démonstration. — Soit J un intervalle compact dans $[0,1[$. Commençons par montrer que si $x \in B^b \setminus \{0\}$ vérifie $\mathcal{N}ewt_J(x) = \emptyset$ (i.e. $\mathcal{N}ewt(x)$ ne possède pas de pentes $\lambda \in]0,+\infty[$ vérifiant $q^{-\lambda} \in J$) alors x est inversible dans B_J. Écrivons $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n$ et $J = [q^{-r_1}, q^{-r_2}]$. Soit $N \in \mathbb{Z}$ l'entier vérifiant :

— les pentes λ de $\mathcal{N}ewt(x)$ satisfaisant $\lambda > r_1$ apparaissent dans l'intervalle $]-\infty, N]$,

— les pentes λ de $\mathcal{N}ewt(x)$ satisfaisant $\lambda < r_2$ apparaissent dans l'intervalle $[N, +\infty[$.

Notons

$$\begin{aligned} y &= \sum_{n \leq N} [x_n]\pi^n \\ z &= \sum_{n > N} [x_n]\pi^n. \end{aligned}$$

L'abscisse N est un point de rupture de $\mathcal{N}ewt(x)$ et donc $x_N \neq 0$. Écrivons y sous la forme

$$y = [x_N]\pi^N \Big(1 + \sum_{n<N} \big[x_n x_N^{-1}\big]\pi^{n-N}\Big).$$

Si λ est la pente de $\mathcal{N}ewt(x)$ sur l'intervalle $[N-1, N]$ on a pour $0 < r \leq r_1$,

$$v_r\Big(\sum_{n<N} \big[x_n x_N^{-1}\big]\pi^{n-N}\Big) = \lambda - r_1 > 0$$

(on laisse le lecteur s'en convaincre sur un dessin). L'élément $\sum_{n<N} \big[x_n x_N^{-1}\big]\pi^{n-N}$ est donc topologiquement nilpotent dans B_J ce qui implique que $y \in B_J^\times$ avec pour $\rho \in J$

$$|y^{-1}|_\rho = |x_N|^{-1}\rho^{-N}.$$

On peut maintenant écrire dans B_J

$$x = y(1 + y^{-1}z).$$

Afin de montrer que x est inversible dans B_J il suffit de vérifier que $y^{-1}z$ est topologiquement nilpotent dans B_J. Soit $\mathcal{P}$ le polygone égal à $+\infty$ sur $]-\infty, N+1[$ et à $\mathcal{N}ewt(x)$ sur $[N+1, +\infty[$. On a l'inégalité

$$\mathcal{N}ewt(z) \geq \mathcal{P}.$$

Cette inégalité induit une inégalité entre les transformées de Legendre de $\mathcal{N}ewt(z)$ et celle de $\mathcal{P}$. Or, pour $r \geq r_2$, la transformée de Legendre en r de $\mathcal{P}$ vaut

$$\mathcal{P}(N+1) - (N+1)r$$

(comme précédemment on laisse le lecteur s'en convaincre sur un dessin). On a donc pour $r \geq r_2$,

$$v_r(z) \geq \mathcal{N}ewt(x)(N+1) - (N+1)r.$$

Au final on obtient que pour $\rho \in I$

$$|y^{-1}z|_\rho \leq q^{\mathcal{N}ewt(x)(N)-\mathcal{N}ewt(x)(N+1)}\rho < 1$$

puisque la pente de $\mathcal{N}ewt(x)$ sur le segment $[N, N+1]$ est strictement plus petite que r_2. On a donc bien que $y^{-1}z$ est topologiquement nilpotent dans B_J et $x \in B_J^\times$.

Soit toujours $J \subset [0,1[$ un intervalle compact et soit maintenant $x \in B_J$ non nul vérifiant $\mathcal{N}ewt_J(x) = \emptyset$. Écrivons $x = \lim_{n\to+\infty} x_n$ avec $x_n \in B^b$. Pour un entier N, on a $\mathcal{N}ewt_J(x_n) = \mathcal{N}ewt_J(x)$ lorsque $n \geq N$. D'après le cas traité précédemment, $x_n \in B_J^\times$ lorsque $n \geq N$. Remarquons maintenant que pour $\rho \in J$ et $n \geq N$

$$|x_{n+1}^{-1} - x_n^{-1}|_\rho = |x_{n+1}|_\rho^{-1}.|x_n|_\rho^{-1}.|x_n - x_{n+1}|_\rho.$$

On en déduit que la suite $(x_n^{-1})_{n\geq N}$ converge vers un inverse de x dans B_J.

On conclut la proposition en écrivant

$$B_I \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{J\subset I} B_J$$

où J parcourt les intervalles compacts dans I. □

Lorsque $1 \in I$ la caractérisation des inversibles de B_I est plus subtile à cause des pentes strictement positives des polygones de Newton pouvant s'accumuler en 0. On laisse au lecteur la preuve de la proposition suivante (que nous n'utiliserons pas dans la suite).

Proposition 1.6.26. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$ tel que $1 \in I$. Alors, $B_I^\times$ est l'ensemble des $x \in B_I$ non nuls tels que $\mathcal{N}ewt_I(x) \neq \emptyset$ et possède pour unique pente* 0.

On peut reformuler la condition de la proposition précédente en disant que $\mathcal{N}ewt_{I\setminus\{1\}}(x) = \emptyset$ et $\partial_d v_0(x) < +\infty$.

Corollaire 1.6.27. — *On a $B_1^\times = \{x \in B_1 \setminus \{0\} \mid \partial_d v_0(x) < +\infty\}$.*

1.7. Les cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ et F maximalement complet

Lorsque $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ ou bien F est maximalement complet ([**53**]) on dispose d'une description des anneaux de fonctions holomorphes de la variable π_E précédents comme perfectisés d'anneaux d'anneaux de fonctions holomorphes d'une variable auxiliaire, par exemple $[\pi_F]$. Le but de cette section est d'expliquer le lien entre notre point de vue où la variable est π_E et celui utilisé d'habitude en théorie de Hodge p-adique où cette variable auxiliaire provient de la théorie du corps des normes. Pour cela nous regardons deux cas :

1. celui où la variable est de la forme $[\pi_F]$ qui correspond par exemple au corps des normes de l'extension $\mathbb{Q}_p(p^{1/p^\infty})$ avec $\pi_F = (p^{1/p^n})_{n\geq 0}$ (sec. 1.7.2)
2. celui où la variable est de la forme $[\epsilon] - 1$ où $\epsilon = 1 + \pi_F$ qui correspond par exemple au cas du corps des normes de l'extension cyclotomique $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ avec ϵ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ (sec. 1.7.3).

1.7.1. Le cas $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$. — Soit $k|\mathbb{F}_q$ un corps parfait et $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$ le complété du perfectisé de $k((\pi_F))$. On le munit de la valeur absolue telle que $|\pi_F| = q^{-1}$. On a

$$F = \Big\{ \sum_{a\in\mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} a_\alpha \pi_F^\alpha \mid a_\alpha \in k, \lim_\alpha |a_\alpha| q^{-\alpha} = 0 \Big\}.$$

où k est muni de la valuation triviale ($|x| = 1$ si $x \neq 0$ et $|0| = 0$) et la limite précédente est prise selon le filtre du complémentaire des parties finies de $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{p}\big]$. En d'autres termes, pour tout $C \geq 0$, $\{\alpha \in \mathbb{Z}\big[\frac{1}{p}\big] \mid |\alpha| \leq C \text{ et } a_\alpha \neq 0\}$ est fini.

Notons $W_{\mathcal{O}_E}(k) = E\hat{\otimes}_{\mathbb{F}_q} k$ lorsque E est de caractéristique p. On a alors pour tout E (de caractéristique p ou 0)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_F &= \Big\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]} a_\alpha T^\alpha \mid a_\alpha \in W_{\mathcal{O}_E}(k),\ \lim_\alpha |a_\alpha| q^{-\alpha} = 0 \Big\} \\
&= \Big\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]} a_\alpha T^\alpha \mid \forall k \in \mathbb{N}, \{\alpha \mid v_\pi(a_\alpha) = k\} \subset \mathbb{R}_+ \text{ est discret} \Big\} \\
&= W_{\mathcal{O}_E}(k) < T^{1/p^\infty} >
\end{aligned}$$

le complété π-adique de $W_{\mathcal{O}_E}(k)[T^{1/p^\infty}]$, où

$$T = [\pi_F],$$

$|.|$ sur $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est n'importe quelle valeur absolue définissant la topologie π-adique, et la limite précédente est prise selon le filtre du complémentaire des parties finies de $\mathbb{N}\big[\frac{1}{p}\big]$. En effet, il suffit de vérifier que le membre de droite est une $\mathcal{O}_E$-algèbre π_E-adiquement complète sans π_E-torsion dont la réduction modulo π_E est $k[\![\pi_F^{1/p^\infty}]\!]$.

Lemme 1.7.1. — *Pour $f = \sum_\alpha a_\alpha T^\alpha \in \mathbf{A}$ et $\rho \in [0,1]$ on a*

$$|f|_\rho = \begin{cases} \sup_\alpha |a_\alpha|_\rho\ q^{-\alpha} & si\ \rho \neq 0 \\ \sup_\alpha |a_\alpha|_0 & si\ \rho = 0 \end{cases}$$

où lorsque $\rho \neq 0, 1$, $|.|_\rho$ est l'unique valeur absolue sur $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}$ définissant sa topologie satisfaisant $|\pi_E|_\rho = \rho$, $|.|_0 = |.|_{q^{-1}}$ et $|.|_1$ est la valeur absolue triviale.

Démonstration. — Le cas $\rho = 0$ est immédiat. On suppose donc que $\rho \in]0,1]$. On utilise le lemme 1.4.2. Avec les notations de celui-ci, pour $\delta \in \mathbb{N}\big[\frac{1}{p}\big]$

$$\begin{aligned} N_k(f) \leq |T^\delta| \quad &\Leftrightarrow \quad f \in \mathbf{A}.[T^\delta] + \mathbf{A}\pi^{k+1} \\ &\Leftrightarrow \quad v_\pi(a_\alpha) > k \text{ si } 0 \leq \alpha < \delta. \end{aligned}$$

En faisant varier δ on en déduit que

$$N_k(f) = \begin{cases} 0 \text{ si } \forall \alpha, v_\pi(a_\alpha) > k \\ \sup\{q^{-\alpha} \mid v_\pi(a_\alpha) \leq k\}. \end{cases}$$

Supposons f non nul. On a alors pour $K \gg 0$ tel qu'il existe α vérifiant $v_\pi(a_\alpha) \leq K$,

$$\begin{aligned} |f|_\rho &= \sup_{k \geq K} N_k(f)\rho^k \\ &= \sup_{k \geq K} \sup_{\substack{\alpha \\ v_\pi(a_\alpha) \leq k}} q^{-\alpha}\rho^k \\ &= \sup_\alpha \big(\sup_{k \geq v_\pi(a_\alpha)} \rho^k \big) q^{-\alpha} \\ &= \sup_\alpha |a_\alpha|_\rho q^{-\alpha}. \end{aligned}$$

□

On obtient alors que pour $I \subset [0,1]$, $I \neq \{0\}$ et $I \neq \{1\}$,

— si $0, 1 \notin I$

$$B_I = \Big\{ \sum_{\alpha \in \mathbb{Z}[\frac{1}{p}]} a_\alpha T^\alpha \mid a_\alpha \in W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q},\ \forall \rho \in I \quad \lim_\alpha |a_\alpha|_\rho\, q^{-\alpha} = 0 \Big\}$$

où la limite est prise suivant le filtre du complémentaire des parties finies de $\mathbb{Z}\big[\frac{1}{p}\big]$,

— sinon B_I se décrit comme les $f = \sum_\alpha a_\alpha T^\alpha \in B_{I \setminus \{0,1\}}$ vérifiant les conditions additionnelles

- $\sup_\alpha |a_\alpha|_0 < +\infty$ si $0 \in I$ i.e. $\inf_\alpha v_\pi(a_\alpha) > -\infty$
- $\sup_\alpha |a_\alpha|_1 q^{-\alpha} < +\infty$ si $1 \in I$ i.e. $\inf_{a_\alpha \neq 0} \alpha > -\infty$.

1.7.2. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$, le cas $\varphi(X) = X^q$. — Notons $K = k((\pi_F))$ et

$$\mathbf{A}_K = W_{\mathcal{O}_E}(k)[\![X]\!] \subset \mathcal{O}_{\mathscr{E}_K} = W_{\mathcal{O}_E}(k)[\![X]\!] < \tfrac{1}{X} >$$

comme sous-anneau de l'anneau de Cohen $\mathcal{O}_{\mathscr{E}_K}$ (cf. exemple 1.3.5). Munissons les du Frobenius φ tel que

$$\varphi(X) = X^q.$$

Cela induit un isomorphisme

$$\widehat{\varinjlim_\varphi \mathbf{A}_K} \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{K^{1/p^\infty}} \subset \mathbf{A}_F$$

où la complétion est pour la topologie π-adique. Le morphisme $\mathbf{A}_K \to \mathbf{A}_F$ est donné par

$$X \longmapsto T = [\pi_F].$$

Soit $I \subset [0,1]$ un intervalle différent de $\{0\}$ et $\{1\}$. Puisque $\mathbf{A}_F$ est le complété de $\mathbf{A}_{K^{1/p^\infty}}$ pour la topologie faible (sec. 1.4.3) on en déduit que $\mathbf{A}_F$ est le complété de $\varinjlim_{\varphi} \mathbf{A}_K$ pour la topologie définie par les normes de Gauss $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$. Soit alors

$$B_K^b = \mathbf{A}_K[\tfrac{1}{X}].$$

On le munit des normes de Gauss $(|.|_\rho)_{\rho\in[0,1]}$ via le plongement

$$\iota : B_K^b \hookrightarrow B_F^b.$$

Notons $B_{K,I}$ le complété de B_K^b via à vis de $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$ comme E-algèbre de Fréchet. Alors,

$$\widehat{\varinjlim_{n,\varphi} B_{K,\varphi^n(I)}} \xrightarrow{\sim} B_{F,I}.$$

Pour $\rho \in [0,1]$ on note

$$\check{\rho} = \begin{cases} q^{-1/r} \text{ si } \rho = q^{-r} \neq 0,1 \\ 1 \text{ si } \rho = 0 \\ 0 \text{ si } \rho = 1. \end{cases}$$

Pour un intervalle I comme précédemment notons

$$\check{I} = \{\check{\rho} \mid \rho \in I\}.$$

Posons pour $\rho \in [0,1]$ et $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k \in \mathbf{A}_K$

$$\|f\|_\rho = \begin{cases} \sup_k |a_k|\rho^k \text{ si } \rho \neq 0 \\ q^{-v_X(f)} \text{ si } \rho = 0. \end{cases}$$

où la valeur absolue sur $W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est telle que $|\pi_E| = q^{-1}$. Lorsque $\rho \neq 0$ il s'agit de la norme de Gauss associée au rayon ρ où f est vue comme une fonction rigide analytique de la variable X sur le disque ouvert $\mathbb{D}_{W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}} = \{|X| < 1\} \subset \mathbb{A}^1_{W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}}$. On a alors le lemme suivant qui découle du lemme 1.7.1.

Lemme 1.7.2. — *Pour $\rho \in [0,1]$, via le plongement $\iota : B_K^b \hookrightarrow B_F^b$ on a*

$$|\iota(f)|_\rho = \|f\|_{\check{\rho}}.$$

Si $0,1 \notin \check{I}$, soit $\mathcal{O}_{\check{I}}$ l'anneau des fonctions holomorphes de la variable X à coefficients dans $W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}$ sur la couronne de rayons définis par $\check{I}$

$$\mathcal{O}_{\check{I}} = \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n T^n \mid a_n \in W_{\mathcal{O}_E}(k)_\mathbb{Q}, \quad \forall \rho \in \check{I} \lim_{|n|\to+\infty} |a_n|\rho^n = 0 \Big\}$$

. On définit plus généralement $\mathcal{O}_{\check{I}}$ comme étant les $f \in \mathcal{O}_{\check{I}\setminus\{0,1\}}$ satisfaisant

- f est méromorphe en 0 si $0 \in \check{I}$
- f est bornée à l'extérieur de la couronne définie par $\check{I} \setminus \{1\}$ i.e. $\lim_{\rho \to 1} \|f\|_\rho < +\infty$.

Considérons l'endomorphisme du disque ouvert épointé de rayon 1 sur E défini par $\varphi(X) = X^q$. C'est un morphisme étale fini. Si $\mathbb{D}_{\check{I}}$ désigne la couronne

$$\mathbb{D}_{\check{I}} = \{|X| \in \check{I} \setminus \{0,1\}\} \subset \mathbf{A}^1_{W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}}$$

On a alors une tour de morphismes étales finis surjectifs

$$\mathbb{D}_{\check{I}} \xleftarrow{\varphi} \mathbb{D}_{\varphi(I)^{\check{}}} \xleftarrow{\varphi} \cdots \xleftarrow{\varphi} \mathbb{D}_{\varphi^n(I)^{\check{}}} \xleftarrow{\varphi} \cdots$$

qui induit une suite de plongements isométriques pour $\rho \in \check{I}$

$$(\mathcal{O}_{\check{I}}, \|.\|_\rho) \hookrightarrow (\mathcal{O}_{\varphi(I)^{\check{}}}, \|.\|_{\rho^{1/q}}) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (\mathcal{O}_{\varphi^n(I)^{\check{}}}, \|.\|_{\rho^{1/q^n}}) \hookrightarrow \ldots.$$

On vérifie alors que B_I est le complété de

$$\varinjlim_{n \geq 0} \mathcal{O}_{\varphi^n(I)^{\check{}}}$$

pour la famille de normes précédentes lorsque ρ parcourt I. Ainsi, on peut penser à B_I comme étant l'algèbre des fonctions holomorphes sur

$$\text{"} \varprojlim_{n \geq 0} \mathbb{D}_{\varphi^n(I)^{\check{}}} \text{"}$$

Par exemple, on peut penser à B comme étant l'algèbre des fonctions holomorphes sur la limite projective de disques épointés

$$\text{"} \varprojlim_{n \geq 0} \mathbb{D}^* \text{"}$$

où $\mathbb{D}^* = \{0 < |X| < 1\} \subset \mathbb{A}^1_{W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}}$ et les morphismes de transition sont étales finis de degré q.

1.7.3. Interprétation comme perfectisé d'anneaux de fonctions holomorphes de la variable $[\pi_F]$, le cas $\varphi(X) = (1+X)^q - 1$. — Soit $\mathbf{A}_K = W_{\mathcal{O}_E}(k)[\![X]\!]$ comme dans la section précédente. On pose cette fois-ci

$$\varphi(X) = (1+X)^q - 1.$$

Ce choix de relèvement de Frobenius définit un plongement (cf. exemple 1.3.5)

$$\begin{array}{rcl} \iota : \mathbf{A}_K & \hookrightarrow & \mathbf{A}_F \\ X & \longmapsto & [1+\pi_F] - 1. \end{array}$$

On reprend les notations précédentes concernant les normes de Gauss sur $\mathbf{A}_K$.

Proposition 1.7.3. — *Si $\rho \in [0,1]$ vérifie $\rho > q^{-\frac{q}{q-1}}$ alors pour $f \in \mathbf{A}_K$ on a*

$$\|f\|_\rho = |\iota(f)|_{\check{\rho}}.$$

Démonstration. — Posons $\epsilon = 1 + \pi_F$ et notons $\pi_\epsilon = [\epsilon] - 1$. Le polygone de Newton de π_ϵ vaut $+\infty$ exactement sur $]-\infty, 0[$ et a pour pente $\frac{(q-1)}{q^{n+1}} v(\epsilon - 1) = \frac{1}{(q-1)q^{n+1}}$ sur l'intervalle $[n, n+1]$, $n \in \mathbb{N}$ (cf. sec. 6.3, cela résulte de ce que « $\pi_\epsilon = \prod_{n \leq 0} \varphi^n(u_\epsilon)$ »). On en déduit que lorsque $\rho < q^{-\frac{q-1}{q}}$

$$\Big|\frac{\pi_\epsilon}{T} - 1\Big|_\rho < 1.$$

Il est facile d'en déduire que si $f = \sum_{k \geq 0} a_k X^k \in W_{\mathcal{O}_E}(k)[\![X]\!]$ alors

$$|f(\pi_\epsilon)|_\rho = |f(T)|_\rho.$$

□

Comme dans la section précédente, on en déduit que si $I \subset [0, q^{-1/(q-1)}]$ alors B_I s'interprète comme les fonctions holomorphes sur

$$\varprojlim_{n,\varphi} \mathbb{D}_{\varphi^n(I)^{\cdot}}$$

avec une condition d'être bornée au voisinage du rayon $|X| = 1$ si $0 \in I$ (i.e. $1 \in \check{I}$).

1.7.4. Interprétation de la symétrie entre E et F. — Supposons que E est de caractéristique p. On a vu dans l'exemple 1.6.5 que B_I s'interprète comme une algèbre de fonctions holomorphes à coefficients dans F de la variable π_E. Cependant on vient de voir que lorsque $F = k((\pi_F^{1/p^\infty}))$, B_I s'interprète comme une algèbre de fonctions holomorphes à coefficients dans E de la variable π_F. Ce phénomène est expliqué par la proposition suivante dont la démonstration élémentaire est laissée au lecteur.

Proposition 1.7.4. — *Soit k un corps parfait, $E = k((\pi_E))$ et $F = k((\pi_F))$ munis de leurs valeurs absolues telles que $|\pi_E| = |\pi_F| = q^{-1}$. Notons $\mathbb{D}_E^*$, resp. $\mathbb{D}_F^*$, le disque rigide analytique épointé sur E, resp. F, de la variable π_F, resp. π_E. Il y a alors un isomorphisme d'algèbres de Fréchets*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(\mathbb{D}_E^*) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}(\mathbb{D}_F^*) \\ \sum_n \Big(\sum_k a_{n,k} \pi_E^k\Big) \pi_F^n & \longmapsto & \sum_k \Big(\sum_n a_{n,k} \pi_F^k\Big) \pi_E^n \end{array}$$

Via lequel la norme de Gauss associée au rayon q^{-r} correspond à la norme de Gauss associée au rayon $q^{-1/r}$.

Remarque 1.7.5. — Posons

$$R = \mathcal{O}_E \hat{\otimes}_k \mathcal{O}_F = k[\![\pi_E, \pi_F]\!]$$

et $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(R)$ le schéma formel associé sur k. L'espace adique associé est

$$\mathfrak{X}^{ad} = \mathrm{Spa}(R, R).$$

Les deux algèbres de fonctions holomorphes précédentes ne sont rien d'autre que l'algèbre de Fréchet des fonctions sur l'ouvert

$$\mathfrak{X}^{ad} \setminus V(\pi_E \pi_F).$$

Il y a deux morphismes

$$\begin{tikzcd} & \mathrm{Spa}(F, \mathcal{O}_F) \\ \mathfrak{X}^{ad} \setminus V(\pi_E \pi_F) \arrow[ur] \arrow[dr] & \\ & \mathrm{Spa}(E, \mathcal{O}_E) \end{tikzcd}$$

qui identifient $\mathfrak{X}^{ad} \setminus V(\pi_E \pi_F)$ soit à l'espace adique $\mathbb{D}_E^*$, soit à $\mathbb{D}_F^*$ (qui sont donc isomorphes comme k-espaces adiques où k est muni de la topologie discrète).

Bien sûr, les algèbres de fonction holomorphes que nous étudions dans ce texte ne sont pas nouvelles. Elles sont déjà apparues sous d'autres noms dans les travaux de Colmez ([**11**]) Berger ([**4**]) et Kedlaya ([**42**]). Cependant nous prenons un nouveau point de vue sur celles-ci plus intrinsèque qui consiste à les penser comme des fonctions holomorphes de la variable p et non $\pi_\epsilon = [\epsilon] - 1$ pour un $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ (une variable qui provient de la théorie du corps des normes lorsque F est le corps des normes parfait de $\mathbb{Q}_p(\zeta_{p^\infty})$ et ϵ un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$). La conséquence de cela est que comparé aux travaux précédents « le rayon q^{-r} correspond aux rayon $q^{-1/r}$ ». On renvoie par exemple à la remarque 1.8.5 pour un exemple de ce phénomène.

1.7.5. Le cas maximalement complet. — Soit $k|\mathbb{F}_q$ un corps parfait et $\Gamma \subset \mathbb{R}$ un sous-groupe non-nul vérifiant $p\Gamma = \Gamma$. Soit ([**53**])

$$\begin{aligned} F &= k((\pi_F^\Gamma)) \\ &= \Big\{ \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha \pi_F^\alpha \mid a_\alpha \in k,\ \{\alpha \mid a_\alpha \neq 0\} \text{ est bien ordonné} \Big\} \end{aligned}$$

muni de la valeur absolue

$$|\sum_\alpha a_\alpha \pi_F^\alpha| = \sup_{\substack{\alpha \\ a_\alpha \neq 0}} q^{-\alpha}.$$

On vérifie qu'alors

$$\mathbf{A} = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Gamma_+} a_\alpha T^\alpha \mid a_\alpha \in W_{\mathcal{O}_E}(k),\ \lim_{\mathscr{F}} a_\alpha = 0 \Big\}$$

où $\mathscr{F}$ désigne le filtre du complémentaire des sous-ensembles bien ordonnés de Γ. On vérifie alors que pour $I \subset]0,1[$ différent de $\{0\}$ et $\{1\}$

$$B_I = \Big\{ \sum_{\alpha \in \Gamma} a_\alpha T^\alpha \mid a_\alpha \in W_{\mathcal{O}_E}(k), \forall \rho \in I\ \lim_{\mathscr{F}} |a_\alpha|_\rho q^{-\alpha} = 0 \Big\}.$$

1.8. Le corps valué hensélien $\mathscr{E}^\dagger$ et l'anneau de Robba

Définition 1.8.1. — On note

$$\begin{aligned}\mathscr{E}^\dagger &= \varinjlim_{\substack{\rho\to 0\\ >}} B_{[0,\rho]}\\ \mathscr{R} &= \varinjlim_{\substack{\rho\to 0\\ >}} B_{]0,\rho]}.\end{aligned}$$

D'après la proposition 1.6.23

$$\mathscr{E}^\dagger = \Big\{ \sum_{n\gg -\infty} [x_n]\pi^n \in \mathscr{E} \mid \exists \rho \in]0,1[\ \sup_n |x_n|\rho^n < +\infty \Big\}.$$

Proposition 1.8.2 **([11] II.4.1 et II.4.2)**. — *L'anneau $\mathscr{E}^\dagger$ muni de la valuation v_π est un corps valué Hensélien de complété $\mathscr{E}$.*

Démonstration. — Si $x \in B_{[0,\rho]}$ est non nul avec $0 < \rho < 1$ alors $\mathcal{N}ewt_{[0,\rho]}(x)$ possédant un nombre fini de pentes, $\mathcal{N}ewt_{[0,\rho']}(x) = \emptyset$ pour $0 < \rho' \leq \rho$ avec ρ' suffisamment proche de 0. On conclut que x est inversible dans $\mathscr{E}^\dagger$ en appliquant la proposition 1.6.25. L'anneau $\mathscr{E}^\dagger$ est donc un corps. Soit l'anneau

$$B^\circ_{[0,\rho]} = \{x \in B_{[0,\rho]} \mid v_\pi(x) \geq 0 \ \text{ et } |x|_\rho \leq 1\}.$$

On a

$$\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger} = \varinjlim_{\substack{\rho\to 0\\ >}} B^\circ_{[0,\rho]}\big[\tfrac{1}{[\varpi_F]}\big].$$

et

$$\varinjlim_{\substack{\rho\to 0\\ >}} B^\circ_{[0,\rho]}/\pi B^\circ_{[0,\rho]} = \mathcal{O}_F \subset F = \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}/\pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}.$$

Soient maintenant $P \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}[X]$ unitaire et $x \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ tels que $P(x) \equiv 0 \bmod \pi$ et $P'(x) \notin \pi\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ i.e. $P'(x) \in \mathcal{O}^\times_{\mathscr{E}^\dagger}$. On veut montrer qu'il existe $y \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ tel que $x \equiv y \bmod \pi$ et $P(y) = 0$. Quitte à remplacer P par $[a]^{\deg P} P\big(\frac{X}{[a]}\big)$ pour un $a \in \mathcal{O}_F$ non nul, on peut supposer que la réduction modulo π de P est dans $\mathcal{O}_F[X]$. Écrivons $P(x) = \pi z$ pour un $z \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$. Soit $\rho_0 \in]0,1[$ tel que $P \in B^\circ_{[0,\rho_0]}[X]$, $x \in B^\circ_{[0,\rho_0]}$ et $z \in B_{[0,\rho_0]}$. On a

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ 0<\rho\leq\rho_0}} \Big|\frac{\pi z}{P'(x)}\Big|_\rho = 0.$$

car $P'(x) \in \mathcal{O}^\times_{\mathscr{E}^\dagger}$ et pour un $w \in B_{[0,\rho_0]} \cap \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ de réduction $\bar{w} \in F$ modulo π,

$$\lim_{\substack{\rho\to 0\\ 0<\rho\leq\rho_0}} |w|_\rho = |\bar{w}|.$$

Soit donc ρ_1 satisfaisant $0 < \rho_1 \leq \rho_0$ tel que

$$\Big|\frac{\pi z}{P'(x)}\Big|_{\rho_1} < 1.$$

Dans l'anneau $B^{\circ}_{[0,\rho_1]}$ on a donc

$$\frac{P(x)}{P'(x)} \in B^{\circ\circ}_{[0,\rho_1]}.$$

La méthode de Newton permet de conclure par complétude de $B_{[0,\rho_1]}$. □

Corollaire 1.8.3. — *Si $L|F$ est de degré fini alors $\mathscr{E}^{\dagger}_L|\mathscr{E}^{\dagger}_F$ est finie de degré $[L:F]$. Si de plus $L|F$ est galoisienne alors $\mathscr{E}^{\dagger}_L|\mathscr{E}^{\dagger}_F$ l'est également et*

$$Gal(L|F) \xrightarrow{\sim} Gal\big(\mathscr{E}^{\dagger}_L|\mathscr{E}^{\dagger}_F\big).$$

Remarque 1.8.4. — La proposition 11.2.15 fournit une généralisation du résultat précédent.

Remarque 1.8.5. — Soit $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbb{F}_q((\pi_F))}$ l'anneau de Robba borné « classique » des germes de fonctions holomorphes bornées de la variable X à coefficients dans E sur des couronnes de rayons $[\rho, 1[$ lorsque $\rho \to 1$. Alors, $\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbb{F}_q((\pi_F^{1/p^\infty}))}$ est « un complété » de

$$\varinjlim_{\varphi} \mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbb{F}_q((\pi_F))}.$$

au sens où

$$\mathscr{E}^{\dagger}_{\mathbb{F}_q((\pi_F^{1/p^\infty}))} = \varinjlim_{\rho\to 1} \widehat{\varinjlim_{n\to+\infty} \mathcal{O}_{[\rho^{1/q^n},1]}}$$

où si $\mathbb{D}_{[\rho',1[}$ désigne la couronne $\{\rho' \leq |X| < 1\}$, $\mathcal{O}_{[\rho',1]}$ désigne les fonctions bornées sur cette couronne munies de la norme sup et les morphismes de transition dans la deuxième limite inductive sont induits par le morphisme étale fini $\mathbb{D}_{[\rho'^{1/q^n},1[} \longrightarrow \mathbb{D}_{[\rho',1[}$ associé à $X \mapsto X^q$. On renvoie à la section 1.7.2 pour plus de détails. De même, d'après la section 1.7.3 on a la même interprétation en remplaçant le relèvement de Frobenius précédent par $X \mapsto (1+X)^q - 1$.

De la même façon on a

$$\mathscr{R}_{\mathbb{F}_q((\pi_F^{1/p^\infty}))} = \varinjlim_{\rho\to 1} \widehat{\varinjlim_{n\to+\infty} \mathcal{O}_{[\rho^{1/q^n},1[}}.$$

Enfin, notons la conséquence suivante de la proposition 1.9.1.

Proposition 1.8.6. — *On a l'égalité*

$$\mathscr{R}^{\times} = \big(\mathscr{E}^{\dagger}\big)^{\times}.$$

1.9. Extension des fonctions holomorphes au bord

Proposition 1.9.1. — *Soit $I \subset]0,1]$ un intervalle vérifiant $0 \in \overline{I}$. Alors*

$$\begin{aligned} B_{I\cup\{0\}} &= \{x \in B_I \mid \exists A,\ \mathcal{N}ewt_I^0(x)_{|]-\infty,A]} \equiv +\infty\} \\ &= \{x \in B_I \mid \exists A,\ \mathcal{N}ewt_I(x) \subset \{(t,u) \in \mathbb{R}^2 \mid t \geq A\}\} \\ &= \{x \in B_I \mid \exists N \in \mathbb{N},\ \pi^n x \text{ est borné au voisinage de } 0\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $x = \sum_{k \gg -\infty} [x_k]\pi^k \in B^b$ on note

$$\begin{aligned} x^+ &= \sum_{k\geq 0} [x_k]\pi^k \\ x^- &= \sum_{k<0} [x_k]\pi^k. \end{aligned}$$

Soit $x \in B_I$ satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de B^b tendant vers x. Écrivons $x_n = x_n^+ + x_n^-$. Pour montrer que $x \in B_{I\cup\{0\}}$ on affirme qu'il suffit de montrer que $(x_n^-)_{n\geq 0}$ tends vers 0 dans B_I. En effet, si c'est le cas alors $(x_n^+)_{n\geq 0}$ tends vers x dans B_I. Écrivons alors

$$x_{n+1}^+ - x_n^+ = \sum_{k\geq 0} [z_{n,k}]\pi^k.$$

La suite double $([z_{n,k}]\pi^k)_{n\geq 0, k\geq 0}$ tends vers 0 dans $B_{I\cup\{0\}}$ pour le filtre du complémentaire des parties finies de $\mathbb{N}^2$. La série double

$$\sum_{n,k\geq 0} [z_{n,k}]\pi^k$$

converge dans $B_{I\cup\{0\}}$ et définit un élément de $B_{I\cup\{0\}}$ s'envoyant sur $x_0 + x$ via $B_{I\cup\{0\}} \to B_I$.

Il reste donc à montrer que $(x_n^-)_{n\geq 0}$ tends vers 0. Quitte à multiplier x par une puissance de π on peut supposer que $\mathcal{N}ewt(x)_{|]-\infty,0[} \equiv +\infty$. Cela se traduit en termes de valuations de Gauss en l'existence d'un nombre α ainsi que de $r_0 \geq 0$ tels que pour $r \geq r_0$ et $q^{-r} \in I$ on ait

$$v_r(x) \geq \alpha.$$

Soient maintenant $r \geq 0$ tel que $q^{-r} \in I$ et $A \in \mathbb{R}$ fixés. Soit $r' \geq \sup\{r, r_0\}$ satisfaisant

$$r' - r \geq A - \alpha.$$

Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$ on ait $v_{r'}(x_n) = v_{r'}(x)$. Remarquons maintenant pour $y \in B^b$ satisfaisant $y = y^-$ on a, utilisant que $r' \geq r$,

$$v_r(y) \geq v_{r'}(y) + (r' - r).$$

De là on tire que pour $n \geq N$

$$v_r(x_n^-) \geq \alpha + r' - r \geq A.$$

Cela étant vrai pour tout A on conclut. □

Proposition 1.9.2. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$ satisfaisant $1 \in \overline{I}$. Alors,*

$$\begin{aligned} B_{I\cup\{1\}} &= \{x \in B_I \mid \mathcal{N}ewt_I(x) \text{ est borné inférieurement }\} \\ &= \{x \in B_I \mid x \text{ est borné sur une couronne de rayons } [\rho, 1[\text{ pour un } \rho \in I\} \\ &= \{x \in B_I \mid \lim_{\rho\to 1} |x|_\rho < +\infty\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $x = \sum_{n \gg -\infty} \in B^b$ on note

$$\begin{aligned} {}^+x &= \sum_{\substack{n \gg -\infty \\ v(x_n)\geq 0}} [x_n]\pi^n \\ {}^-x &= \sum_{\substack{n \gg -\infty \\ v(x_n)< 0}} [x_n]\pi^n. \end{aligned}$$

Soit $x \in B_I$ satisfaisant les hypothèses de l'énoncé. Quitte à multiplier x par un $[a], a \in F^\times$, on suppose que $\mathcal{N}ewt_I(x) \geq 1$. Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de B^b tendant vers x. Écrivons $x_n = {}^+x_n + {}^-x_n$. Pour montrer que $x \in B_{I\cup\{1\}}$ on affirme qu'il suffit de montrer que $({}^-x_n)_{n\geq 0}$ tends vers 0 dans B_I. En effet, si c'est le cas alors $({}^+x_n)_{n\geq 0}$ tends vers x dans B_I. De plus, si

$${}^+x_{n+1} - {}^+x_n = \sum_{k \gg -\infty} [z_{n,k}]\pi^k$$

notons pour $l \in \mathbb{N}$,

$$A_{n,l} = \{k \in \mathbb{Z} \mid v(z_{n,k}) \geq l\}.$$

Soit alors

$$w_{n,l} = \sum_{k\in A_{n,l}} [z_{n,k}]\pi^k \in B^b.$$

Alors, la suite double $(w_{n,l})_{n\geq 0, l\geq 0}$ tends vers 0 dans $B_{I\cup\{1\}}$ et sa somme

$$\sum_{n,l\geq 0} w_{n,l}$$

définit un élément de $B_{I\cup\{1\}}$ s'envoyant sur $x + x_0$ dans B_I.

Il reste donc à montrer que $({}^-x_n)_{n\geq 0}$ tends vers 0 dans B_I. Remarquons d'abord que pour $y \in B^b$ satisfaisant $y = {}^-y$ et $0 < r' \leq r$ on a

$$v_r(y) \geq \frac{r}{r'} v_{r'}(y).$$

Soient maintenant $r > 0$ tel que $q^{-r} \in I$ et $A \in [1, +\infty[$. Choisissons $r' \leq r$ tel que $0 < r' \leq r/A$ et $v_{r'}(x) \geq 1/2$ (ce qui est possible puisque $\mathcal{N}ewt(x) \geq 1$). Soit $N \in \mathbb{N}$ tel que pour $n \geq N$ on ait $v_{r'}(x_n) = v_{r'}(x)$. On a alors pour $n \geq N$

$$v_r({}^-x_n) \geq \frac{A}{2}.$$

Cela étant vrai pour tout A on conclut. □

Remarque 1.9.3. — Dans l'énoncé précédent on a écrit l'expression $\lim_{\rho\to 1}|x|_\rho$. Cette limite existe toujours comme élément $[0,+\infty]$. En effet, la fonction $r\mapsto v_r(x)$, $q^{-r}\in I$, est concave et possède donc toujours une limite dans $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ en 0.

En mettant ensemble 1.9.2 et 1.6.23 on obtient également le résultat suivant.

Proposition 1.9.4. — *On a*

$$B^b = B_{[0,1]} = \{x\in B \mid \exists n\in\mathbb{Z},\ \pi^n x \text{ est borné}\}.$$

Le corollaire suivant montre la puissance de l'outil que forment les polygones de Newton et de l'intuition géométrique qu'ils sous-tendent au sens où il serait assez dur de les obtenir avec la simple définition des B_I.

Corollaire 1.9.5. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$.*

1. *Si $0\in\overline{I}$ alors $B_I^\times = B_{I\cup\{0\}}^\times$.*
2. *Si $1\in\overline{I}$ alors $B_I^\times = B_{I\cup\{1\}}^\times$.*
3. *On a*

$$\begin{aligned} B^\times &= (B^b)^\times \\ &= \Big\{\sum_{n\geq n_0}[x_n]\pi^n \mid x_n\in F, x_{n_0}\neq 0,\ \forall n\geq n_0\ v(x_n)\geq v(x_{n_0})\Big\}_{n_0\in\mathbb{Z}} \end{aligned}$$

Remarque 1.9.6. — Les résultats d'extensions précédents sont bien sûr faux lorsqu'on remplace I par un intervalle relativement compact dans $]0,1[$. Plus précisément, si $I=]\rho_1,\rho_2[$ avec $0<\rho_1\leq\rho_2<1$ alors $B_{\overline{I}}\subset B_I$ est plus petit que les fonctions bornées dans B_I (comme on le vérifie lorsque $E=\mathbb{F}_q((\pi))$). Les propriétés d'extension précédentes sont très particulières aux extrémités de « notre disque épointé ».

1.10. L'anneau B^+

1.10.1. Définition et premières propriétés. —

Définition 1.10.1. — On note

$$B^{b,+} = \Big\{\sum_{n\gg-\infty}[x_n]\pi^n\in\mathscr{E} \mid \forall n\ |x_n|\leq 1\Big\}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} B^{b,+} &= \mathbf{A}[\tfrac{1}{\pi}] \\ &= \{x\in B^{b,+} \mid |x|_1\leq 1\}. \end{aligned}$$

Définition 1.10.2. — Pour I un intervalle de $[0,1]$ on note B_I^+ le complété de $B^{b,+}$ relativement aux normes de Gauss $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$. On note $B_\rho^+ := B_{\{\rho\}}^+$ et

$$B^+ = B_{]0,1[}^+.$$

Ainsi, B_I^+ est l'adhérence de $B^{b,+}$ dans B_I. On a par exemple

$$B_0^+ = B^{b,+}$$

et en fait $B_I^+ = B^{b,+}$ dès que $0 \in I$ d'après 1.4.15. On supposera donc désormais que $0 \notin I$.

Exemple 1.10.3. — Supposons que $\rho \in |F^\times|$ et soit $a \in F$ tel que $\rho = |a|$. La boule unité de $|.|_\rho$ dans $B^{b,+}$ est $\mathbf{A}\big[\frac{[a]}{\pi}\big]$ et donc

$$B_\rho^+ = \widehat{\mathbf{A}\big[\tfrac{[a]}{\pi}\big]}\big[\tfrac{1}{\pi}\big].$$

On vérifie aussitôt le lemme suivant.

Lemme 1.10.4. — *Pour $x \in B^{b,+}$ et $0 < r' \leq r$ on a*

$$v_{r'}(x) \geq \frac{r'}{r} v_r(x).$$

On en déduit qu'en fait si $I \subset]0,1[$ est tel que $\rho = \inf I \in I$ et $\rho > 0$ alors

$$B_I^+ = B_\rho^+ = B_{[\rho,1[}^+.$$

On a en fait plus.

Proposition 1.10.5. — *On a $B_\rho^+ = B_{[\rho,1]}^+$.*

Démonstration. — Soit

$$x = \sum_{n \geq 0} x_n \in B_\rho^+$$

avec $x_n \in B^{b,+}$ et $\lim_{n\to+\infty} |x_n|_\rho = 0$. Pour $y = \sum_{k \gg -\infty} [y_k]\pi^k \in B^{b,+}$ notons $y^+ = \sum_{k\geq 0}[y_k]\pi^k$ et $y^- = \sum_{k<0}[y_k]\pi^k$. Remarquons que

$$|y^-|_1 \leq |y|_\rho.$$

La série

$$\sum_{n\geq 0} x_n^-$$

converge donc dans $B_{[\rho,1]}$. Puisque $\mathbf{A}$ est complet pour $|.|_\rho$, $\sum_{n\geq 0} x_n^+ \in \mathbf{A}$. On a donc

$$x = \sum_{n\geq 0} x_n^- + \sum_{n\geq 0} x_n^+ \in B_{[0,1]}.$$

□

Remarque 1.10.6. — Il faut faire attention quant à la signification de l'énoncé précédent. Il dit que l'application de restriction à la couronne de rayon ρ, $B_{[\rho,1]}^+ \to B_\rho^+$, est un isomorphisme d'algèbres. Mais ce n'est pas un isomorphisme d'algèbres de Banach. Cela pourrait sembler être en contradiction avec le théorème de l'application ouverte, mais ça ne l'est pas car B_ρ^+ est un E-espace de Banach tandis que $B_{[\rho,1]}^+$ est un E^{disc}-espace de Banach.

On a donc lorsque $\rho \leq \rho'$

$$B_\rho^+ \subset B_{\rho'}^+$$

et pour tout I,

$$B_I^+ = \bigcap_{\rho \in I} B_\rho^+.$$

Ainsi par exemple

$$B^+ = \bigcap_{\rho > 0} B_\rho^+.$$

Puisque

$$\varphi : B_\rho^+ \xrightarrow{\sim} B_{\rho^q}^+ \subset B_\rho^+,$$

on peut voir φ comme un endomorphisme de B_ρ^+ et pour $0 < \rho < 1$

$$B^+ = \bigcap_{n \geq 0} \varphi^n(B_\rho^+).$$

Ainsi, B^+ est le plus grand sous-anneau de B_ρ^+ sur lequel φ est bijectif.

Proposition 1.10.7. — *On a pour tout $\rho \in [0,1]$*

$$\begin{aligned} B_\rho^+ &= \{x \in B_{[\rho,1[} \mid \mathcal{N}ewt_{[\rho,1[}(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in B_{[\rho,1]} \mid |x|_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

On a également

$$\begin{aligned} B^+ &= \{x \in B \mid \mathcal{N}ewt(x) \geq 0\} \\ &= \{x \in B \mid [x|_1 \leq 1\}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Traitons le cas de B_ρ^+, le cas de B^+ étant identique. D'après 1.9.2, si $x \in B_{[\rho,1[}$ non nul vérifie $\mathcal{N}ewt_{[\rho,1[}(x) \geq 0$ alors $x \in B_{[\rho,1]}$. Puisque $\mathcal{N}ewt_{[\rho,1]}(x)$ est obtenu en ajoutant éventuellement une pente 0 à $\mathcal{N}ewt_{[\rho,1[}$, on a encore $\mathcal{N}ewt_{[\rho,1]}(x) \geq 0$ et donc $v_0(x) = \lim_{+\infty} \mathcal{N}ewt_{[\rho,1]}(x) \geq 0$. Maintenant, d'après 1.6.16 si $(x_n)_{n \geq 0}$ est une suite de B^b convergeant vers x alors $v_0(x_n) = v_0(x)$ pour $n \gg 0$ et donc $x_n \in B^{b,+}$. □

***Remarque 1.10.8* (Suite de la remarque 1.6.7)**. — Soient $\rho \in]0,1[$. et $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de $\mathcal{O}_F$ satisfaisant $\lim_{n \to -\infty} |x_n| \rho^n = 0$. Alors, $\sum_{n \in \mathbb{Z}} [x_n] \pi^n$ converge dans B_ρ^+ mais lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ on ne sait pas si tout élément de B_ρ^+ s'écrit sous cette forme là, ni si une telle écriture est unique, ni si la somme ou le produit de deux tels éléments est de cette forme. La même remarque s'applique à B^+.

Remarque 1.10.9. — L'anneau B^+ apparait dans la littérature « classique » de théorie de Hodge p-adique sous le nom de B_{rig}^+.

Remarque 1.10.10. — D'après la section 1.7.2, $B^+_{\mathbb{F}_q((\pi_F^{1/p^\infty}))}$ s'interprète comme les fonctions rigides analytiques sur

$$\text{"} \varprojlim_{\varphi} \mathbb{D}_E \text{"}$$

où $\mathbb{D}_E$ désigne le disque ouvert de rayon 1 sur E et si la coordonnée est X φ est le relèvement de Frobenius $X \mapsto X^q$. Ainsi, l'inclusion $B^+_{\mathbb{F}_q((\pi^{1/p^\infty}))} \subset B_{\mathbb{F}_q((\pi^{1/p^\infty}))}$ est induite par

$$\varprojlim_{\varphi} \mathbb{D}_E^* \subset \varprojlim_{\varphi} \mathbb{D}_E$$

où $\mathbb{D}_E^*$ est le disque épointé.

1.10.2. Les bivecteurs. — On va définir un sous-$\mathcal{O}_E$-module de B^+ sur lequel la remarque 1.10.8 précédente est prise en défaut. Si R est une $\mathbb{F}_q$-algèbre muni de la topologie discrète on note

$$CW^u_{\mathcal{O}_E}(R) = \varinjlim_{n\geq 1} W_{O_E,n}(R)$$

le groupe des covecteurs de Witt unipotents, les applications de transition dans la limite inductive précédente étant données par le Verschiebung, $V_\pi : W_{\mathcal{O}_E,n}(R) \to W_{\mathcal{O}_E,n+1}(R)$. Les éléments de $CW^u_{\mathcal{O}_E}(R)$ se décrivent de la façon suivante,

$$CW^u_{\mathcal{O}_E}(R) = \Big\{[\ldots, a_i, \ldots, a_{-1}, a_0] \mid a_i \in R,\ a_i = 0 \text{ pour } i \ll 0\Big\}.$$

Ce groupe s'étend en un groupe des covecteurs de Witt ([**24**], chap.II pour le cas $E = \mathbb{Q}_p$),

$$CW_{\mathcal{O}_E}(R) = \Big\{[\ldots, a_i, \ldots, a_{-1}, a_0] \mid a_i \in R,\ \exists N \leq 0,\ \text{l'idéal engendré par les } (a_i)_{i\leq N} \text{ est nilpotent}\Big\}.$$

Celui-ci est muni d'un Verschiebung $V_\pi : CW_{\mathcal{O}_E}(R) \to CW_{\mathcal{O}_E}(R)$ et on pose

$$BW_{\mathcal{O}_E}(R) = \varprojlim_{\mathbb{N}} CW_{\mathcal{O}_E}(R),$$

les applications de transition étant données par V_π. On a donc,

$$BW_{\mathcal{O}_E}(R) = \Big\{\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_\pi^i[a_i] \mid a_i \in R,\ \exists N,\ \text{l'idéal engendré par les } (a_i)_{i\leq N} \text{ est nilpotent}\Big\}.$$

Définition 1.10.11. — On pose

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = \varprojlim_{\mathfrak{a}} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$$

lorsque $\mathfrak{a}$ parcourt les idéaux non nuls de $\mathcal{O}_F$.

On a alors

$$\begin{aligned} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) &= \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_n]\pi^n \mid a_n \in \mathcal{O}_F,\ \liminf_{n\to-\infty} q^n v(a_n) > 0 \Big\} \\ &= \Big\{ \sum_{n\in\mathbb{Z}} [a_n]\pi^n \mid a_n \in \mathcal{O}_F,\ \exists s > 0,\ \exists C,\ v(a_n) \geq q^{-n}s + C \Big\}. \end{aligned}$$

Les séries précédentes sont convergentes dans B^+. Cette description fournit un plongement de $\mathcal{O}_E$-modules

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \hookrightarrow B^+_{F,E}.$$

Pour tout entier $n \geq 0$ notons

$$S_n \in \mathcal{O}_E[X_0, \ldots, X_n, Y_0, \ldots, Y_n]$$

le polynôme universel tel que la loi d'addition sur les vecteurs de Witt tronqués de longueur $n+1$ soit donnée par

$$[X_0, \ldots, X_n] + [Y_0, \ldots, Y_n] = [S_0, \ldots, S_n]$$

Alors, pour deux éléments

$$a = \sum_{i\in\mathbb{Z}} [a_i]\pi^i,\ b = \sum_{i\in\mathbb{Z}} [b_i]\pi^i \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

on a

$$a + b = \sum_{i\in\mathbb{Z}} [c_i]\pi^i$$

avec

$$c_i = \lim_{n\to+\infty} S_n\Big(a_{i-n}^{q^{-n}}, a_{i-n+1}^{q^{-n+1}}, \ldots, a_{i-1}^{q^{-1}}, a_i,\ b_{i-n}^{q^{-n}}, b_{i-n+1}^{q^{-n+1}}, \ldots, b_{i-1}^{q^{-1}}, b_i\Big),$$

limite qui existe grâce aux conditions de convergence imposées dans la définition de $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ (cf. [**24**], chap.II). Si l'on relache ces conditions de convergence en imposant seulement que pour tout $r > 0$, $\lim_{n\to-\infty} v(a_n)+nr = +\infty$ et $\lim_{n\to-\infty} v(b_n)+nr = +\infty$ alors une telle limite n'existe pas forcément, ce qui explique partiellement la remarque 1.6.7.

1.10.3. Lien avec les anneaux de périodes cristallines. — On suppose dans cette section que $E = \mathbb{Q}_p$. Soit $\rho \in |F| \cap]0,1[$ et notons

$$\mathfrak{a}_\rho = \{x \in \mathcal{O}_F \mid |x| \leq \rho\}.$$

Il y a une application surjective

$$W(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_\rho$$

où la première application est simplement $\sum_{n\geq 0}[x_n]p^n \mapsto x_0$. Notons

$$\mathfrak{b}_\rho = \ker(W(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_\rho).$$

Soit alors $A_{cris,\rho}$ le complété p-adique de l'enveloppe à puissances divisées de $\mathfrak{b}_\rho$. Si $\xi = \sum_{n\geq 0}[\xi_n]p^n$ vérifie $|\xi_0| = \rho$ alors

$$A_{cris,\rho} = \widehat{W(\mathcal{O}_F)[\tfrac{\xi^n}{n!}]}.$$

L'épaississement p-adique $A_{cris,\rho} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_\rho$ définit un pro-objet final du site cristallin $\mathrm{Cris}\big(\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_\rho)/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p)\big)$ et donc

$$A_{cris,\rho} = H^0\big((\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_\rho)/\mathrm{Spec}(\mathbb{Z}_p))_{cris}, \mathcal{O}\big).$$

Considérons

$$B^+_{cris,\rho} = A_{cris,\rho}\big[\tfrac{1}{p}\big].$$

Proposition 1.10.12. — *Il y a des inclusions naturelles*

$$B^+_{\rho^p} \subset B^+_{cris,\rho} \subset B^+_\rho.$$

Démonstration. — Si $\rho = |a|$ cela résulte de ce que A_{cris} est le complété p-adique de

$$W(\mathcal{O}_F)\big[\tfrac{[a^n]}{n!}\big]_{n\geq 1}$$

et la boule unité de B^+_ρ le complété p-adique de

$$W(\mathcal{O}_F)\big[\tfrac{[a]}{p}\big].$$

□

On déduit de cela que

$$B^+ = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(B^+_{cris,\rho})$$

et donc B^+ *est le plus grand sous-anneau de* $B^+_{cris,\rho}$ *sur lequel le Frobenius cristallin* φ *est bijectif.*

On en déduit en particulier le corollaire suivant qui justifie le remplacement de B^+_{cris} par B^+ en théorie de Hodge p-adique. Il s'agit d'un analogue de la remarque de Dwork qui dit que les solutions d'équations différentielles ayant une structure de Frobenius on tendance à surconverger : les périodes cristallines qui vivent à priori dans $B^+_{cris,\rho}$ « s'étendent en fait en des fonctions holomorphes sur tout le disque épointé ».

Corollaire 1.10.13. — *Soient k un corps parfait tel que $k \subset \mathcal{O}_F$ et (D,φ) un k-isocristal. Si $t \in B^+_{cris,\rho}$ satisfait $\varphi(t) = pt$ alors*

$$\Big(D \otimes_{W(k)_\mathbb{Q}} B^+[\tfrac{1}{t}]\Big)^{\varphi=Id} = \Big(D \otimes_{W(k)_\mathbb{Q}} B^+_{cris,\rho}[\tfrac{1}{t}]\Big)^{\varphi=Id}.$$

1.10.4. L'anneau $\overline{B}$. —

Définition 1.10.14. — Notons $\mathfrak{p}$ l'idéal de $B^{b,+}$

$$\mathfrak{p} = \{x \in B^{b,+} \mid v_0(x) > 0\}.$$

On note alors

$$\overline{B} = B^{b,+}/\mathfrak{p}.$$

L'application de projection sur le corps résiduel $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$ induit une projection

$$B^{b,+} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$$

dont on note $\mathfrak{m}$ le noyau, un idéal maximal de $B^{b,+}$. On a

$$\mathfrak{m} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid \forall n \;\; v(x_n) > 0 \Big\}$$

tandis que

$$\mathfrak{p} = \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \mid \exists C > 0,\ \forall n \;\; v(x_n) \geq C \Big\}.$$

Lemme 1.10.15. — *L'anneau $\overline{B}$ est local intègre d'idéal maximal $\mathfrak{m}/\mathfrak{p}$ et de corps résiduel $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$.*

Démonstration. — Le fait que $\mathfrak{p}$ soit premier résulte de ce que v_0 est une valuation. Vérifions que $\overline{B}$ est local. Soit $x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^{b,+} \setminus \mathfrak{m}$. Il existe donc n tel que $x_n \in \mathcal{O}_F^\times$ et soit n_0 le plus petit entier satisfaisant cette propriété. On a alors

$$x = \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \equiv \sum_{n \geq n_0} [x_n]\pi^n \bmod \mathfrak{p}$$

et le membre de droite est une unité de $B^{b,+}$. On en déduit que x devient inversible dans $\overline{B}$. L'anneau $\overline{B}$ est donc local. □

Remarquons que l'on a des factorisations

$$B^+ \subset B^+_\rho = B^+_{[\rho,1]} \longrightarrow B^+_1 \longrightarrow B^+_1/\{v_0 > 0\} = \overline{B}.$$

Remarquons finalement que puisque $v_0 \circ \varphi = \varphi$, φ agit bijectivement sur $\overline{B}$ et les morphismes précédents sont compatibles à l'action de φ.

CHAPITRE 2

ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES : LE CAS F ALGÉBRIQUEMENT CLOS

Introduction

Pour un intervalle $I \subset]0,1[$ on a défini dans le chapitre 1 une algèbre de Fréchet B_I « de fonctions holomorphes de la variable π ». Lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ il s'agit de vrais fonctions holomorphes sur la couronne rigide analytique $\mathbb{D}_{F,I} = \{|\pi| \in I\} \subset \mathbb{A}^1_F$. On dispose alors de l'espace topologique $|\mathbb{D}_{F,I}|$ de Tate. Pour $y \in |\mathbb{D}_{F,I}|$ il y a un corps résiduel $k(y)$ qui est une extension de degré fini de F. Pour $f \in B_I$ on peut alors évaluer f en y et définir

$$\begin{array}{rcl} f(y) & \in & k(y) \\ |f(y)| & \in & \mathbb{R}_+. \end{array}$$

De plus, les pentes du polygone de Newton $\mathcal{N}ewt_I(f)$ sont exactement les valuations des y (i.e. $-\log_q |\pi(y)|$) dans $|\mathbb{D}_{F,I}|$ tels que $f(y) = 0$ comptées avec multiplicité $[k(y) : F].\mathrm{ord}_y(f)$. Enfin, remarquons que l'ensemble $|\mathbb{D}_{F,I}|$ est en bijection avec les classes d'équivalence de couples

$$\{(K, \iota)\}/\sim$$

où $K|E$ est un corps valué complet tel que $|\pi| \in I$, $\iota : F \hookrightarrow K$ est isométrique et fait de K une extension de degré fini de F.

Dans ce chapitre et le suivant on définit un tel espace topologique de points $|Y_I|$ lorsque $E|\mathbb{Q}_p$. En un point de cet espace on peut évaluer nos éléments de B_I et définir leur valeur absolue dans un corps perfectoïde K_y associé à $y \in |Y_I|$. On montre également que les pentes des polygones de Newton définis dans le chapitre 1 s'interprètent en termes de zéros en ces points. On donne également une interprétation de l'ensemble $|Y_I|$ comme étant les classes d'équivalences de couples (K, ι) où $K|E$ est un corps perfectoïde tel que $|\pi| \in I$, $\iota : F \hookrightarrow K^\flat$ est isométrique et fait de $K^\flat$ une extension de degré fini de F (dans le cas précédent, lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, on a $K^\flat = K$ puisque que K est parfait).

L'idée est la suivante. Lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, $|\mathbb{D}_{F,I}|$ s'identifie aux polynômes unitaires irréductibles $P \in \mathcal{O}_F[\pi]$ satisfaisant $|P(0)|^{1/\deg P} \in I$. Les polynômes à coefficients dans $\mathcal{O}_F$ forment un sous-anneau de $\mathbf{A} = \mathcal{O}_F[\![\pi]\!]$. Néanmoins lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ il n'y a pas de bonne notion de tels polynômes, les éléments de la forme $\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$ dans $\mathbf{A}$ avec $x_n = 0$ pour $n \gg 0$ ne sont pas stable par addition. Ceci dit, d'après le théorème de factorisation de Weierstrass, lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ et $I =]0,1[$, à multiplication par un élément de $\mathcal{O}_F[\![\pi]\!]^\times$-près, les polynômes irréductibles précédents sont en bijection avec les séries formelles irréductibles

$$\sum_{n\geq 0} x_n\pi^n \in \mathcal{O}_F[\![\pi]\!]$$

qui sont primitives au sens où $0 < |x_0| < 1$ et il existe un entier d tel que $|x_d| = 1$. On va montrer que si $E|\mathbb{Q}_p$ et $a \in \mathbf{A}$ est une telle série primitive alors $\mathbf{A}/(a)\left[\frac{1}{\pi}\right]$ est un corps valué complet perfectoïde extension de E sur lequel on peut évaluer nos éléments de B. Ce chapitre est essentiellement consacré au cas où F est algébriquement clos. Le cas F parfait général est traité dans le chapitre 3.

On reprend les hypothèses et notation du chapitre 1. Dans ce chapitre on suppose que $E|\mathbb{Q}_p$, ce qui est le cas qui nous intéresse au final. Il y a sûrement moyen d'unifier les notations avec le cas $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ mais cela présente quelques lourdeurs. On adopte les notations de [**56**] concernant le basculement des anneaux. Dans une version préliminaire de ce travail qui précédait [**56**] on notait $\mathscr{R}$ ce que l'on note maintenant $(-)^\flat$.

2.1. L'anneau $A^\flat$ et le morphisme θ

2.1.1. Généralités. — Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \bmod \pi$ et $Q(0) = 0$. On note $Q_0 = X$ et pour $n \geq 1$,

$$Q_n = \underbrace{Q \circ \cdots \circ Q}_{\text{n-fois}}.$$

Par définition une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique est une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adiquement séparée complète.

Définition 2.1.1. — On définit le foncteur

$$\begin{array}{rcl} (-)^{\flat,Q} : \mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques} & \longrightarrow & \text{Ens} \\ A & \longmapsto & A^{\flat,Q} = \left\{(x^{(n)})_{n\geq 0} \mid x^{(n)} \in A,\ Q(x^{(n+1)}) = x^{(n)}\right\}. \end{array}$$

On note $A^\flat := A^{\flat,X^q}$.

La proposition suivante est bien connue lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q = X^p$.

Proposition 2.1.2. — *Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique et I un idéal fermé de A. Supposons A séparée complète pour la topologie $I+(\pi)$-adique. Alors, l'application de réduction modulo I induit une bijection*

$$A^{\flat,Q} \xrightarrow{\sim} (A/I)^{\flat,Q}.$$

Son inverse associe à la suite $(x^{(n)})_{n\geq 0} \in (A/I)^{\flat,Q}$ la suite $(y^{(n)})_{n\geq 0} \in (A)^{\flat,Q}$ définie par

$$y^{(n)} = \lim_{k\to+\infty} Q_k\Big(\widehat{x^{(n+k)}}\Big)$$

où pour tout n, $\widehat{x^{(n)}} \in A$ est un relèvement quelconque de $x^{(n)} \in A/I$ et la limite précédente est pour la topologie $I+(\pi)$-adique.

Démonstration. — On vérifie par récurrence en appliquant le lemme 2.1.3 qui suit que si $x, y \in A$ sont tels que $x \equiv y \bmod I$ alors

$$Q_k(x) \equiv Q_k(y) \bmod (I+(\pi))^{k+1}.$$

De cela on déduit que si $(x^{(n)})_n, (y^{(n)})_n \in (A)^{\flat,Q}$ ont même réduction dans $(A/I)^{\flat,Q}$ alors pour tout n et k

$$x^{(n)} \equiv y^{(n)} \bmod (I+(\pi))^{k+1}$$

et donc $x^{(n)} = y^{(n)}$ puisque A est $I+(\pi)$-adiquement séparé. Cela montre l'injectivité.

Passons à la surjectivité. Soit $(x^{(n)})_{n\geq 0} \in (A/I)^{\flat,Q}$. Puisque

$$Q\big(\widehat{x^{(n+k+1)}}\big) \equiv \widehat{x^{(n+k)}} \bmod \mathrm{I}$$

on obtient

$$Q_{k+1}\big(\widehat{x^{(n+k+1)}}\big) \equiv Q_k\big(\widehat{x^{(n+k)}}\big) \bmod (I+\pi)^{k+1}.$$

À n fixé, la suite $\Big(Q_k\big(\widehat{x^{(n+k)}}\big)\Big)_{k\geq 0}$ est donc de Cauchy pour la topologie $I+(\pi)$-adique. Elle converge vers un un élément $z^{(n)} \in A$ tel que lorsque n varie $(z^{(n)})_n \in (A)^{\flat,Q}$ se réduisant sur $(x^{(n)} \bmod I+(\pi))_n$ dans $(A/I+(\pi))^{\flat,Q}$. On conclut par injectivité de l'application de réduction $(A/I)^{\flat,Q} \to (A/I+(\pi))^{\flat,Q}$ qui résulte de ce que A/I est π-adiquement séparé. □

Lemme 2.1.3. — *Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre et J un idéal de A. Si $x, y \in A$ vérifient $x \equiv y$ mod J alors $Q(x) \equiv Q(y)$ mod $\pi J + J^2$.*

Appliquant cette proposition à l'idéal engendré par π on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.1.4. — *Le foncteur $(-)^{\flat,Q}$ se factorise canoniquement en un foncteur*

$$(-)^{\flat,Q} : \mathcal{O}_E\text{-algèbres } \pi\text{-adiques} \longrightarrow \mathbb{F}_q - \text{algèbres parfaites}$$

isomorphe au foncteur

$$A \longmapsto \varprojlim_{\mathbb{N}} A/\pi A,$$

les applications de transition dans la limite projective précédente étant données par $Frob_q : A/pA \to A/pA$. *Les lois d'addition et de multiplication sur* $(A)^{\flat,Q}$ *sont données par*

$$\begin{aligned}\left(x^{(n)}\right)_n + \left(y^{(n)}\right)_n &= \left(\lim_{k\to+\infty} Q_k\left(x^{(n+k)} + y^{(n+k)}\right)\right)_n \\ \left(x^{(n)}\right)_n . \left(y^{(n)}\right)_n &= \left(\lim_{k\to+\infty} Q_k\left(x^{(n+k)} y^{(n+k)}\right)\right)_n .\end{aligned}$$

Remarque 2.1.5. — Bien sûr lorsque $Q(X) = X^q$, la formule de multiplication précédente est bien plus simple puisque $\left(x^{(n)}\right)_n . \left(y^{(n)}\right)_n = \left(x^{(n)} . y^{(n)}\right)_n$.

Par exemple, si R est une $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite,

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(R)^{\flat,Q} \\ x &\longmapsto \left([x^{1/q^n}]_Q\right)_{n\geq 0}.\end{aligned}$$

où $[-]_Q$ désigne le Q-relèvement de Teichmüller de la proposition 1.2.7. De plus, d'après le lemme 2.1.2, si I est un idéal fermé de $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ tel que $W_{\mathcal{O}_E}(R)$ soit séparé complet pour la topologie $I+(\pi)$-adique, $A = W_{\mathcal{O}_E}(R)/I$ et $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(R) \to A$ désigne la projection,

$$\begin{aligned} R &\xrightarrow{\sim} A^{\flat,Q} \\ x &\longmapsto \left(\theta\left([x^{1/q^n}]_Q\right)\right)_{n\geq 0}.\end{aligned}$$

Bien sûr, si Q_1 et Q_2 sont deux polynômes tels que Q il y a un isomorphisme canonique

$$\begin{aligned} (A)^{\flat,Q_1} &\xrightarrow{\sim} (A)^{\flat,Q_2} \\ (x^{(n)})_{n\geq 0} &\longmapsto \left(\lim_{k\to+\infty} Q_{2,k}\left(x^{(n+k)}\right)\right)_{n\geq 0}\end{aligned}$$

déduit par composition de la suite d'isomorphismes

$$(A)^{\flat,Q_1} \xrightarrow{\sim} (A/\pi A)^{\flat,Q_1} = (A/\pi A)^{\flat,X^q} = (A/\pi A)^{\flat,Q_2} \xleftarrow{\sim} (A)^{\flat,Q_2}.$$

2.1.2. Le morphisme θ. — Reprenons les notations de la section 1.2.2. Soit $n \geq 1$ un entier. Il y a un morphisme

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_n : W_{\mathcal{O}_E,n} &\longrightarrow \mathbf{G}_a \\ \sum_{k=0}^{n-1} V_\pi^k [a_k]_Q &\longmapsto \sum_{k=0}^{n-1} \pi^k Q_{n-1-k}(a_k).\end{aligned}$$

Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre munie d'un idéal I tel que pour tout entier k vérifiant $0 \leq k \leq n-1$ et tout $x \in I$ on ait

$$\pi^k x^{q^{n-1-k}} = 0.$$

Cette hypothèse est satisfaite dans les deux cas suivants :

1. Lorsque $\pi^{n-1}A = 0$ et l'idéal I est muni de puissances π-divisées (on peut définir "$\frac{x^q}{\pi}$" pour tout $x \in I$, cf. [**16**]).

2. Lorsque $\pi^n A = 0$ et $I = (\pi)$.

Lemme 2.1.6. — *On a* $Q_n(X) \in \left(\pi^{n-k} X^{q^k}\right)_{0 \leq k \leq n}$.

Démonstration. — On procède par récurrence sur n. Si $Q_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \pi^{n-k} X^{q^k} P_k(X)$ alors

$$Q_{n+1}(X) = \sum_{k=0}^{n} \pi^{n-k} Q(X)^{q^k} P_k(Q(X)).$$

Mais d'après le lemme 1.2.6,

$$Q(X) \equiv X^q \bmod \pi \Longrightarrow Q(X)^{q^k} \equiv X^{q^{k+1}} \bmod \pi^{k+1}$$

ce qui permet de conclure. □

D'après le lemme 2.1.6 cette hypothèse implique que pour tout $x \in I$ et $0 \leq k \leq n-1$ on a $\pi^k Q_{n-1-k}(x) = 0$ Le morphisme $\mathcal{W}_{n,Q} : W_{\mathcal{O}_E,n} \to \mathbf{G}_a$ donne alors naissance « par relèvement » à un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres

$$\begin{array}{rcl} W_{\mathcal{O}_E,n}(A/I) & \longrightarrow & A \\ x & \longmapsto & \mathcal{W}_{n,Q}(\widehat{x}) \end{array}$$

où $\widehat{x} \in W_{\mathcal{O}_E,n}(A)$ est un relèvement quelconque de x.

Pour toute $\mathcal{O}_E$-algèbre A, en appliquant la construction précédente à $A/\pi^n A$ et $I = (\pi)$, on déduit un morphisme de $\mathcal{O}_E$-algèbres

$$\begin{array}{rcl} \theta_n : W_{\mathcal{O}_E,n}(A/\pi A) & \longrightarrow & A/\pi^n A \\ \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} V_\pi [a_k]_Q & \longmapsto & \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \pi^k Q_{n-1-k}(\widehat{a_k}) \end{array}$$

où $\widehat{a_k} \in A/\pi^{n-1}A$ est un relèvement quelconque de a_k. On a de plus $\theta_1 = \mathrm{Id}_{A/\pi A}$ et lorsque n varie les θ_n vérifient la relation de compatibilité suivante : le diagramme

$$\begin{tikzcd} W_{\mathcal{O}_E,n+1}(A/\pi A) \arrow[r, "\theta_{n+1}"] \arrow[d, "F"'] & A/\pi^{n+1}A \arrow[d, "\mathrm{proj}"] \\ W_{\mathcal{O}_E,n}(A/\pi A) \arrow[r, "\theta_n"] & A/\pi^n A. \end{tikzcd}$$

est commutatif. Si A est une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique on en déduit par passage à la limite un morphisme

$$\begin{array}{rcl} \theta : W_{\mathcal{O}_E}(A^{\flat,Q}) & \longrightarrow & A \\ \displaystyle\sum_{n \geq 0} [x_n]_Q \, \pi^n & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \geq 0} x_n^{(0)} \pi^n. \end{array}$$

Cela définit un morphisme de foncteurs sur la catégorie des $\mathcal{O}_E$-algèbres π-adiques

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E} \circ (-)^{\flat,Q} \longrightarrow \mathrm{Id}.$$

On a déjà vu qu'il y a de plus un isomorphisme naturel de foncteurs sur les anneaux parfaits de caractéristique p,

$$\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} (-)^{\flat,Q} \circ W_{\mathcal{O}_E}.$$

On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 2.1.7. — *Les deux foncteurs*

$$\mathbb{F}_q\text{-algèbres parfaites} \underset{(-)^{\flat,Q}}{\overset{W_{\mathcal{O}_E}}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}_E - \text{algèbres } \pi\text{-adiques}$$

sont adjoints l'un de l'autre. Les applications d'adjonctions sont données par θ : $W_{\mathcal{O}_E} \circ (-)^{\flat,Q} \to \mathrm{Id}$ *et l'isomorphisme canonique* $\mathrm{Id} \xrightarrow{\sim} (-)^{\flat,Q} \circ W_{\mathcal{O}_E}$ *qui à* x *associe* $([x^{1/q^n}]_Q)_{n\geq 0}$.

Si Q_1 *et* Q_2 *sont des polynômes analogues à* Q*, l'isomorphisme canonique can* : $(-)^{\flat,Q_1} \xrightarrow{\sim} (-)^{\flat,Q_2}$ *est tel que le diagramme*

$$\begin{tikzcd}
W_{\mathcal{O}_E} \circ (-)^{\flat,Q_1} \arrow[dr, "\theta"] \arrow[dd, "W_{\mathcal{O}_E}(can)"', "\simeq"] & \\
& \mathrm{Id} \\
W_{\mathcal{O}_E} \circ (-)^{\flat,Q_2} \arrow[ur, "\theta"'] &
\end{tikzcd}$$

commute.

Remarque 2.1.8. — La commutativité du diagramme dans la proposition 2.1.7 précédente dit que l'on peut calculer θ soit « comme d'habitude » lorsque $Q = X^q$ via la formule $\theta(\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n) = \sum_{n\geq 0} x_n^{(0)}\pi^n$ si $x_n \in A^\flat$, soit via la formule $\theta(\sum_{n\geq 0}[y_n]_Q\pi^n) = \sum_{n\geq 0} y_n^{(0)}\pi^n$ si $y_n \in A^{\flat,Q}$.

Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbres π-adique comme précédemment. On dispose du critère suivant permettant de calculer le noyau de θ, critère qui est bien connu lorsque $E = \mathbb{Q}_p$ et $Q = X^p$.

Lemme 2.1.9. — *Supposons* A *sans* π*-torsion. Soit* $x = \sum_{i\geq 0}[x_i]_Q\pi^i \in \ker(\theta)$.

1. *Si* $x_0^{(0)} \in \pi A^\times$ *alors* $\ker\theta = (x)$.
2. *S'il existe* $\underline{\pi} \in A^{\flat,Q}$ *vérifiant* $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$ *alors* $\ker\theta = ([\underline{\pi}] - \pi)$. *De plus,* $\ker\theta = (x) \Leftrightarrow x_0^{(0)} \in \pi A^\times$.

Proposition 2.1.10. — *Soit* A *une* $\mathcal{O}_E$*-algèbre* π*-adique telle que le Frobenius de* $A/\pi A$ *soit surjectif. Alors,* $\theta : W_{\mathcal{O}_E}(A^{\flat,Q}) \to A$ *est surjectif.*

Démonstration. Puisque $W_{\mathcal{O}_E}(A^{\flat,Q})$ et A sont π-adiques, afin de montrer que θ est surjectif il suffit de montrer qu'il l'est modulo π. Mais modulo π l'application θ s'identifie à la projection sur la première composante

$$\varprojlim_{\mathrm{Frob}_q} A/\pi A \longrightarrow A/\pi A$$

qui est clairement surjective par hypothèse. □

2.1.3. Le cas de l'anneau des entiers d'un corps p-adique. — Soit $K|E$ un corps valué complet pour une valeur absolue $|.| = q^{-v(.)}$. Remarquons que d'après la proposition 2.1.2 si $\rho \in \mathbb{R}$ vérifie $|\pi| \leq \rho < 1$ et $\mathfrak{b}_\rho = \{x \in \mathcal{O}_K \mid |x| \leq \rho\}$, alors $O_K^\flat$ s'identifie à $(\mathcal{O}_K/\mathfrak{b}_\rho)^\flat$. Soit

$$\begin{array}{rcl} v : \mathcal{O}_K^\flat & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ x & \longmapsto & v\big(x^{(0)}\big). \end{array}$$

On vérifie aisément que cela définit une valuation sur $\mathcal{O}_K^\flat$. Deux cas se présentent alors :

1. soit la valuation v de $\mathcal{O}_K^\flat$ est triviale, auquel cas $\mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\sim} k_K^\flat = \cap_{n\geq 1} k_K^{q^n}$
2. soit la valuation v de $\mathcal{O}_K^\flat$ est non-triviale, auquel cas $K^\flat := \mathcal{O}_K^\flat$ est un corps valué complet parfait de caractéristique p qui s'identifie aux suites $(x^{(n)})_{n\geq 0}$ de K vérifiant $(x^{(n+1)})^q = x^{(n)}$. L'anneau de valuation de $K^\flat$ est $\mathcal{O}_K^\flat : \mathcal{O}_{K^\flat} = \mathcal{O}_K^\flat$.

Proposition 2.1.11. — *Supposons K algébriquement clos. Alors, $K^\flat$ l'est également.*

Démonstration. Soit $P = T^d + a_{d-1}T^{d-1} + \cdots + a_1 T + a_0 \in \mathcal{O}_K^\flat[T]$ un polynôme. Notons pour tout entier $n \geq 0$

$$P_n = T^d + a_{d-1}^{(n)} T^{d-1} + \cdots + a_1^{(n)} T + a_0^{(n)} \in \mathcal{O}_K^\flat[T].$$

Lorsque n varie ces polynômes sont liés par la relation

$$P_{n+1}(T)^q \equiv P_n(T^q) \bmod \pi.$$

Pour un n donné soit $x \in \mathcal{O}_K$ une racine de P_n. Choisissons $y \in \mathcal{O}_K$ tel que $y^q = x$. La relation précédente implique que

$$v_\pi(P_{n+1}(y)) \geq \frac{1}{q}.$$

Notons $z_1, \ldots, z_d$ les racines de P_{n+1}. On a donc

$$\sum_{i=1}^{d} v_\pi(y - z_i) \geq \frac{1}{q}.$$

Il en résulte qu'il existe i tel que

$$v_\pi(y - z_i) \geq \frac{1}{dq}$$

et donc

$$v_\pi(x - z_i^q) \geq \frac{1}{d}.$$

À partir de là on construit par récurrence une suite $(x_n)_{n\geq 0}$ de $\mathcal{O}_K$ telle que pour tout n, x_n soit une racine de P_n et $v_\pi(x_{n+1}^p - x_n) \geq \frac{1}{d}$. Cette suite définit un élément de

$$\varprojlim_{\mathbb{N}} \mathcal{O}_K/\mathfrak{b} = \mathcal{O}_K^\flat$$

où $\mathfrak{b} = \{x \in \mathcal{O}_K \mid v_\pi(x) \geq 1/d\}$. Cet élément est bien sûr une racine de P. □

2.2. Étude de certains idéaux et valuations des vecteurs de Witt

2.2.1. Élements primitifs. — Par analogie avec la théorie de Weierstrass on prend la définition suivante.

Définition 2.2.1. —

1. Un élément $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n \in \mathbf{A}$ est dit primitif si $x_0 \neq 0$ et il existe un entier $d \in \mathbb{N}$ tel que $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$. On appelle alors degré de x le plus petit entier d tel que $x_d \in \mathcal{O}_F^\times$.
2. On note *Prim* l'ensemble des éléments primitifs et $Prim_d$ ceux de degré d.
3. Un élément primitif est dit irréductible s'il est de degré > 0 et ne peut pas s'écrire comme un produit de deux éléments primitifs de degré > 0.

Notons $x \mapsto \bar{x}$ l'application de réduction $\mathbf{A} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$. Si $x \in \mathbf{A}$, sont équivalents :

— x est primitif de degré d,
— $x \notin \pi\mathbf{A}$ et $v_\pi(\bar{x}) = d$,
— le polygone de Newton de x vaut $+\infty$ sur $]-\infty, 0[$, est à valeurs dans $\mathbb{R}_{>0}$ sur $[0, d[$ et vaut 0 sur $[d, +\infty[$.

L'ensemble *Prim* forme un sous-monoïde de $(\mathbf{A}, \times)$. Il est gradué par le degré

$$Prim = \coprod_{d\geq 0} Prim_d$$

avec $Prim_d.Prim_{d'} \subset Prim_{d+d'}$. De plus,

$$Prim_0 = \mathbf{A}^\times.$$

On va s'intéresser aux idéaux de $\mathbf{A}$ engendrés par un élément primitif i.e. au monoïde quotient

$$Prim/\mathbf{A}^\times.$$

Exemple 2.2.2. — Lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$ et donc $\mathbf{A} = \mathcal{O}_F[\![\pi]\!]$, d'après Weierstrass, chaque élément primitif irréductible possède un unique représentant modulo la multiplication par $\mathbf{A}^\times$ qui est un polynôme unitaire irréductible dans $\mathcal{O}_F[\pi]$. Ainsi, $Prim^{\text{irred}}/\mathbf{A}^\times$ s'identifie aux points de Tate de l'espace rigide $\mathbb{D}_F^* = \{0 < |\pi| < 1\} \subset \mathbb{A}_F^1$.

On suppose désormais dans le reste de ce chapitre que F est algébriquement clos.

2.2.2. Idéaux de A engendrés par un élément de degré 1. — Commençons par remarquer que

$$Prim_1 = \{[a] - \pi u \mid a \neq 0,\ v(a) > 0 \text{ et } u \in \mathbf{A}^\times\}.$$

Soit maintenant $a = \sum_{i\geq 0}[a_i]\pi^i \in Prim_1$ et $I = (a)$. Posons

$$D = \mathbf{A}/I.$$

On note

$$\theta : \mathbf{A} \longrightarrow D.$$

Notre but est de montrer que $D\left[\frac{1}{\pi}\right]$ est un corps valué complet algébriquement clos.

Lemme 2.2.3. — *L'anneau $\mathbf{A}$ est séparé complet pour la topologie $I+(\pi)$-adique et donc en particulier pour la topologie I-adique. L'anneau D est séparé complet pour la topologie π-adique sans π-torsion.*

Démonstration. La première assertion résulte de ce que $I + (\pi) = ([a_0]_Q, \pi) = ([a_0], \pi)$ (cf. prop. 1.4.11). Si $x, y \in \mathbf{A}$ vérifient $\pi x = ya$, puisque $a_0 \neq 0$, $y \in \pi\mathbf{A}$. L'anneau D est donc sans π-torsion. Il est clairement π-adiquement complet. Reste à voir que

$$\bigcap_{n\geq 1} I + \pi^n\mathbf{A} = I.$$

Soit $x \in \mathbf{A}$ tel que pour tout entier n on ait $x = y_n a + \pi^n z_n$ avec $y_n, z_n \in \mathbf{A}$. Alors, pour tout entier n, utilisant encore que $a_0 \neq 0$,

$$\begin{aligned}(y_{n+1} - y_n)a = \pi^n(z_n - \pi z_{n+1}) \quad &\Rightarrow \quad (y_{n+1} - y_n)a \in \pi^n\mathbf{A}\\ &\Rightarrow \quad y_{n+1} - y_n \in \pi^n\mathbf{A}.\end{aligned}$$

La suite $(y_n)_n$ est donc de Cauchy pour la topologie π-adique. Notons $y = \lim\limits_{n\to+\infty} y_n$. Alors

$$x = \lim_{n\to+\infty}(y_n a + \pi^n z_n) = ya \in I.$$

□

De la proposition 2.1.2 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.4. — *L'application*

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{O}_F & \longrightarrow & D^\flat\\ x & \longmapsto & \left(\theta([x^{1/q^n}])\right)_{n\geq 0}\end{array}$$

est un isomorphisme.

Lemme 2.2.5. — *Tout élément de D s'écrit sous la forme $\sum_{n\geq 0}\theta\big([x_n a_0^n]\big)$ où $x_n \in \mathcal{O}_F$ vérifie $x_n = 0$ ou bien $v(x_n) < v(a_0)$.*

Démonstration. Écrivons $a = [a_0] - \pi u$ où $u \in \mathbf{A}^\times$. On a $\theta(\pi u)D = \pi D$. L'anneau D est donc $\theta(\pi u) = \theta([a_0])$-adiquement complet. De plus $D/\theta(\pi u)D = D/\pi D = \mathcal{O}_F/a_0\mathcal{O}_F$. On en déduit le résultat. □

Proposition 2.2.6. — *Pour tout entier $n \geq 1$, tout élément de D possède une racine n-ième dans D.*

Démonstration. — Supposons d'abord que l'extension $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée et donc $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F)$. Soit $x \in A$ et non nul n est premier à p. On peut écrire x sous la forme

$$x = \theta([a_0])^d\big(\theta([z]) + \theta([a_0])w\big)$$

avec $v(z) < v(a_0)$. L'élément $\theta([a_0])^d$ possède une racine n-ième dans A car a_0 en possède une dans $\mathcal{O}_F$. De plus,

$$\theta([z]) + \theta([a_0])w = \theta([z])\big(1 + \theta([z^{-1}a_0])w\big).$$

L'élément $\theta([z])$ possède une racine n-ième dans D. L'anneau D est $\theta([z^{-1}a_0])$-adiquement complet car une puissance de $\theta([z^{-1}b_0])$ est un multiple de $\theta([a_0])$. Alors,

$$\big(1 + \theta([z^{-1}a_0])w\big)^{1/n} = \sum_{k\geq 0} \binom{1/n}{k} \theta([z^{-1}a_0])^k w^k$$

est une racine n-ième de $1 + \theta([z^{-1}a_0])w$.

Montrons maintenant que x possède une racine p-ième (on suppose toujours que $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée). Écrivons

$$x = \sum_{n\geq 0} \theta([x_n a_0^n])$$

avec pour tout n, $x_n = 0$ ou bien $v(x_n) < v(a_0)$. On peut supposer $x \neq 0$. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ le plus petit indice tel que $x_{n_0} \neq 0$. Alors,

$$x = \theta([x_{n_0} a_0^{n_0}]).\Big(1 + \sum_{n\geq 1} \theta\big([x_{n+n_0} a_0^n x_{n_0}^{-1}]\big)\Big).$$

L'élément $\theta([x_{n_0} a_0^{n_0}])$ possède une racine p-ième tandis que

$$y = 1 + \sum_{n\geq 1} \theta\big([x_{n+n_0} a_0^n x_{n_0}^{-1}]\big)$$

vérifie

$$y \equiv 1 + x_{n+1} a_0 x_{n_0}^{-1} \bmod p$$

dans $\mathcal{O}_F/a_0\mathcal{O}_F$. Or,

$$1 + x_{n+1} a_0 x_{n_0}^{-1} \in \mathcal{O}_F^\times.$$

Quitte à remplacer x par y on peut donc supposer que

$$x_0 \in \mathcal{O}_F^\times.$$

Montrons maintenant qu'il existe $z \in \mathcal{O}_F^\times$ tel que

$$x \equiv \theta([z]) \bmod p^2.$$

Écrivons

$$x \equiv \theta\big([x_0] + p[x_1]\big) \bmod p^2.$$

Quitte à multiplier a par le représentant de Teichmüller d'une unité de $\mathcal{O}_F$, on peut supposer que

$$a \equiv [a_0] + p \bmod p^2.$$

Soit

$$S_1(X,Y) = \frac{1}{p}\big((X+Y)^p - X^p - Y^p\big) \in \mathbb{Z}[X,Y].$$

Pour tout $\lambda \in \mathcal{O}_F$ on a dans $W_2(\mathcal{O}_F)$

$$[x_0] + p[x_1] + [\lambda]a \equiv [x_0 + \lambda a_0] + p\big[x_1 + \lambda + S_1\big(x_0^{1/p}, \lambda^{1/p} a_0^{1/p}\big)\big] \bmod p^2.$$

Le polynôme en T

$$x_1^p + T^p + S_1(x_0, Ta_0) \in \mathcal{O}_F[T]$$

est unitaire de degré p. Puisque F est algébriquement clos, il existe donc $\lambda \in \mathcal{O}_F$ tel que

$$[x_0] + p[x_1] + [\lambda]a \equiv [z] \bmod p^2$$

avec $z = x_0 + \lambda a_0 \in \mathcal{O}_F^\times$. On a alors

$$x \equiv \theta([z]) \bmod p^2.$$

Puisque $[z]$ est une unité de $W(\mathcal{O}_F)$ et possède une racine p-ième on peut supposer que

$$x \equiv 1 \bmod p^2.$$

Mais si $p \neq 2$, tout élément de $1 + p^2 W(\mathcal{O}_F)$ possède une racine p-ième, pour $w \in W(\mathcal{O}_F)$,

$$(1 + p^2 w)^{1/p} = \sum_{k \geq 0} \binom{1/p}{k} p^{2k} w^k.$$

On a donc montré le résultat lorsque $p \neq 2$. Si $p = 2$, il faut travailler encore en revenant à l'étape précédente et montrer qu'il existe une unité $z \in \mathcal{O}_F^\times$ telle que

$$x \equiv \theta([z]) \bmod 8.$$

On laisse cela en exercice au lecteur.

Voyons maintenant comment déduire le cas d'un corps E quelconque du cas précédent. Notons $E_0 = W(\mathbb{F}_q)_\mathbb{Q}$ l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ dans E. On a alors $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E$. Il y a une application norme

$$N_{E/E_0} : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow W(\mathcal{O}_F)$$

induisant la norme de l'extension $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}|W(k_F)_{\mathbb{Q}}$ après projection via $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$ et $W(\mathcal{O}_F) \to W(k_F)$. Puisque l'extension $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}|W(k_F)_{\mathbb{Q}}$ est totalement ramifiée, l'élément $b = N_{E/E_0}(a) \in W(\mathcal{O}_F)$ est primitif de degré 1. De plus, l'image de b dans $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ appartient à l'idéal engendré par a. Notons $D' = W(\mathcal{O}_F)/(b)$ qui d'après le cas étudié précédemment est un anneau dans lequel tout élément possède une racine n-ième. L'inclusion $W(\mathcal{O}_F) \subset W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ induit un morphisme $D' \to D$. Montrons que ce morphisme est surjectif, ce qui conclura la démonstration. Puisque les anneaux D' et D sont p-adiques, il suffit de montrer que le morphisme $D'/pD' \to D/pD$ est surjectif ou encore que le morphisme composé $W(\mathcal{O}_F)/pW(\mathcal{O}_F) \to D'/pD' \to D/pD$ est surjectif. Si $e = [E : E_0]$ ce morphisme s'identifie au morphisme

$$\mathcal{O}_F \longrightarrow \mathcal{O}_F[\pi]/\big(\pi^e, \sum_{i=0}^{e-1} a_i \pi^i\big).$$

Puisque $a_1 \in \mathcal{O}_F^\times$, ce morphisme est bien surjectif. □

Remarque 2.2.7. — Cette démonstration, qui est un résultat intermédiaire clef pour le reste de ce texte, est la seule concernant la structure des anneaux B_I et la construction de la courbe qui utilise la structure des vecteurs de Witt (l'explicitation de la loi de groupe de W_2). Plus précisément, pour toutes les autres démonstrations, on n'utilise seulement le fait que tout vecteur de Witt s'écrit de façon unique $\sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n$ mais on n'utilise pas d'information précise concernant la loi d'addition ou de multiplication de deux tels vecteurs autre que la multiplicativité du Teichmüller.

Corollaire 2.2.8. — *Pour tout $x \in D$ il existe $y \in \mathcal{O}_F$ tel que $x = \theta([y])$.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.6 précédente il existe $z \in D^\flat$ tel que $z^{(0)} = x$. Le résultat découle donc du corollaire 2.2.4. □

Du lemme 2.1.9 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.9. — *Via l'identification $\mathcal{O}_F = D^\flat$ il existe $\underline{\pi} \in \mathcal{O}_F$ tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$. De plus, $[\underline{\pi}] - \pi$ engendre I. En d'autres termes, il existe $x \in \mathbf{A}^\times$ tel que*

$$xa = [\underline{\pi}] - \pi.$$

Corollaire 2.2.10 **(Factorisation et division de Weierstrass)**
Soit $x = \sum_{i\geq 0}[x_i]\pi^i \in \mathbf{A}$ tel $v(x_1) = \inf\{v(x_i) \mid i \in \mathbb{N}\}$ et $v(x_0) > v(x_1)$.

1. *Il existe alors $b, c \in \mathcal{O}_F$ et $u \in \mathbf{A}^\times$ tels que*

$$x = u[b]([c] - \pi).$$

2. *Supposons $v(x_1) = 0$. Pour tout $y \in \mathbf{A}$, il existe $d \in \mathcal{O}_F$ et $w \in \mathbf{A}$ tels que*

$$y = wx + [d].$$

Remarque 2.2.11. — Contrairement au cas des séries formelles usuelles, ce qui est le cas lorsque $E = \mathbb{F}_q((\pi))$, *la décomposition/division de Wierstrass précédente n'est pas unique.*

Puisque pour $a \in Prim_1$, $\mathbf{A}$ est a-adiquement complet on obtient également le corollaire suivant.

Corollaire 2.2.12. — *Soit $a \in Prim_1$, par exemple $a = [a_0] - \pi$ avec $a_0 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. Tout $x \in \mathbf{A}$ s'écrit, de façon non unique, sous la forme*

$$x = \sum_{n \geq 0} [x_n] a^n.$$

Lemme 2.2.13. — *Si $x \in \mathcal{O}_F$ vérifie $\theta([x]) = 0$ alors $x = 0$.*

Démonstration. Si $[x] \in (a)$ et $x \neq 0$ alors les pentes de $\mathcal{N}ewt([x])$ contiennent les pentes de $\mathcal{N}ewt(a)$ ce qui est impossible puisque $\mathcal{N}ewt([x])$ a pour seule pente 0 et $\mathcal{N}ewt(a)$ possède un pente strictement positive. □

Lemme 2.2.14. — *L'anneau D est intègre et l'idéal I est donc premier.*

Démonstration. Si $x, y \in \mathcal{O}_F$ vérifient $\theta([xy]) = \theta([x])\theta([y]) = 0$, d'après le lemme 2.2.13, on a $xy = 0$ et donc $x = 0$ ou bien $y = 0$. □

Proposition 2.2.15. — *La fermeture intégrale de $\mathcal{O}_E$ dans D contient $\cup_{n \geq 1} \mathbb{Z}_p[\zeta_n]$ i.e. pour tout $n \geq 1$, le polynôme $X^n - 1$ est scindé dans D.*

Nous donnons deux démonstrations indépendantes de ce fait.

Preuve via la théorie du corps des normes. — D'après le corollaire 2.2.9 on peut supposer que $a = [a_0] - \pi$. Soit $\mathbb{F}_q((a_0)) \subset F$, un sous-corps valué complet de valuation discrète. Notons

$$F' = \widehat{\overline{\mathbb{F}_q((a_0))}} \subset F,$$

le complété de la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((a_0))$ dans F. Il y a un morphisme

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0] - \pi) \longrightarrow D.$$

Soit $\overline{E}$ une clôture algébrique de E. Notons $\underline{\pi} \in \mathcal{O}^\flat_{\widehat{\overline{E}}}$ un élément tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$. D'après la théorie du corps des normes ([**61**]) appliquée à l'extension arithmétiquement profinie $\cup_{n \geq 0} E\big(\underline{\pi}^{(n)}\big)$ de E, $\mathcal{O}^\flat_{\widehat{\overline{E}}}$ est le complété d'une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q((\underline{\pi}))$. Il existe donc un isomorphisme continu

$$\mathcal{O}^\flat_{\widehat{\overline{E}}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{F'}$$

envoyant $\underline{\pi}$ sur a_0. Celui-ci induit un isomorphisme continu

$$W_{\mathcal{O}_E}\Big(\mathcal{O}^\flat_{\widehat{\overline{E}}}\Big)/([\underline{\pi}] - \pi) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0] - \pi).$$

Mais,

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}\Big(\mathcal{O}^\flat_{\widehat{\overline{E}}}\Big)/\big([\underline{\pi}]-\pi\big) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{\widehat{\overline{E}}}.$$

Donc,

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_{F'})/([a_0]-\pi) \simeq \mathcal{O}_{\widehat{\overline{K}}}.$$

Puisque A est sans p-torsion, tout morphisme

$$\mathcal{O}_{\widehat{\overline{E}}} \longrightarrow D$$

est injectif. On en déduit le résultat. □

Preuve indépendante de la théorie du corps des normes. — Soit $\mathcal{LT}$ la loi de groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$ de logarithme

$$\log_{\mathcal{LT}} = \sum_{n\geq 0} \frac{T^{q^n}}{\pi^n}.$$

On note $Q = [\pi]_{\mathcal{LT}} \in \mathcal{O}_E[\![X]\!]$ et $\mathcal{G}$ le groupe formel associé. On munit $D\big[\frac{1}{\pi}\big]$ d'une structure de E-espace de Banach en utilisant le réseau π-adique $D \subset D\big[\frac{1}{\pi}\big]$. Il y a un morphisme de E-espaces de Banach

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) = \big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathcal{LT}}{+}\big) &\longrightarrow D\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \\ \epsilon &\longmapsto \log_{\mathcal{LT}}(\theta([\epsilon]_Q)) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \theta\big(\big[\epsilon^{q^{-n}}\big]\big)\pi^n. \end{aligned}$$

(on renvoie au chapitre 4). Montrons que ce morphisme est surjectif. Pour cela posons $\rho = |a_0|$ et

$$\mathcal{G}_{\rho^{1/q}}(\mathcal{O}_F) = \Big(\big\{\epsilon \in \mathfrak{m}_F \;\big|\; |\epsilon| \leq \rho^{1/q}\big\}, \underset{\mathcal{LT}}{+}\Big) \subset \mathcal{G}(\mathcal{O}_F),$$

un réseau définissant la topologie de Banach de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$. On vérifie que

$$\log_{\mathcal{LT}} \circ \theta \circ [-]_Q : \mathcal{G}_{\rho^{1/q}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow D.$$

Il suffit alors de montrer que cette dernière application est surjective. Puisque $\mathcal{G}_{\rho^{1/q}}(\mathcal{O}_F)$ et D sont π-adiquement complets il suffit de vérifier que sa réduction modulo π est surjective. Or, pour $\epsilon \in \mathcal{G}_{\rho^{1/q}}(\mathcal{O}_F)$, si $q > 2$,

$$\log_{\mathcal{LT}}(\theta([\epsilon]_Q)) \equiv \epsilon^q a_0^{-1} + \epsilon \mod \pi$$

comme élément de $\mathcal{O}_F/a_0\mathcal{O}_F = D/\pi D$. Utilisant que F est algébriquement clos on conclut quant à la surjectivité lorsque $q > 2$. Lorsque $q = 2$,

$$\log_{\mathcal{LT}}(\theta([\epsilon]_Q)) \equiv \epsilon^4 a_0^{-2} + \epsilon^2 a_0^{-1} + \epsilon \mod \pi$$

et on conclut de la même façon.

Soit maintenant $\epsilon \in \mathcal{O}_F$ non nul tel que

$$\epsilon^q + a_0\epsilon = 0$$

si $q > 2$ et

$$\epsilon^4 + a_0\epsilon^2 + a_0^2\epsilon = 0$$

avec $|\epsilon| = \rho$ si $q = 2$. Dans tous les cas, $|\epsilon| = \rho^{\frac{1}{q-1}}$. On a alors

$$\log_{\mathcal{LT}}([\epsilon]_Q) \in \pi D.$$

D'après l'assertion de surjectivité précédente, il existe $\epsilon' \in \mathcal{G}_{\rho^{1/q}}(\mathcal{O}_F)$ tel que

$$\log_{\mathcal{LT}}([\epsilon]_Q) = \pi \log_{\mathcal{LT}}([\epsilon']_Q).$$

Alors, si

$$\eta = \epsilon \underset{\mathcal{LT}}{-} \epsilon'^q \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$$

on a $\eta \neq 0$ et

$$\log_{\mathcal{LT}}(\theta([\eta]_Q)) = 0.$$

Pour $n \gg 0$, le logarithme $\log_{\mathcal{LT}}$ est injectif sur $\pi^n D$. On en déduit que $\theta([\eta]_Q)$ est un point de torsion de $\mathcal{LT}$, $[\pi^k]_{\mathcal{LT}}\big(\theta([\eta]_Q)\big) = 0$ pour $k \gg 0$. On en déduit que

$$\bigcup_{\substack{k\geq 0\\ a\in\mathcal{O}_E}} \theta\Big(\big[[a]_{\mathcal{LT}}\big(\eta^{1/q^k}\big)\big]\Big) \subset D$$

forment les points de torsion de la loi de Lubin-Tate $\mathcal{LT}$ dans une clôture algébrique de E. □

Proposition 2.2.16. — *Soient $x, y \in \mathcal{O}_F$ tels que $\theta([x]) = \theta([y])$. Alors, $v(x) = v(y)$.*

Démonstration. D'après le lemme 2.2.13 on peut supposer x et y non nuls. Pour tout $n \geq 0$, notons $\epsilon^{(n)} \in \mathrm{Frac}(D)$ tel que

$$\theta\big(\big[x^{1/q^n}\big]\big) = \epsilon^{(n)}\,\theta\big(\big[y^{1/q^n}\big]\big).$$

Alors, $\epsilon^{(n)}$ est une racine q^n-ième de l'unité dans $\mathrm{Frac}(D)$. D'après la proposition 2.2.15 précédente $\epsilon^{(n)} \in D$. De plus $\epsilon = \big(\epsilon^{(n)}\big)_{n\geq 0} \in D^\flat$. Via l'identification $\mathcal{O}_F = D^\flat$, $\epsilon \in 1+\mathfrak{m}_F$ et en particulier $v(\epsilon) = 1$. Puisque $x = \epsilon y$ et $v(\epsilon) = 1$ on a $v(x) = v(y)$. □

Définissons une fonction

$$v : D \longrightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

en posant pour $x \in D$,

$$v(x) = v(y) \ \text{ si } \ x = \theta([y]).$$

Proposition 2.2.17. — *La fonction v est une valuation étendant la valuation π-adique de E multipliée par $v(a_0)$, $v(\pi) = v(a_0)$. L'anneau D est l'anneau de valuation de v dans $Frac(D)$.*

Démonstration. Il est clair que $v_{|\mathcal{O}_E}$ est la valuation π-adique usuelle multipliée par $v(a_0)$. Montrons que v est une valuation. La formule $v(xy) = v(x) + v(y)$ est claire. Soient $x, y \in D$ non nuls. Montrons que $v(x + y) \geq \inf\{v(x), v(y)\}$. On se ramène

facilement au cas où on peut supposer que $x \notin \pi D$. Écrivons $x = \theta([x'])$ et $y = \theta([y'])$. On a donc $v(x') < v(a_0)$. Soit $z' \in \mathcal{O}_F$ tel que

$$x + y = \theta([z']).$$

On a en particulier

$$x' + y' \equiv z' \bmod a_0\mathcal{O}_F.$$

On a alors

$$v(z) \geq \inf\{v(a_0), v(x' + y')\} \geq \inf\{v(a_0), v(x'), v(y')\} = \inf\{v(x'), v(y')\}.$$

Il reste à vérifier que D est l'anneau de valuation de v. Mais si $z = \frac{x}{y} \in \mathrm{Frac}(D)$, $x = \theta([x'])$ et $y = \theta([y'])$ alors $v(z) = v(x') - v(y')$. Donc, l'inégalité $v(z) \geq 0$ implique que $z = \theta([x'y'^{-1}]) \in D$. □

Ainsi, (D, v) est un anneau de valuation complet extension de $\mathcal{O}_E$ et de corps résiduel k_F.

Remarque 2.2.18. — Via l'identification $\mathcal{O}_F = D^\flat$, la valuation v sur D définit une valuation $\left(x^{(n)}\right)_{n\geq 0} \mapsto v(x^{(0)})$ sur F. Cette valuation coïncide avec la valuation de F dont on est partie.

Proposition 2.2.19. — *Le corps valué complet* $\mathrm{Frac}(D)$ *est algébriquement clos.*

Démonstration. D'après la proposition 2.2.15, $\mathrm{Frac}(D)$ contient $\mathbb{Q}_p(\mu_\infty)$. L'énoncé résulte alors de la proposition 2.2.6, de la théorie de Kümmer et de la proposition 2.2.20 qui suit. □

Dans le cas de valuation discrète la proposition qui suit résulte de la théorie des groupes de ramification ([**59**] chap. IV).

Proposition 2.2.20. — *Soit $L|K$ une extension galoisienne de degré fini de corps valués complets pour des valuations à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si l'extension associée de corps résiduels est triviale le groupe de Galois $Gal(L|K)$ est résoluble.*

Démonstration. On se ramène facilement à montrer que si $L|K$ ne possède pas sous-extension abélienne non triviale, c'est à dire $\mathrm{Gal}(L|K)$ est égal à son groupe dérivé, alors $L = K$. On note v la valuation de L étendant celle de K. On note $G = \mathrm{Gal}(L|K)$. Puisque les corps résiduels de L et K coïncident

$$\forall \sigma \in G,\ \forall x \in \mathcal{O}_L,\ v(\sigma(x) - x) > 0.$$

Commençons par un lemme intermédiaire.

Lemme 2.2.21. — *Pour $\lambda \in \mathbb{R}_+$, soient $\mathfrak{p}_\lambda = \{x \in \mathcal{O}_L \mid v(x) \geq \lambda\}$ et $\mathfrak{p}_{\lambda+} = \{x \in \mathcal{O}_L \mid v(x) > \lambda\}$. Alors, G agit trivialement sur $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}_{\lambda+}$.*

Démonstration. Si $\lambda \notin v(L)$ on a $\mathfrak{p}_\lambda = \mathfrak{p}_{\lambda+}$ et le résultat est clair. Sinon, soit $\pi_\lambda \in \mathcal{O}_K$ de valuation λ. Tout élément de $\mathfrak{p}_\lambda$ s'écrit sous la forme $\pi_\lambda x$ avec $x \in \mathcal{O}_L$. Alors, pour $\sigma \in G$, $\sigma(\pi_\lambda x) = \sigma(\pi_\lambda)\sigma(x)$. Or, $v(\sigma(x) - x) > 0$. L'action de G sur $\mathfrak{p}_\lambda/\mathfrak{p}_{\lambda+}$ est donnée par la multiplication par le caractère

$$\begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & k_L^\times \\ \sigma & \longmapsto & \pi_\lambda^{\sigma-1} \bmod \mathfrak{p}_{0+}. \end{array}$$

Puisque G ne possède pas de quotient abélien non trivial, ce caractère est trivial. □

Revenons à la preuve de la proposition 2.2.20. Il faut prendre garde qu'en général $\mathcal{O}_L$ n'est pas un $\mathcal{O}_K$-module de type fini. Soit donc M un sous-$\mathcal{O}_K$-module de type fini de $\mathcal{O}_L$ stable sous G. Posons pour $\lambda \geq 0$,

$$G_\lambda = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M,\ v(\sigma(x) - x) \geq \lambda\}$$

et

$$G_{\lambda+} = \{\sigma \in G \mid \forall x \in M,\ v(\sigma(x) - x) > \lambda\}.$$

Puisque G agit trivialement sur le corps résiduel de L, $G = G_{0+}$. On a pour $\lambda \geq 0$,

$$G_\lambda = \bigcap_{\mu \leq \lambda} G_\mu$$

et puisque M est de type fini,

$$G_{\lambda+} = \bigcup_{\mu > \lambda} G_\mu.$$

Montrons que pour tout λ, $G_\lambda/G_{\lambda+}$ est abélien. Soient $\sigma, \tau \in G_\lambda$. Pour $x \in M$ on a d'après le lemme précédent,

$$v(\sigma(x) - x) \geq \lambda \Rightarrow v(\tau(\sigma(x) - x) - \sigma(x) + x) > \lambda$$

c'est à dire

$$v(\tau\sigma(x) - \tau(x) - \sigma(x) + x) > \lambda.$$

De même,

$$v(\sigma\tau(x) - \sigma(x) - \tau(x) + x) > \lambda.$$

Combinant les deux inégalités précédentes on obtient

$$v(\sigma\tau(x) - \tau\sigma(x)) > \lambda$$

et donc $[\sigma^{-1}, \tau^{-1}] \in G_{\lambda^+}$. Le groupe $G_\lambda/G_{\lambda+}$ est donc abélien.

Supposons maintenant qu'il existe λ tel que $G_\lambda \neq G$. Soit I l'intervalle de $\mathbb{R}$,

$$I = \{\lambda \mid G_\lambda = G\}.$$

Il est de la forme $[0, a]$ avec $a > 0$. On a $G = G_a \neq G_{a+}$, mais puisque G/G_{a+} est abélien c'est impossible. On en déduit que pour tout λ, $G = G_\lambda$ et que donc G fixe tous les éléments de M.

Puisque tout élément de $\mathcal{O}_L$ est contenu dans un sous-$\mathcal{O}_K$-module de type fini G-invariant on conclut que G est triviale. $\square$

Remarquons le corollaire suivant des résultats précédents. Si $(C, |.|)$, $C|E$, est un corps non-archimédien algébriquement clos on note $(C^\flat, |.|)$ le corps non-archimédien algébriquement clos de caractéristique p associé où $|(x^{(n)})_n| = |x^{(0)}|$ (cf. 2.1.3).

Corollaire 2.2.22. — *Considérons l'ensemble des couples (C, ι) où $C|E$ est non-archimédien complet algébriquement clos et $\iota : F \xrightarrow{\sim} C^\flat$ est isométrique. Il y a alors une bijection*

$$Prim_{F,1}/\mathbf{A}_F^\times \xrightarrow{\sim} \{(C, \iota)\}/\sim$$

qui associe à l'élément a primitif de degré 1 le corps valué complet $\mathbf{A}\left[\frac{1}{\pi}\right]/(a)$ muni de ι défini par $\iota(x) = \left([x^{q^{-n}}] \bmod (a)\right)_{n\geq 0}$. L'inverse de cette bijection associe à (C, ι) la classe d'équivalence d'un générateur du noyau de

$$\mathbf{A}_F \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}_{C^\flat} \xrightarrow{\theta} \mathcal{O}_C$$

où la flêche de gauche est induite par ι.

Corollaire 2.2.23. — *Les foncteurs $(F, a) \mapsto W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/([a] - p)$ et $(C, \underline{p}) \mapsto (C^\flat, \underline{p})$ induisent des équivalences de catégories inverses entre :*

- *la catégorie des couples (F, a) où F est un corps valué complet algébriquement clos de caractéristique p et $a \in F^\times$ vérifie $v(a) > 0$,*
- *la catégorie des couples $(C, \underline{p})$ où C est un corps valué complet algébriquement clos extension de $\mathbb{Q}_p$ et $\underline{p} \in \mathcal{O}_C^\flat$ vérifie $\underline{p}^{(0)} = p$.*

Lorsque F est un corps maximalement complet de caractéristique positive, $C = W(\mathcal{O}_F)\left[\frac{1}{p}\right]/([a] - p)$ est maximalement complet et on retrouve ainsi la construction donnée dans [**53**] *des corps maximalement complets de caractéristique* 0.

2.3. L'espace Y des idéaux de degré 1 des vecteurs de Witt

2.3.1. Définition et structure métrique. —

Définition 2.3.1. —

1. On note
$$|Y| = Prim^{\text{irred}}/\mathbf{A}^\times$$
l'ensemble des idéaux de $\mathbf{A}$ engendrés par un élément primitif irréductible.
2. Pour $y \in |Y|^{\deg=1}$ on note $\mathfrak{p}_y$ l'idéal premier de $\mathbf{A}$ associé, $\mathfrak{m}_y^+ = \mathfrak{p}_y\left[\frac{1}{\pi}\right]$ l'idéal maximal associé de $\mathbf{A}\left[\frac{1}{\pi}\right] = B^{b,+}$ et $\mathfrak{m}_y = \mathfrak{p}_y\left[\left[\frac{1}{\pi}\right], \frac{1}{[\varpi_F]}\right]$ l'idéal associé de B^b. On note $\mathcal{O}_{C_y} = \mathbf{A}/\mathfrak{p}_y$ de corps des fractions $C_y = B^b/\mathfrak{m}_y$ et $\theta_y : \mathbf{A} \to \mathcal{O}_{C_y}$ la projection.
3. Si $f \in B^b$ on utilise parfois la notation abrégée $f(y) := \theta_y(f)$.

4. On note v_y la valuation de C_y telle que $v_y(\theta([x])) = v(x)$. On note $|.|_y = q^{-v_y}$ la valeur absolue associée. Pour $f \in B^b$ on utilise parfois les notations abrégées

$$v(f(y)) := v_y(f(y)) \quad \text{et } |f(y)| := |f(y)|_y.$$

Il faut prendre garde à ce que v_y n'étend qu'un multiple de la valuation π-adique de E : si $a = \sum_i [a_i]\pi^i \in Prim_1$ et $y = (a)$ alors $v_y(\pi) = v(a_0)$.

Dans la suite on aura besoin d'une structure métrique sur $|Y|^{\deg=1}$ afin de construire des zéros de fonctions holomorphes par approximations successives.

Proposition 2.3.2. — *Posons pour $y_1, y_2 \in |Y|^{\deg=1}$, $d(y_1, y_2) = v_{y_1}(\theta_{y_1}(\mathfrak{p}_{y_2}))$ i.e. si $\mathfrak{p}_{y_2} = (a_2)$, $d(y_1, y_2) = v_{y_1}(\theta_{y_1}(a_2))$. Alors,*

1. *d est une distance ultramétrique sur Y*
2. *Si l'on note pour $r \geq 0$, $\mathfrak{a}_r = \{x \in \mathbf{A} \mid v_0(x) \geq r\}$, et $\mathfrak{a}_{y,r} = \{x \in \mathcal{O}_{C_y} \mid v_y(x) \geq r\} = \theta_y(\mathfrak{a}_r)$, on a*

$$\mathfrak{p}_{y_1} + \mathfrak{a}_{d(y_1,y_2)} = \mathfrak{p}_{y_2} + \mathfrak{a}_{d(y_1,y_2)}$$

et donc un isormorphisme canonique

$$\begin{tikzcd}
 & \mathcal{O}_{C_{y_1}}/\mathfrak{a}_{y_1,d(y_1,y_2)} \arrow[dd, "\simeq"] \\
\mathbf{A} \arrow[ur, "\theta_{y_1}"] \arrow[dr, "\theta_{\mathfrak{p}_2}"'] & \\
 & \mathcal{O}_{C_{y_2}}/\mathfrak{a}_{y_2,d(y_1,y_2)}.
\end{tikzcd}$$

De plus, $d(y_1, y_2)$ est le plus grand $r \geq 0$ tel que $\mathfrak{p}_{y_1} + \mathfrak{a}_r = \mathfrak{p}_{y_2} + \mathfrak{a}_r$.

Démonstration. Soient $\mathfrak{p}_{y_1} = (a)$ et $\mathfrak{p}_{y_2} = (b)$. D'après le corollaire 2.2.12 on peut écrire

$$a = \sum_{n \geq 0} [x_n] b^n.$$

Appliquant θ_{y_1} on obtient

$$\sum_{n \geq 0} \theta_{y_1}([x_n]) \theta_{y_1}(b)^n = 0$$

dans $\mathcal{O}_{C_{y_1}}$. Raisonnant dans le corps valué C_{y_1} on en déduit que

$$d(y_2, y_1) = v(x_0) = v_{y_1}(\theta_{y_1}([x_0])) \geq v_{y_1}(\theta_{y_1}(b)) = d(y_1, y_2)$$

avec égalité si et seulement si $v(x_1) = 0$. Par symétrie on a donc $d(y_2, y_1) = d(y_1, y_2)$ et x_1 est une unité. La proposition s'en déduit facilement. $\square$

Remarque 2.3.3. — Supposons que $E = \mathbb{F}_q((\pi))$. Via l'identification $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \xrightarrow{\sim} |Y_F|$ qui à a associe $(\pi - a)$, la distance précédente est la distance usuelle sur $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ donnée par la valeur absolue de F.

La fonction « distance à l'origine »

$$\begin{array}{rcl} |Y|^{\deg=1} & \longrightarrow &]0, +\infty[\\ y & \longmapsto & v(\pi(y)) \end{array}$$

est continue. Pour $r > 0$ notons

$$|Y_r|^{\deg=1} = \{y \in |Y|^{\deg=1} \mid v(\pi(y)) \leq r\},$$

la « couronne » associée au segment $]0, r]$. On a donc si $r \leq r'$, $|Y_r|^{\deg=1} \subset |Y_{r'}|^{\deg=1}$ et $|Y|^{\deg=1} = \bigcup_{r>0} |Y_r|^{\deg=1}$.

Proposition 2.3.4. — *Pour tout $r > 0$, l'espace ultramétrique $(|Y_r|^{\deg=1}, d)$ est complet.*

Démonstration. Soit $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy de (Y_r, d). Pour tout $r' \geq 0$, si $\mathfrak{a}_{r'} = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid v_0(x) \geq r'\}$, la suite d'idéaux

$$\big((\mathfrak{p}_{y_n} + \mathfrak{a}_{r'})/\mathfrak{a}_{r'}\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$ est constante pour $n \gg 0$. Elle définit donc un idéal $I_{r'}$ de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$. Lorsque r' varie ces idéaux $(I_{r'})_{r'\geq 0}$ sont compatibles et fournissent un idéal I de

$$W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = \varprojlim_{r'\geq 0} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/\mathfrak{a}_{r'}$$

tel que pour tout r', $(I + \mathfrak{a}_{r'})/\mathfrak{a}_{r'} = I_{r'}$.

Soit $r' > r$ et n tel que $\mathfrak{p}_{y_n} + \mathfrak{a}_{r'} = I + \mathfrak{a}_{r'}$. Soit a primitif de degré 1 tel que $\mathfrak{p}_{y_n} = (a)$. Il existe $x \in \mathfrak{a}_{r'}$ tel que $a + x \in I$. On a alors $a + x \in \mathit{Prim}_1$ car si $a = \sum_i [a_i]\pi^i$, $v(a_0) \leq r < r'$. Notons $b = a + x$ et montrons que $I = (b)$.

Si l'on avait $(b) \subsetneq I$, puisque $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)/(b)$ est un anneau de valuation, il existerait $r_0 \geq 0$ tel que $(b) + \mathfrak{a}_{r_0} \subset I$. Soit $r' > \sup\{r_0, r\}$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $I + \mathfrak{a}_{r'} = \mathfrak{p}_n + \mathfrak{a}_{r'}$. On a donc $\mathfrak{a}_{r_0} \subset \mathfrak{a}_{r'} + \mathfrak{p}_n$. Cela implique que $\theta_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{a}_{r_0}) = \theta_{\mathfrak{p}_n}(\mathfrak{a}_{r'})$ ce qui est impossible car $r' \neq r$.

On, a donc $I \in |Y|^{\deg=1}$ et on vérifie aussitôt que $\mathfrak{p}_{y_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} I$. □

2.3.2. Paramétrisation par les points d'un groupe de Lubin-Tate à valeurs dans $\mathcal{O}_F$. — Pour tout $y \in |Y|^{\deg=1}$ il existe $a \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ tel que $y = ([a] - \pi)$. Néanmoins, on ne sait pas déterminer quand est-ce que $([a] - \pi) = ([b] - \pi)$ en fonction de $a, b \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et cela ne donne donc pas une bonne paramétrisation de $|Y|^{\deg=1}$. Pour obtenir une telle paramétrisation on a recours aux groupes de Lubin-Tate.

Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \bmod \pi$ et $Q(X) \equiv \pi X \bmod X^2$.

Lemme 2.3.5. — *Si* $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $\dfrac{[\epsilon]_Q}{\left[\epsilon^{1/q}\right]_Q}$ *est un élément primitif de degré* 1 *dans* $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$.

Démonstration. Soit $P = Q(X)/X \in \mathcal{O}_E[X]$. On a $[\epsilon]_Q/\left[\epsilon^{1/q}\right]_Q = P\left(\left[\epsilon^{1/q}\right]_Q\right)$. De plus, $P \equiv \pi \bmod X$ et $P \equiv X^{q-1} \bmod \pi$. Le lemme s'en déduit facilement. □

Définition 2.3.6. — Pour $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ on note

$$u_\epsilon = \frac{[\epsilon]_Q}{\left[\epsilon^{1/q}\right]_Q}$$

et $y_\epsilon \in |Y|^{\deg=1}$ le point correspondant.

Exemple 2.3.7. — Si $E = \mathbb{Q}_p$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, $\alpha = 1 + \epsilon$ alors

$$u_\epsilon = 1 + [\alpha] + \left[\alpha^{1/p}\right] + \cdots + \left[\alpha^{\frac{p-1}{p}}\right].$$

On a donc défini une application

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{m}_F \setminus \{0\} & \longrightarrow & Y \\ \epsilon & \longmapsto & y_\epsilon. \end{array}$$

Le corps C_{y_ϵ} est algébriquement clos valué complet pour v_{y_ϵ}. Le corps résiduel de C_{y_ϵ} est k_F et il y a une identification

$$\mathcal{O}_{C_{y_\epsilon}}/\pi\mathcal{O}_{C_{y_\epsilon}} = \mathcal{O}_F/\bar{u}_\epsilon\mathcal{O}_F.$$

où $\bar{u}_\epsilon = \epsilon^{1-q^{-1}} \in \mathfrak{m}_F$.

Soit $\mathcal{LT}_Q$ la loi de groupe formel de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$ associée à Q, c'est à dire telle que $[\pi]_{\mathcal{LT}_Q} = Q$. Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E[\![X]\!])$ le groupe formel associé. Via l'identification

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_F & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{O}^{\flat,Q}_{C_{y_\epsilon}} \\ x & \longmapsto & \left(\theta_{y_\epsilon}\left(\left[x^{q^{-n}}\right]_Q\right)\right)_{n\geq 0} \end{array}$$

du corollaire 2.2.4, ϵ est un générateur du $\mathcal{O}_E$-module de rang 1

$$T_\pi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{O}^{\flat,Q}_{C_{y_\epsilon}},$$

le module de Tate du groupe de Lubin-Tate $\mathcal{G}$.

La loi de groupe formel $\mathcal{LT}_Q$ munit $\mathfrak{m}_F = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ d'une structure de $\mathcal{O}_E$-module. Le $\mathcal{O}_E$-module $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ est en fait un E-espace de Banach. Plus précisément, l'action de π sur $\mathfrak{m}_F$ est donnée par Frob_q et cela en fait un E-espace vectoriel.

Proposition 2.3.8. — *Soient* $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$. *Sont alors équivalents :*

1. $y_{\epsilon_1} = y_{\epsilon_2}$
2. $v_{y_{\epsilon_1}} \circ \theta_{y_{\epsilon_1}} = v_{y_{\epsilon_2}} \circ \theta_{y_{\epsilon_2}}$ *comme valuations sur* $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$
3. *Il existe* $a \in \mathcal{O}_E^\times$ *tel que* $\epsilon_2 = a.\epsilon_1$.

Démonstration. On a $\mathfrak{p}_{y_{\epsilon_2}} \subset \mathfrak{p}_{y_{\epsilon_1}}$ si et seulement si $\theta_{y_{\epsilon_1}}(u_{y_{\epsilon_2}}) = 0$. Cela est encore équivalent ce que $\theta_{y_{\epsilon_1}}([\epsilon_2]_Q)$ soit un point de π-torsion de la loi de groupe formel $\mathcal{LT}_Q$ sur $\mathcal{O}_{C_{y_{\epsilon_1}}}$. Via l'identification $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}^{\flat,Q}_{C_{y_{\epsilon_1}}}$, cela est équivalent à dire qu'il existe $a \in \mathcal{O}_E$ tel que $\epsilon_2 = a.\epsilon_1 \in T_\pi(\mathcal{G}) \subset \mathcal{O}^{\flat,Q}_{C_{y_{\epsilon_1}}}$. On obtient ainsi facilement l'équivalence entre les assertions (1) et (3). Le reste ne pose pas de problème. □

Proposition 2.3.9. — *L'application*

$$\begin{array}{rcl} \big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \setminus \{0\}\big)/\mathcal{O}_E^\times = \big(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}\big)/\mathcal{O}_E^\times & \longrightarrow & |Y|^{\deg=1} \\ \mathcal{O}_E^\times.\epsilon & \longmapsto & y_\epsilon \end{array}$$

est une bijection.

D'après la proposition 2.3.8 précédente c'est une injection. Maintenant, si $y \in |Y|^{\deg=1}$, puisque C est algébriquement clos, il existe $\epsilon \in \mathcal{O}_C^{\flat,Q}$ tel que $\epsilon^{(0)}$ soit un générateur des points de π-torsion de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$. Le lemme 2.1.9 permet de conclure que $(a) = (u_\epsilon)$. □

Remarquons enfin qu'il y a une action de $\varphi^{\mathbb{Z}}$ sur $|Y|$. De plus, si $k \in \mathbb{Z}$ et I est un idéal de $\mathbf{A}$,

$$\varphi^k : \mathbf{A}/I \xrightarrow{\sim} \mathbf{A}/\varphi^k(I).$$

Via la paramétrisation précédente cela correspond à l'action de $\varphi^{\mathbb{Z}} = E^\times/\mathcal{O}_E^\times$ sur $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times$. De plus si $\epsilon_2 = \pi^k.\epsilon_1$ alors φ^k induit une isométrie de corps valués

$$(C_{y_{\epsilon_1}}, v_{y_{\epsilon_1}}) \xrightarrow{\sim} (C_{y_{\epsilon_2}}, v_{y_{\epsilon_2}}).$$

Exemple 2.3.10. — Lorsque $E = \mathbb{Q}_p$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, le groupe de Lubin-Tate associé est $\widehat{\mathbb{G}}_m$. On a alors une bijection

$$\big(1 + \mathfrak{m}_F \setminus \{1\}\big)/\mathbb{Z}_p^\times \xrightarrow{\sim} |Y|^{\deg=1}$$

où l'action de $a \in \mathbb{Z}_p^\times$ sur $1 + \mathfrak{m}_F$ est donnée par

$$(1+x)^a = \sum_{k \geq 0} \binom{a}{k} x^k.$$

Définition 2.3.11. — On munit $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ de la distance ultramétrique $(\epsilon_1, \epsilon_2) \mapsto v(\epsilon_1 - \epsilon_2)$ et $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times$ de la distance ultramétrique quotient :

$$\forall x, y \in (\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times, \quad d(x,y) = \sup\{v(\epsilon_1 - \epsilon_2) \mid x = \mathcal{O}_E^\times.\epsilon_1,\ y = \mathcal{O}_E^\times.\epsilon_2\}.$$

Proposition 2.3.12. — *Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. Il y a une inégalité pour $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$,

$$d\big(\mathcal{O}_E^\times.\epsilon_1, \mathcal{O}_E^\times.\epsilon_2\big) \geq \frac{q}{q-1} d(y_{\epsilon_1}, y_{\epsilon_2}).$$

2. La paramétrisation $\epsilon \mapsto y_\epsilon$ *induit un homéomoprhisme*

$$(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/O_E^\times \xrightarrow{\sim} |Y|^{\deg=1}.$$

Démonstration. Posons $C = C_{y_{\epsilon_2}}$ et voyons $\epsilon_1 = \big(\epsilon_1^{(n)}\big)_{n\geq 0}$ et $\epsilon_2 = \big(\epsilon_2^{(n)}\big)_{n\geq 0}$ comme éléments de $\mathscr{R}_Q(\mathcal{O}_C)$. Considérons pour un entier $n \geq 1$ le polynôme

$$P_n(X) = \frac{Q_n(X)}{Q_{n-1}(X)} = f_n(X). \prod_{a\in(\mathcal{O}_E/\pi^n\mathcal{O}_E)^\times} \big(X - \big(\epsilon_2^{(n)}\big)^a\big).$$

où $f_n(X) \in \mathcal{O}_E[X]$ vérifie $f_n(0) \in \mathcal{O}_E^\times$. On a

$$d(y_{\epsilon_1}, y_{\epsilon_2}) = v_{y_{\epsilon_2}}\big(P_1\big(\epsilon_1^{(1)}\big)\big).$$

De plus, on a la formule

$$d\big(\mathcal{O}_E^\times.\epsilon_1, \mathcal{O}_E^\times.\epsilon_2\big) = \sup_{a\in\mathcal{O}_E^\times} \lim_{n\to+\infty} q^n v_{y_{\epsilon_2}}\big(\epsilon_1^{(n)} - \big(\epsilon_2^{(n)}\big)^a\big).$$

Posons $r = d(y_{\epsilon_1}, y_{\epsilon_2})$. Soit $n \geq 1$ un entier. Puisque $P_1\big(\epsilon_1^{(1)}\big) = P_n\big(\epsilon_1^{(n)}\big)$,

$$r = v_{y_{\epsilon_2}}\big(P_n(\epsilon_1^{(n)})\big) = \sum_{a\in(\mathcal{O}_E/\pi^n\mathcal{O}_E)^\times} v_{y_{\epsilon_2}}\big(\epsilon_1^{(n)} - \big(\epsilon_2^{(n)}\big)^a\big).$$

Il existe donc $a_n \in \mathcal{O}_E^\times$ tel que

$$v_{y_{\epsilon_2}}\big(\epsilon_1^{(n)} - \big(\epsilon_2^{(n)}\big)^{a_n}\big) \geq \frac{r}{q^n - q^{n-1}}$$

et donc

$$q^n v_{y_{\epsilon_2}}\big(\epsilon_1^{(n)} - \big(\epsilon_2^{(n)}\big)^{a_n}\big) \geq \frac{q}{q-1} r.$$

Cela étant vrai pour tout n, on en déduit le point (1).

Montrons le point (2). D'après le point (1) l'inverse de l'application $O_E^\times.\epsilon \mapsto y_\epsilon$ est continue. La topologie sur $(\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}/\mathcal{O}_E^\times$ est la topologie quotient. Il reste donc à voir que l'application $\epsilon \mapsto y_\epsilon$ est continue. Or, si ϵ_n est une suite de $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ tendant vers $\epsilon' \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, u_{ϵ_n} tends vers $u_{\epsilon'}$ pour la topologie faible de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On en déduit que pour tout entier k et tout $r > 0$, il existe N tel que pour $n \geq N$ on ait $u_{\epsilon_n} - u_{\epsilon'} \in \pi^k W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) + \mathfrak{a}_r$ où $\mathfrak{a}_r = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \mid v_0(x) \geq r\}$. Cela entraine que pour $n \geq N$,

$$v_{\epsilon'}\big(\theta_{\epsilon'}(u_{\epsilon_n})\big) \geq \inf\{k v_{\epsilon'}(p), r\}.$$

Cela étant vrait pour tout k et r, on en déduit aussitôt que $\lim_{n\to+\infty} v_{\epsilon'}(u_{\epsilon_n}) = +\infty$. $\square$

Corollaire 2.3.13. — *Si $V = \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ vu comme E-espace de Banach, il y a un homéomorphisme*

$$\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\})/E^\times \xrightarrow{\sim} |Y|^{\deg=1}/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

2.3.3. Point de vue de Berkovich. — Notons $\mathcal{M}(B^b)$ l'ensemble des valuations de B^b étendant la valuation π-adique de E et continues pour la topologie définie par les valuations $(|.|_\rho)_{\rho\in]0,1[}$. On le munit de la topologie induite par la topologie faible sur les applications de B^b à valeurs dans $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$. Cet espace topologique coïncide avec $\mathcal{M}(B)$, les valuations continues sur l'algèbre de Fréchet B^b.

Lemme 2.3.14. — *Pour tout $y \in |Y|^{\deg=1}$, $v_y \circ \theta_y : B^b \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ est continue.*

Démonstration. Soit $r = v_y(\pi)$. Si $x = \sum_{n\gg-\infty}[x_n]\pi^n \in B^b$, on a $\theta_y(x) = \sum_{n\gg-\infty}\theta_m([x_n])\pi^n$. Il en résulte que $v_y(x) \geq v_r(x)$. □

Remarque 2.3.15. — Si $r = v_y(\pi)$, l'inégalité $v_y \geq v_r$ établie lors de la démonstration du lemme précédent dit que l'on peut penser aux $(v_r)_{r>0}$ comme des « valuations de Gauss » sur des couronnes de rayon q^{-r} lorsque l'on voit les éléments de B^b « comme des fonctions holomorphes sur Y ».

On dispose donc d'une injection

$$\begin{array}{rcl} |Y|^{\deg=1} & \hookrightarrow & \mathcal{M}(B^b) \\ y & \mapsto & \dfrac{1}{v_y(\pi)}v_y. \end{array}$$

On remarquera également que pour tout $r > 0$, $\dfrac{v_r}{r} \in \mathcal{M}(B^b)$.

Proposition 2.3.16. — *La topologie induite par celle de $\mathcal{M}(B^b)$ sur $|Y|^{\deg=1}$ est la topologie définie précédemment par la distance d sur $|Y|^{\deg=1}$.*

Démonstration. Montrons d'abord que l'application $Y \to \mathcal{M}(B^b)$ est continue. Il faut montrer que pour tout $f \in B^b$, l'application $y \mapsto \frac{v_y(f)}{v_y(\pi)}$ est continue. Il suffit pour cela de montrer que pour tout $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, l'application $y \mapsto v_y(f)$ est continue. Or, il résulte facilement de la proposition 2.3.2 que pour $f \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$,

$$|v_{y_1}(f) - v_{y_2}(f)| \geq d(y_1, y_2).$$

La continuité de $|Y|^{\deg=1} \to \mathcal{M}(B^b)$ en résulte aussitôt. Cette application est ouverte car une base de voisinages de y dans $|Y|^{\deg=1}$ est donnée par

$$\{\mathfrak{m}' \in Y \mid v_{\mathfrak{m}'}(a) \geq r\}$$

lorsque r varie. □

Remarque 2.3.17. — On peut penser à l'espace $\mathcal{M}(B)$ comme un disque ouvert épointé dont $|Y|^{\deg=1} \subset \mathcal{M}(B)$ formerait l'ensemble des points classiques et $(v_r)_{r>0}$ les valuations de Gauss associées aux couronnes de rayon $(q^{-r})_{r>0}$.

2.3.4. Effet d'un changement du corps E. — Soit $E'|E$ une extension de degré fini de corps résiduel $\mathbb{F}_{q'} \subset F$. Si $E'_0 = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q'})_{\mathbb{Q}}$ désigne l'extension maximale non-ramifiée de E dans E',

$$\mathbf{A}_{E'} = \mathbf{A}_E \otimes_{\mathcal{O}_{E'_0}} \mathcal{O}_{E'}.$$

Si on veut comprendre le lien entre les idéaux de $\mathbf{A}_E$ engendrés par un élément primitif de degré 1 et ceux de $\mathbf{A}_{E'}$ on est donc ramené au cas où l'extension $E'|E$ est totalement ramifiée.

On suppose donc maintenant $E'|E$ totalement ramifiée. On a donc

$$\mathbf{A}_{E'} = \mathbf{A}_E \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E'}.$$

Il y a alors une application norme

$$N_{E'/E} : \mathbf{A}_{E'} \longrightarrow \mathbf{A}_E.$$

Il s'agit tout simplement de la norme déduite de ce que $\mathbf{A}_{E'}$ est une $\mathbf{A}_E$-algèbre finie et libre de rang $[E' : E]$. En termes galoisiens, si $\widetilde{E'}$ désigne une clôture galoisienne de $E'|E$,

$$N_{E'/E}(x) = \prod_{\tau \in \mathrm{Hom}_E(E', \widetilde{E'})} (Id \otimes \tau)(x) \in \mathbf{A}_{\widetilde{E'}}^{\mathrm{Gal}(\widetilde{E'}|E)} = \mathbf{A}_E.$$

Le lemme suivant a déjà été observé à la fin de la preuve de la proposition 2.2.6.

Lemme 2.3.18. — *La norme d'un élément primitif de degré* 1 *est un élément primitif de degré* 1.

Notons $|Y_E|$, resp. $|Y_{E'}|$, l'ensemble noté précédemment $|Y|$ qui était associé à E. La proposition qui suit est laissée en exercice au lecteur.

Proposition 2.3.19. —

1. *Si $y \in |Y_{E'}|^{\deg=1}$ alors $\mathfrak{p}_y \cap \mathbf{A}_E \in |Y_E|^{\deg=1}$. De plus, si $\mathfrak{p}_y = (a)$ alors*
$$\mathfrak{p}_y \cap \mathbf{A}_E = \big(N_{E'/E}(a)\big).$$
Ainsi l'application Spec$(\mathbf{A}_{E'}) \to$ Spec$(\mathbf{A}_E)$ induite par l'inclusion $\mathbf{A}_E \subset \mathbf{A}_{E'}$ induit une application
$$p_{E',E} : |Y_{E'}|^{\deg=1} \to |Y_E|^{\deg=1}.$$
2. *Si $y = p_{E',E}(y')$ le morphisme canonique*
$$\mathcal{O}_{C_y} \longrightarrow \mathcal{O}_{C_{y'}}$$
est un isomorphisme.
3. *L'application $p_{E',E}$ est surjective. Ses fibres sont de cardinal $[E' : E]$. Si $E'|E$ est galoisienne, il y a une action de Gal$(E'|E)$ sur $|Y_{E'}|^{\deg=1}/|Y_E|^{\deg=1}$ et les fibres de $p_{E',E}$ sont des ensembles principaux homogènes sous cette action.*

2.4. Factorisation de Weierstrass des éléments primitifs de degré > 1

Le théorème qui suit est un ingrédient fondamental de ce texte.

Théorème 2.4.1. — *Soit $f \in \mathbf{A}$ primitif de degré $d \geq 1$. Il existe alors $a_1, \ldots, a_d \in \mathbf{A}$ primitifs de degré 1 tels que*

$$f = \prod_{i=1}^{d} a_i.$$

Démonstration. Voyons f comme une « fonction rigide analytique sur Y ». On vérifie qu'il suffit de montrer qu'il existe $y \in |Y|^{\deg=1}$ tel que

$$f(y) = 0$$

i.e. « la fonction rigide analytique f » possède un zéro dans $|Y|^{\deg=1}$. Écrivons

$$f = \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n.$$

On connait à l'avance la valuation des zéros de f, ils sont donnés par les pentes de son polygone de Newton (cf. section 1.5.2 et plus particulièrement l'exemple 1.5.3). Soit donc $\mathcal{N}ewt(f)$ le plus grand polygone convexe en dessous des points $(i, v(x_i))_{0 \leq i \leq d}$ et $\lambda > 0$ sa plus petite pente non nulle. Nous allons construire par récurrence une suite $(y_n)_{n \geq 1}$ de $|Y|^{\deg=1}$ vérifiant

- $v(f(y_n)) \geq (d+n)\lambda$
- $d(y_n, y_{n+1}) \geq \frac{d+n}{d}\lambda$
- $v(\pi(y_1)) = \lambda$.

Le théorème résultera alors de la proposition 2.3.4.

Commençons par construire y_1. Soit $z \in O_F$ une racine du polynôme $\sum_{i=0}^{d} x_i T^i \in \mathcal{O}_F[T]$ de valuation λ, la plus petite pente de son polygone de Newton. Posons

$$y_1 = ([z] - \pi) \in |Y|^{\deg=1}.$$

Puisque λ est la plus petite pente du polynôme précédent, pour $0 \leq i \leq d$ on a $v(x_i) \geq \lambda(d-i)$. On peut donc écrire pour $0 \leq i \leq d$, $x_i z^i = w_i z^d$ avec $w_i \in \mathcal{O}_F$. Notons $\theta = \theta_{y_1}$. Alors,

$$f(y_1) = \pi^d \sum_{i=0}^{d} \theta([w_i]) + \pi^{d+1} \sum_{i=d+1}^{\infty} \theta([x_i])\pi^{i-d-1}.$$

Mais puisque $\sum_{i=0}^{d} w_i = 0$,

$$\sum_{i=0}^{d} [w_i] \in \pi\mathbf{A}.$$

Donc, $f(y_1) \in \pi^{d+1}\mathcal{O}_{C_{y_1}}$ c'est à dire

$$v(f(y_1)) \geq (d+1)\lambda.$$

On a donc construit y_1.

Supposons construit y_n. Notons $y_n = (\xi)$ avec ξ primitif de degré 1. On peut écrire (cf. corollaire 2.2.12)

$$f = \sum_{i\geq 0} [a_i]\xi^n.$$

Projetant cette égalité dans $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$ et utilisant que ξ est de degré 1 et f de degré d, on obtient que $a_d \in \mathcal{O}_F^\times$ et pour $0 \leq i < d$, $v(a_i) > 0$. L'hypothèse $v(f(y_n)) \geq (d+n)\lambda$ se retranscrit en

$$v(a_0) \geq (d+n)\lambda.$$

Soit $z \in \mathcal{O}_F$ une racine du polynôme $\sum_{i=0}^d a_i T^i$ de valuation maximale. L'élément $\xi - [z]$ est primitif de degré 1. Posons alors

$$y_{n+1} = (\xi - [z]).$$

Puisque z est une racine de valuation maximale du polynôme $\sum_{i=0}^d a_i T^i$,

$$d(y_n, y_{n+1}) = v(z) \geq \frac{v(a_0)}{d} \geq \frac{d+n}{d}\lambda.$$

Remarquons que cela implique que $v_{y_{n+1}}(\pi) = \lambda$. Il reste maintenant à voir que $v(f(y_n)) \geq (d+n+1)\lambda$. Puisque $v(z)$ est la plus grande pente du polygone de Newton de $\sum_{i=0}^d a_i T^i$, pour $0 \leq i \leq d$ on a $v(a_i) + iv(z) \geq v(a_0)$. Pour un tel i on peut donc trouver $b_i \in \mathcal{O}_F$ tel que $a_i z^i = a_0 b_i$. Notons $\theta = \theta_{y_{n+1}}$. On a alors

$$\begin{aligned} f(y_{n+1}) &= \sum_{i\geq 0} \theta([a_i])\theta([z]^i) \\ &= \theta([a_0]).\sum_{i=0}^d \theta([b_i]) + \theta([z])^{d+1}.\sum_{i\geq d+1} \theta([a_i z^{i-d-1}]). \end{aligned}$$

Puisque $\sum_{i=0}^d b_i = 0$, $\sum_{i=0}^d \theta([b_i]) \in \pi\mathcal{O}_{C_{y_{n+1}}}$. On a donc

$$\begin{aligned} v_{y_{n+1}}\big(\theta([a_0]).\sum_{i=0}^d \theta([b_i])\big) &\geq v(a_0) + v_{y_{n+1}}(\pi) \\ &\geq (d+n)\lambda + \lambda = (d+n+1)\lambda. \end{aligned}$$

De plus,

$$\begin{aligned} v_{y_{n+1}}\big(\theta([z])^{d+1}\big) &= (d+1)v(z) \\ &\geq \frac{(d+1)(d+n)}{d}\lambda \\ &\geq (d+n+1)\lambda. \end{aligned}$$

On conclut que $v_{y_n}(f) \geq (d+n+1)\lambda$. □

On obtient donc le résultat suivant (sous la condition faite depuis le début que F est algébriquement clos).

Corollaire 2.4.2. — *Les éléments primitifs irréductibles sont exactement les éléments primitifs de degré* 1.

De la classification des éléments de degré 1 on déduit le corollaire qui suit.

***Corollaire 2.4.3* (Décomposition de Weierstrass).** — *Pour tout $f \in \mathbf{A}$ primitif de degré $d \geq 1$, il existe $x_1, \ldots, x_d \in \mathfrak{m}_F$ et $u \in \mathbf{A}^\times$ tels que*

$$f = u.([x_1] - \pi) \ldots ([x_d] - \pi).$$

Nous aurons besoin du lemme suivant dans la preuve du théorème 2.4.5.

Lemme 2.4.4. — *Soit $f \in B^b$ et $y \in |Y|^{\deg=1}$ tel que $\lambda = v_y(\pi)$ ne soit pas une pente de $\mathcal{N}ewt(f)$. On a alors l'égalité*

$$v(f(y)) = v_\lambda(f).$$

Démonstration. Écrivons $f = \sum_{i \gg -\infty} [x_i]\pi^i$. Soit

$$Q = \sum_{i \gg -\infty} \theta_y([x_i])T^i \in \mathbb{C}_y[\![T]\!]\left[\tfrac{1}{T}\right].$$

On a alors $\mathcal{N}ewt(Q) = \mathcal{N}ewt(f)$. De plus,

$$v(f(y)) = v_y(Q(\pi))$$

et $\lambda = v_y(\pi)$ n'est pas une pente de $\mathcal{N}ewt(Q)$. Le résultat est alors un résultat « classique » concernant les séries formelles à coefficients dans un anneau de valuation complet. □

On étend maintenant nos résultats de factorisation à tout les éléments de $\mathbf{A}$.

Théorème 2.4.5. — *Soit $f \in \mathbf{A}$ tel $\mathcal{N}ewt(f)$ possède une pente strictement positive. Il existe alors $a \in \mathbf{A}$ primitif de degré 1 et $g \in \mathbf{A}$ tels que $f = ag$. On peut de plus choisir a de la forme $[z] - \pi$ où $v(z)$ est n'importe quelle pente de $\mathcal{N}ewt(f)$ strictement positive.*

Démonstration. Comme dans le théorème précédent, il s'agit de montrer que f vue comme « fonction rigide analytique sur Y » possède un zéro de valuation préscrite à l'avance par une pente de $\mathcal{N}ewt(f)$. Notons

$$f = \sum_{n \geq 0} [x_n]\pi^n.$$

où l'on peut supposer $x_0 \neq 0$. Pour $d \in \mathbb{N}$ posons

$$f_d = \sum_{n=0}^{d} [x_n]\pi^n.$$

Soit $\lambda > 0$ une pente de $\mathcal{N}ewt(f)$. Il existe un entier D tel que pour $d \geq D$, la pente λ apparait dans $\mathcal{N}ewt(f_d)$. De plus la multiplicité de λ dans les polygones $(\mathcal{N}ewt(f_d))_{d\geq D}$ est bornée par un entier M. Notons pour $d \geq D$,

$$X_d = \{y \in |Y| \mid f_d(y) = 0 \text{ et } v_y(\pi) = \lambda\},$$

un ensemble fini non vide d'après le théorème 2.4.1. Pour $d \geq D$ et $y \in X_d$,

$$f_{d+1}(y) = \theta_y([x_{d+1}])\pi^d.$$

Écrivons alors

$$f_{d+1} = g \prod_{y' \in X_{d+1}} \xi_{y'}^{a_{y'}}$$

où $g \in \mathbf{A}$ n'a pas la pente λ dans son polygone de Newton, $a_{y'} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et pour tout $y' \in X_{d+1}, \xi_{y'}$ est primitif de degré 1 et engendre $\mathfrak{p}_{y'}$. On a donc pour $y \in X_d$

$$v(f_{d+1}(y)) = v(g(y)) + \sum_{y' \in X_{d+1}} a_{y'} v\big(\xi_{y'}(y)\big) \geq d\lambda.$$

D'après le lemme 2.4.4,

$$v(g(y)) = v_\lambda(g) \leq v_\lambda(f_{d+1}) \leq \mathcal{N}ewt(f)(0) = v(x_0).$$

On obtient donc que

$$\sum_{y' \in X_{d+1}} a_{y'} v\big(\xi_{y'}(y)\big) \geq d\lambda - v(x_0).$$

Il s'en suit qu'il existe $y' \in X_{d+1}$ tel que

$$\begin{aligned} d(y, y') &= v(\xi_{y'}(y)) \\ &\geq \frac{d\lambda - v(x_0)}{M}. \end{aligned}$$

On déduit de cela que l'on peut trouver une suite $(y_d)_{d\geq D}$ dans $\prod_{d\geq D} X_d$ de Cauchy. D'après la proposition 2.3.4 une telle suite est convergente. On conclut aisément. □

Le théorème précédent entraine le théorème suivant.

Théorème 2.4.6. — *Soit $f \in B^b$ et $\lambda_1, \ldots, \lambda_d$ un ensemble fini de pentes strictement positives de $\mathcal{N}ewt(f)$, comptées éventuellement plusieurs fois avec multiplicités. On peut alors écrire*

$$f = \prod_{i=1}^{d} ([z_i] - \pi).g$$

où $g \in B^b$ et $(v(z_1), \ldots, v(z_d)) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_d)$.

2.4.1. Zéros des éléments de B_I. —

2.4.1.1. La fonction holomorphe associée à un élément de B_I. — Pour $y \in |Y|$ on note

$$\|y\| = |\pi(y)| \in]0,1[.$$

Si I est un intervalle de $]0,1[$ on note

$$|Y_I| = \{y \in |Y| \mid \|y\| \in I\}.$$

Commençons par voir que pour $y \in |Y|$, les fonctions $f \mapsto f(y)$ et $f \mapsto |f(y)|$ se prolongent par continuité à B_I

Lemme 2.4.7. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$. Pour tout $y \in |Y_I|$, le morphisme $\theta_y : B^b \to C_y$ s'étend naturellement en un morphisme continu*

$$\theta_y : B_I \to C_y,$$

où B_I est muni de sa topologie de Fréchet et C_y de la topologie de sa valuation.

Démonstration. On a vu dans le preuve du lemme 2.3.14 que si $\rho = \|y\|$ et $f \in B^b$ alors $|f(y)| \leq |f|_\rho$. Le lemme en résulte. □

Lemme 2.4.8. — *Soit $y \in |Y_I|$. Alors, le noyau de $\theta_y : B_I \to C_y$ est $B_I.\mathfrak{m}_y$. Il est en particulier principal. De même le noyau de $\theta_y : B_I^+ \to C_y$ est $B_I^+.\mathfrak{m}_y^+$.*

Démonstration. Le noyau de $\theta_y : B_I \to C_y$ est l'adhérence de $\mathfrak{m}_y \subset B^b$ dans B^b. Soit f un élément de cette adhérence. Soit $a \in B^b$ un générateur de $\mathfrak{m}_y$. Écrivons $f = \lim\limits_{n \to +\infty} f_n$ dans B^b où $f_n \in B^b$ s'écrit lui-même $f_n = ag_n$ avec $g_n \in B^b$. Pour tout $\rho \in I$,

$$|g_{n+1} - g_n|_\rho = |f_{n+1} - f_n|_\rho . |a|_\rho^{-1}.$$

On en déduit que la suite $(g_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de Cauchy et converge donc vers un élément $g \in B_I$ qui est tel que $f = ag$. La démonstration est identique pour B_I^+. □

Remarque 2.4.9. — Supposons que $E = \mathbb{Q}_p$. Soit $\rho = \|y\|$. On a alors, avec les notations de la section 1.10.3,

$$B^+_{cris,\rho} = B^+_{cris}(C_y)$$

où le membre de droite est l'anneau de période usuel associé à C_y. La structure du noyau de $\theta_y : B^+_{cris}(C_y) \to C_y$ est compliquée à cause des puissances divisées. Néanmoins, d'après le lemme précédent il devient très simple lorsqu'on restreint θ_y à $B^+_{\rho'} \subset B^+_{cris,\rho}$, $\rho' \leq \rho^q$ ou bien B^+.

2.4.1.2. Zéros des fonctions holomorphes définies par un élément de B_I. —

Théorème 2.4.10. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$ et $f \in B_I$ non-nul. Soit λ une pente strictement positive de $\mathcal{N}ewt_I(f)$. Il existe alors $z \in \mathcal{O}_F$ tel que $v(z) = \lambda$ et $g \in B_I$ tels que*

$$f = ([z] - \pi).g.$$

Démonstration. D'après le lemme 2.4.8 il faut montrer qu'il existe $y \in |Y_I|$ vérifiant $v_y(\pi) = \lambda$ et $f(y) = 0$. Écrivons $f = \lim\limits_{n\to+\infty} f_n$ avec $f_n \in B^b$. Il existe un entier N tel que pour $n \geq N$, la pente λ intervienne dans $\mathcal{N}ewt_I(f_n)$ avec une multiplicité bornée par un entier M indépendant de $n \geq N$. Pour $n \geq N$ soit

$$X_n = \{y \in |Y_I| \mid f_n(y) = 0 \text{ et } v_y(\pi) = \lambda\},$$

un ensemble fini non vide d'après le théorème 2.4.5, de cardinal borné par M. Soit $n \geq N$ et $y \in X_n$. D'après le théorème 2.4.6 on peut écrire

$$f_{n+1} = g. \prod_{y' \in X_{n+1}} \xi_{y'}^{a_{y'}}$$

où $\xi_{y'} \in \mathbf{A}$ est un élément primitif de degré 1 générateur de $\mathfrak{m}_{y'}$, $a_{y'} \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $g \in B^b$ ne possède pas la pente λ dans son polygone de Newton. On a alors

$$v(f_{n+1}(y)) = v(g(y)) + \sum_{y' \in X_{n+1}} a_{y'} d(y, y').$$

Le lemme 2.4.4 montre que

$$v(g(y)) = v_\lambda(g) \leq v_\lambda(f_{n+1}).$$

On a donc

$$\begin{aligned} \sum_{y' \in X_{n+1}} a_{y'} d(y, y') &\geq v(f_{n+1}(y)) - v_\lambda(f_{n+1}) \\ &= v\big(f_{n+1}(y) - f_n(y)\big) - v_\lambda(f_{n+1}) \\ &\geq v_\lambda(f_{n+1} - f_n) - v_\lambda(f_{n+1}), \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la remarque 2.3.15 pour obtenir la dernière inégalité. Il existe donc $y' \in X_{n+1}$ tel que

$$d(y, y') \geq \frac{1}{M}\big(v_\lambda(f_{n+1} - f_n) - v_\lambda(f_{n+1})\big).$$

Remarquons maintenant que la suite des $(v_\lambda(f_{n+1}))_n$ est bornée et que $v_\lambda(f_{n+1} - f_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$. De cela on déduit que l'on peut construire par récurrence sur n une suite de Cauchy dans $\prod_{n \geq N} X_n$. Le théorème résulte alors de la proposition 2.3.4. □

Du théorème précédent on déduit facilement le corollaire suivant.

Corollaire 2.4.11. — *Pour $f \in B_I$ non nul, les pentes non-nulles de $\mathcal{N}ewt_I(f)$ sont*

$$\{-\log_q \|y\| \mid y \in |Y_I|,\ f(y) = 0\}.$$

2.5. Les B_I sont principaux pour une couronne compacte

Nous pouvons maintenant commencer à collecter les fruits de nos résultats de factorisation.

Théorème 2.5.1. — *Supposons que $I \subset [0,1[$ soit compact.*

1. *Si $I = \{0\}$ ou bien $I = \{\rho\}$ avec $\rho \notin |F|$ alors B_I est un corps valué complet.*
2. *Sinon, B_I est un anneau principal tel que $|Y_I| \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spm}(\mathrm{B}_{\mathrm{I}\setminus\{0\}})$.*

Démonstration. — Si $I = \{0\}$ alors $B_I = \mathscr{E}$. Si $I = \{\rho\}$ avec $\rho \notin |F|$ alors B_I est un corps d'après la proposition 1.6.25. Supposons donc que l'on est dans la situation du point (2). Remarquons que pour tout $f \in B_I$ non nul, $\mathcal{N}ewt_I(f)$ ne possède qu'un nombre fini de pentes. Le résultat est alors une conséquence du théorème 2.4.10 couplé à la proposition 1.6.25 et au lemme 2.5.2 qui suit. □

Lemme 2.5.2. — *Soit A un anneau intègre muni d'un sous-ensemble $E \subset \mathrm{Spm(A)}$ formé d'idéaux principaux. Supposons que pour tout $x \in A$ non nul il existe une factorisation $x = u \prod_{i \in I} a_i$ avec $u \in A^\times$ et pour tout $i \in I$, $(a_i) \in E$. Alors A est principal.*

Lorsque $0 \in I$ on a en fait un résultat un peu plus précis concernant « les fonctions holomorphes en 0 » dont la démonstration est identique.

Théorème 2.5.3. — *Soit $\rho \in [0,1[$. Alors, l'anneau $\{x \in B_{[0,\rho]} \mid v_\pi(x) \geq 0\}$ est principal d'idéaux maximaux donnés par $\{(\pi)\} \cup |Y_{]0,\rho]}|$.*

Notons le corollaire suivant qui donne une définition intrinsèque de $|Y|$ « après coup ».

Corollaire 2.5.4. — *L'application $y \mapsto B\mathfrak{m}_y$ est une bijection entre $|Y|$ et les idéaux maximaux fermés de B. De même, pour tout $I \subset]0,1[$, $|Y_I|$ s'identifie aux idéaux maximaux fermés de B_I.*

2.6. Factorisation de Weierstrass au voisinage de 0

Soit $(z_i)_{i \geq 1}$ une suite de $\mathfrak{m}_F$ tendant vers 0. Le produit infini

$$\prod_{i=1}^{+\infty} \Big(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\Big)$$

est alors convergent dans B^+.

Théorème 2.6.1. — *Soient I un intervalle de $]0,1]$ tel que $0 \in \overline{I}$ et $\rho_0 \in I$. Pour tout $f \in B_I$ il existe une suite $(z_i)_{i\geq 1}$ d'éléments de $\mathfrak{m}_F$ tendant vers 0 ainsi que $g \in B_{I\cup\{0\}}$ ne possédant pas de zéros dans $|Y_{]0,\rho_0]}|$ et*

$$f = g.\prod_{i=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{[z_i]}{\pi}\Big).$$

Démonstration. On peut supposer $f \notin B_{I\cup\{0\}}$. Soit $N \in \mathbb{Z}$ tel que les pentes de $\mathcal{N}ewt_I(f)$ sur l'intervalle $]-\infty, N]$ soient plus grandes ou égales que $-\log_q \rho_0$ et qu'elles soient strictement plus petites sur $[N, +\infty[$. Soient $(\lambda_i)_{i\leq 0}$ les pentes de $\mathcal{N}ewt_I(f)$ sur $]-\infty, N]$ où λ_i est la pente sur le segment $[N+i-1, N+i]$. D'après la proposition 1.9.1, puisque $f \notin B_{I\cup\{0\}}$, pour tout i, $\lambda_i \neq +\infty$. Le théorème 2.4.10 nous dit alors que pour tout entier $n \geq 1$ on peut écrire

$$f = g_n.\prod_{i=1}^{n}\Big(1-\frac{[z_i]}{\pi}\Big)$$

où $z_i \in \mathfrak{m}_F$, $v(z_i) = \lambda_{-i}$ et $g_n \in B_I$. On a donc

$$g_n = g_{n+1}.\Big(1-\frac{[z_{n+1}]}{\pi}\Big),$$

formule de laquelle on déduit que pour tout $r \geq 0$ tel que $q^{-r} \in I$,

$$v_r(g_{n+1}-g_n) = v_r(g_{n+1}) + \lambda_{-n-1} - r.$$

On a de plus

$$v_r(g_{n+1}) = v_r(f) - \sum_{i=-n-1}^{-1} \inf\{0, \lambda_i - r\}.$$

et puisque $\lim\limits_{i\to-\infty} \lambda_i = +\infty$, la suite $(v_r(g_{n+1}))_n$ est bornée. On a donc

$$v_r(g_{n+1}-g_n) = \lambda_{-n-1} - r + O(1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

La suite $(g_n)_n$ converge donc dans B_I vers un $g \in B_I$ tel que

$$f = g.\prod_{i=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{[z_i]}{\pi}\Big).$$

Il est immédiat que g n'a pas de zéros sur $|Y_{]0,\rho_0]}|$ et donc, d'après la proposition 1.9.1, $g \in B_{I\cup\{0\}}$. □

Exemple 2.6.2. — Tout $f \in B_{]0,1]}$, resp. B^+, s'écrit sous la forme

$$f = g.\prod_{i=1}^{+\infty}\Big(1-\frac{[z_i]}{\pi}\Big)$$

avec $g \in B^b$, resp. $g \in B^{b,+}$.

2.7. Diviseur d'une fonction holomorphe

2.7.1. L'anneau B^+_{dR} associés à un point de Y. —

Définition 2.7.1. — Soit $y \in |Y|$. On note $B^+_{dR,y}$ le complété $\mathfrak{m}_y$-adique de B^b.

Dès que $y \in |Y_I|$, cet anneau coïncide avec le complété $B_I\mathfrak{m}_y$-adique de B_I ainsi que le complété $B^+_I\mathfrak{m}^+_y$-adique de B^+_I. C'est un anneau de valuation discrète complet et on a en quelques sortes « $B^+_{dR,y} = \widehat{\mathcal{O}}_{Y,y}$ ». On notera

$$\mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \to \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

la valuation de cette anneau de valuation discrète. On l'étend en une valuation sur B_I dès que $y \in |Y_I|$. Pour $f \in B_I$ avec $y \in |Y_I|$, $\mathrm{ord}_y(f)$ « l'ordre d'annulation de f en y ».

2.7.2. L'application diviseur. — Notons

$$\begin{array}{rcl} \|.\| : |Y| & \longrightarrow &]0,1[\\ y & \longmapsto & |\pi(y)| \end{array}$$

la fonction « distance à l'origine dans note disque épointé ».

Définition 2.7.2. — Soit I un intervalle dans $[0,1]$.

1. On note $\mathrm{Div}^+(Y_I)$ le monoïde formé des sommes formelles $D = \sum_{y\in|Y_I|} a_y[y] \in \mathbb{N}^{[Y_I|}$ telles que si $J \subset I$ est compact $\mathrm{supp(D)} \cap |\mathrm{Y_J}|$ est fini.
2. Pour $f \in B_I$ non nul on note
$$\mathrm{div}(f) = \sum_{y\in Y} \mathrm{ord}_y(f)\,[y].$$

Le support de $\mathrm{div}(f)$ est l'ensemble des $y \in |Y_I|$ tels que $f(y) = 0$. La proposition qui suit est une conséquence du théorème 2.4.10.

Proposition 2.7.3. — *Pour $f \in B_I \setminus \{0\}$, les nombres $-\log_q \|y\|$ comptés avec multiplicités $(\mathrm{ord}_y(f))_{y\in|Y_I|}$ sont les pentes finies strictement positives de $\mathcal{N}ewt(f)$ comptées avec multiplicité.*

De plus, $\mathrm{div}(f)$ détermine $\mathcal{N}ewt_I(f)$ à translation près par un élément de $\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$. La proposition 1.9.1 se traduit alors par exemple en le résultat suivant : si $0 \in \overline{I}$ alors $f \in B_{I\cup\{0\}}$ (i.e. « est méromorphe en zéro ») si et seulement si $\mathrm{supp(div(f))} \subset |\mathrm{Y}_{[\rho,1]}|$ pour un $\rho > 0$. La proposition 1.6.25 se traduit en disant que si $1 \notin I$ alors $f \in B_I^\times$ ssi $\mathrm{div}(f) = 0$.

L'application diviseur induit un morphisme de monoïdes

$$\mathrm{div} : \big(B_I \setminus \{0\}\big)/B_I^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(Y_I).$$

Le monoïde de gauche est le monoïde des idéaux principaux non-nuls de B_I.

Théorème 2.7.4. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$ différent de $\{1\}$.*

1. *Pour $f, g \in B_I$ non nuls on a l'équivalence*
$$f \in B_I.g \Longleftrightarrow \mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(g).$$
2. *Le morphisme de monoïdes*
$$\mathrm{div} : \big(B_I \setminus \{0\}\big)/B_I^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(Y_I)$$
est injectif.

Il en est de même en remplaçant B_I par $B_I^+[\frac{1}{[\varpi_F]}]$.

Démonstration. Le point (1) implique le point (2). Soient donc $f, g \in B_I$ non nuls tels que $\mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(g)$. Supposons d'abord que $1 \notin I$. Écrivons $I = \cup_{n\geq 0} J_n$ avec J_n un intervalle compact et $J_n \subset J_{n+1}$. D'après le théorème 2.5.1 pour tout n il existe un unique $h_n \in B_{J_n}$ tel
$$f_{|Y_{J_n}} = h_n g_{|Y_{J_n}}$$
où la notation restriction à Y_{J_n} désigne l'image via $B_I \to B_{J_n}$. D'après l'unicité de h_n on conclut qu'il définit un élément h de
$$B_I \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\geq 0} B_{J_n}$$
tel que $f = hg$.

Si maintenant $1 \in I$, d'après le cas précédent il existe $h \in B_{I\setminus\{1\}}$ tel que $f_{|Y_{I\setminus\{1\}}} = h.g_{|Y_{I\setminus\{1\}}}$. Mais alors pour $\rho \in I \setminus \{1\}$
$$|h|_\rho = \frac{|f|_\rho}{|g|_\rho}.$$
On conclut en faisant tendre ρ vers 1 et en appliquant la proposition 1.9.2 que $h \in B_{I\cup\{1\}}$.

Lorsque $f, g \in B_I^+ = B_{I'}^+$ où I' est l'enveloppe convexe de $I \cup \{1\}$, il suffit d'utiliser la proposition 1.4.5 et la formule limite précédente lorsque $\rho \to 1$. □

Remarque 2.7.5. — Comme dans le cas des fonctions rigides analytiques sur la boule unité sur un corps non maximalement complet, on ne sait pas caractériser l'image de l'application diviseur (cf. [**49**] section 8). Le point est que l'on ne sait pas définir d'analogue des produits de Weierstrass pour B ou de Blaschke pour B^+ « au bord extérieur » de $|Y|$ lorsque $\|y\| \to 1$.

Plus précisément, si $D \in \mathrm{Div}^+(Y)$ est tel que $\mathrm{supp}(D) \subset |Y_{]0,\rho]}|$ pour un $\rho \in]0,1[$ il existe alors $f \in B^+$ tel que $\mathrm{div}(f) = D$. Un tel f est construit comme un produit infini convergeant $\prod_{i=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{[z_i]}{\pi}\right)$ où $z_i \in \mathfrak{m}_F$ et $z_i \underset{i\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Le problème de savoir si un diviseur donné est principal se situe donc au « bord extérieur » du disque épointé Y et non au voisinage de l'origine.

CHAPITRE 3

ZÉROS DES FONCTIONS HOLOMORPHES : LE CAS F PARFAIT QUELCONQUE

Introduction

On continue dans ce chapitre l'étude des algèbres « de fonctions holomorphes de la variable π » B_I faite dans le chapitre précédent lorsque F est algébriquement clos. On suppose maintenant F parfait quelconque. On obtient des résultats similaires au cas F algébriquement clos à la différence près que les éléments primitifs ne sont plus nécessairement de degré 1. La méthode utilisée consiste à se ramener au cas algébriquement clos par descente galoisienne de $\widehat{\overline{F}}$ à F en utilisant des techniques de descente « à la Sen ». On obtient également une interprétation des corps résiduels intervenant dans les anneaux principaux B_I comme paramétrant des « débasculements » du corps F et de ses extensions de degré fini (cf. théo. 3.3.1). On obtient également une nouvelle preuve du théorème de presque pureté de Scholze pour les corps perfectoïdes (théo. 3.2.1) (cf. [**21**] prop. 2.5.1).

3.1. Étude de l'ensemble $|Y_F|$ par descente galoisienne

On ne suppose plus que F est algébriquement clos. Soit $\overline{F}$ une clôture algébrique de B de complété $\widehat{\overline{F}}$. On note $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ le groupe de Galois de $\overline{F}|F$. Rappelons que d'après Ax, $\widehat{\overline{F}}^{G_F} = F$ et donc

$$\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}^{G_F} = \mathbf{A}_F.$$

On reprend les notations de la section 2.2.1 et on note

$$|Y_F| = Prim^{irred}/\mathbf{A}_F^{\times}.$$

On va étudier $|Y_F|$ à partir de $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ par descente galoisienne.

3.1.1. Un calcul de cohomologie galoisienne. — Le lemme qui suit dit que toute extension de degré fini de L est presque étale.

Lemme 3.1.1. — *Soit $L|F$ une extension de degré fini. Alors,*

$$\mathfrak{m}_F \subset tr_{L/F}(\mathcal{O}_L).$$

Démonstration. — La trace $\mathrm{tr}_{L/F}$ commute avec le Frobenius $\varphi = \mathrm{Frob}_q$. Soit $x \in \mathcal{O}_L$ tel que $\mathrm{tr}_{L/F}(x) \neq 0$. On a alors

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\mathrm{tr}_{L/F}\big(\varphi^{-n}(x)\big)\right| = 0.$$

□

La méthode de Tate ([**60**]) couplée au lemme précédent fournit le corollaire suivant (la cohomologie galoisienne est la cohomologie continue).

Corollaire 3.1.2. — *On a $\mathfrak{m}_F.H^1(G_F, O_{\widehat{\overline{F}}}) = 0$, $H^1(G_F, \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}) = 0$ et $H^1(G_F, 1 + \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}) = 0$.*

Rappelons (sec. 1.4.3) que l'on munit $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ de la topologie faible. Pour cette topologie les éléments topologiquement nilpotents sont

$$\mathbf{A}^{\circ\circ}_{\widehat{\overline{F}}} = \Big\{ \sum_{n\geq 0} [x_n]\pi^n \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}} \mid x_0 \in \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}} \Big\}.$$

Puisque $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ est complet,

$$1 + \mathbf{A}^{\circ\circ}_{\widehat{\overline{F}}} \subset \mathbf{A}^{\times}_{\widehat{\overline{F}}}.$$

Il y a un morphisme surjectif

$$\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_{\overline{F}})$$

déduit de la projection $\mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}} \to k_{\overline{F}}$. On a alors

$$\mathscr{U} := \ker\big(\mathbf{A}^{\times}_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_{\overline{F}})\big) = 1 + W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}) \subset 1 + \mathbf{A}^{\circ\circ}_{\widehat{\overline{F}}}.$$

On munit $\mathscr{U}$ de la topologie induite par celle de $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$.

Lemme 3.1.3. — *Muni de la topologie précédente $\mathscr{U}$ est un groupe topologique. Si $\rho \in]0,1[$ est fixé, une base de voisinages de 1 est formée des sous-groupes*

$$\{x \in \mathscr{U} \mid |x-1|_\rho \leq \epsilon\}_{\epsilon>0}.$$

Démonstration. — On vérifie facilement que les ensembles annoncés pour $\epsilon > 0$ forment des sous-groupes. On utilise maintenant le fait que la topologie faible de $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ est induite par $|.|_\rho$. Le lemme résulte alors de ce que pour $x, y \in \mathscr{U}$,

$$|x-y|_\rho = |x|_\rho.|1-x^{-1}y|_\rho = |1-x^{-1}y|_\rho$$

par multiplicativité de $|.|_\rho$ et car $|x|_\rho = 1$. □

Posons maintenant pour un entier $k \geq 1$

$$\mathscr{U}_k = 1 + \pi^k W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}),$$

un sous-groupe fermé de $\mathcal{U}$ (car $\pi^k W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}})$ est fermé dans $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$). On laisse le lemme suivant en exercice au lecteur.

Lemme 3.1.4. — *Il y a des isomorphismes de groupes topologiques*

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{U} & \xrightarrow{\sim} & \varprojlim_{k\geq 1} \mathscr{U}/\mathscr{U}_k \\ \mathscr{U}/\mathscr{U}_1 & \xrightarrow{\sim} & 1 + \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}} \\ \mathscr{U}_k/\mathscr{U}_{k+1} & \xrightarrow{\sim} & \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}. \end{array}$$

En mettant ensemble ce lemme et le corollaire 3.1.2 on obtient la proposition suivante.

Proposition 3.1.5. — *On a* $H^1(G_F, 1 + W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}})) = 0$.

3.1.2. Description de l'ensemble $|Y_F|$ par descente galoisienne. —

Proposition 3.1.6. — *Soit* $a \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ *primitif tel que pour tout* $\sigma \in G_F$ *on ait* $(\sigma(a)) = (a)$ *comme idéal de* $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$. *Il existe alors* $b \in \mathbf{A}_F$ *primitif tel que* $(a) = (b)$.

Démonstration. — Quitte à multiplier a par un unité on peut supposer que l'image de a dans $W_{\mathcal{O}_E}(k_{\overline{F}})$ est égale à $\pi^{\deg(a)}$. Dès lors, la fonction

$$\sigma \longmapsto \frac{\sigma(a)}{a}$$

définit un 1-cocyle de G_F à valeurs dans $1 + W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}})$. Ce cocyle est continu. En effet, la fonction de G_F à valeurs dans $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ définie par $\sigma \mapsto \sigma(a)$ est continue pour la topologie faible de $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$. De plus pour un $\rho \in]0, 1[$,

$$|a^{\sigma-1} - a^{\tau-1}|\rho = |a^\sigma - a^\tau|_\rho$$

car $|a|_\rho = 1$. On conclut en appliquant 3.1.5. □

On considère maintenant l'ensemble $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ muni de son action de G_F. Rappelons (prop. 2.3.2) que $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ est muni d'une distance. On vérifie aussitôt que l'action de G_F est isométrique pour cette distance et que donc l'action de G_F est continue. Notons $\mathrm{Div}^+_{fin}(Y_{\widehat{\overline{F}}})$ les diviseurs à support fini de $Y_{\widehat{\overline{F}}}$ (le monoïde abélien libre sur $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$). Il y a une application

$$\begin{array}{rcl} |Y_F| & \longrightarrow & \mathrm{Div}^+_{fin}(Y_{\widehat{\overline{F}}})^{G_F} \\ (a) & \longmapsto & \mathrm{div}(a). \end{array}$$

Proposition 3.1.7. — *Si* $a \in \mathbf{A}_F$ *est primitif irréductible alors* $\mathrm{div}(a) \in \mathrm{Div}^+_{fin}(Y_{\widehat{\overline{F}}})^{G_F}$ *est de la forme*

$$\sum_{\sigma \in Gal(L|F)} [y^\sigma]$$

avec $y \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|$, $G_L = Stab_{G_F}(y)$ *et* $[L : F] = \deg(a)$.

Démonstration. — Si ce n'était pas le cas on pourrait écrire comme idéaux de $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$

$$(a) = (b)(c)$$

où $b, c \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ sont primitifs de degré > 0 et les idéaux (b) et (c) sont stables sous l'action de G_F. D'après la proposition 3.1.6 on pourrait alors supposer que $b, c \in \mathbf{A}_F$. On aurait alors $a = ubc$ dans $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$ avec $u \in (\mathbf{A}^\times_{\widehat{\overline{F}}})^{G_F} = \mathbf{A}^\times_F$, ce qui contredirait l'irréducibilité de a. □

Théorème 3.1.8. — *Notons* $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}}$ *les éléments de* $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ *ayant une* G_F*-orbite finie. Il y a alors une application surjective Galois invariante*

$$\beta : |Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}} \longrightarrow |Y_F|$$

dont les fibres sont les G_F*-orbites*

$$|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}}/G_F \xrightarrow{\sim} |Y_F|$$

et telle que pour $y \in |Y_F|$, $\deg(y) = |\beta^{-1}(y)|$.

Démonstration. — Soit $y \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}}$ de stabilisateur G_L, $L|F$ finie. Si $y = (a)$ avec a primitif de degré 1, soit

$$b = \prod_{\sigma \in \mathrm{Gal}(L|F)} \sigma(a)$$

qui est primitif de degré $[L : F]$. D'après la proposition 3.1.6, il existe $b' \in \mathbf{A}_F$ tel que $(b) = (b')$. Cet élément b' est nécessairement irréductible. De plus, l'idéal engendré par b' dans $\mathbf{A}_F$ ne dépend que de y (utiliser encore que $(\mathbf{A}^\times_{\widehat{\overline{F}}})^{G_F} = \mathbf{A}^\times_F$). On pose alors

$$\beta(y) = (b').$$

La proposition 3.1.7 permet de conclure facilement. □

3.1.3. Corps résiduels. —

3.1.3.1. Rappels sur les corps perfectoïdes. — Dans une version préliminaire de ce travail (cf. [**21**] sec.2.4), nous utilisions la terminologie de corps strictement p-parfait. Entre temps est apparu [**56**] et nous utilisons désormais la terminologie de [**56**].

Soit $K|E$ un corps valué complet. Rappelons qu'il est dit perfectoïde s'il n'est pas de valuation discrète et le Frobenius de $\mathcal{O}_K/\pi_E\mathcal{O}_K$ est surjectif. Rappelons (sec. 2.1.3) que l'on munit $K^\flat$ de la valeur absolue $|(x^{(n)})_{n\geq 0}| = |x^{(0)}|$.

Proposition 3.1.9. — *Soit $K|E$ perfectoïde. Alors, $K^\flat$ est un corps valué complet parfait satisfaisant $|K| = |K^\flat|$. De plus,*

$$\theta : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^\flat) \longrightarrow \mathcal{O}_K$$

est surjectif de noyau engendré par un élément primitif de degré 1.

Démonstration. — Le fait que θ soit surjectif résulte de 2.1.10.

Puisque la valuation de K est non-discrète, il existe $x \in \mathcal{O}_K$ tel que $|\pi_E| < |x| < 1$. Via la bijection

$$\mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_K/\pi_E\mathcal{O}_K)^\flat$$

on en déduit l'existence de $y \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $y^{(0)} \equiv x \bmod \pi_E$ et donc $|y| = |y^{(0)}| = |x|$. Maintenant, si $z \in K^\times$, il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $|\pi_E| < |x|^n|z| \leq 1$. Via la bijection $\mathcal{O}_K^\flat \xrightarrow{\sim} (\mathcal{O}_K/\pi_E\mathcal{O}_K)^\flat$ on en déduit l'existence de $w \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $w^{(0)} \equiv x^n z \bmod \pi_E$ et donc $|w| = |w^{(0)}| = |x^n z| = |y|^n|z|$. Alors, $wy^{-n} \in K^\flat$ est de valeur absolue $|z|$. Ainsi, $|K| = |K^\flat|$.

Soit maintenant $a_0 \in \mathcal{O}_K^\flat$ tel que $|a_0| = |\pi_E|$. On a donc en particulier

$$\theta([a_0]) \equiv 0 \bmod \pi_E.$$

D'après la surjectivité de θ, il existe $b \in W_{\mathcal{O}_E}(O_K^\flat)$ tel que

$$\theta(b) = \frac{\theta([a_0])}{\pi_E}.$$

Alors $[a_0] - \pi_E b \in \ker\theta$. De plus, si $b = \sum_{i\geq 0}[b_i]\pi_E^i$, puisque $a_0^{(0)} - \pi_E b^{(0)} \equiv 0 \bmod \pi_E^2$ et $|a_0^{(0)}| = |\pi_E|$, on a $|b^{(0)}| = 1$. Cela implique que $[a_0] - \pi_E b$ est primitif de degré 1. D'après le point (1) du lemme 2.1.9 on sait également que cet élément engendre $\ker\theta$. □

Notons déjà le corollaire suivant que nous exploiterons plus loin dans la section 3.2.

Corollaire 3.1.10. — *Un corps perfectoïde K est algébriquement clos si et seulement si $K^\flat$ l'est.*

Démonstration. — On a déjà vu que si K est algébriquement clos alors $K^\flat$ l'est (prop. 2.1.11). La réciproque découle de la proposition 3.1.9 précédente et de la proposition 2.2.19. □

3.1.3.2. Corps résiduels. — On va maintenant voir une réciproque à la proposition précédente.

Théorème 3.1.11. — *Soit $a \in \mathbf{A}_F$ primitif irréductible de degré d. Alors,*

$$K = B^b_{F,E}/(a)$$

est un corps perfectoïde extension de E. De plus, l'application

$$\begin{array}{rcl} F & \longrightarrow & K^\flat \\ x & \longmapsto & \left(\left[x^{q^{-n}}\right] \ mod\ a\right)_{n\geq 0} \end{array}$$

induit une extension $K^\flat|F$ de degré d.

Démonstration. — Si $\mathrm{div}(a) = \sum_{i=1}^d [y_i]$ dans $\mathrm{Div}^+_{fin}(Y_{\widehat{\overline{F}}})$,

$$B^b_{\widehat{\overline{F}}}/(a) \xrightarrow{\sim} \prod_{i=1}^d C_{y_i}.$$

Pour tout $\sigma \in G_F$ et $i \in \{1, \ldots, d\}$ il y a un isomorphisme $\sigma : C_{y_i} \xrightarrow{\sim} C_{\sigma(y_i)}$. De la proposition 3.1.7 on déduit alors que si G_L est le stabilisateur de y_1,

$$\left(B^b_{\widehat{\overline{F}}}/(a)\right)^{G_F} = C_{y_1}^{G_L}$$

qui est un corps valué complet que l'on note K. D'après le corollaire 3.1.2 on sait que

$$[\varpi_F].H^1(G_F, \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}) = 0$$

(la preuve est identique à celle de la prop. 3.1.5 par dévissage). On en déduit que le conoyau de l'inclusion

$$\mathbf{A}_F/(a) \subset \left(\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}/(a)\right)^{G_F}$$

est annulé par $[\varpi_F]$ mod a. Il en résulte que

$$B^b_F/(a) = K.$$

On a de plus,

$$\begin{array}{rcl} K^\flat & = & \left(B^b_{\widehat{\overline{F}}}/(a)\right)^{G_L,\flat} \\ & = & \left(B^b_{\widehat{\overline{F}}}/(a)\right)^{\flat,G_L} \\ & = & \left(\prod_{i=1}^d C^\flat_{y_i}\right)^{G_L} \\ & = & C^{\flat,G_L}_{y_1} \\ & = & \widehat{\overline{F}}^{G_L} \\ & = & L. \end{array}$$

Il reste à montrer que K est perfectoïde. Puisque y_1 est stable sous l'action de G_L, d'après 3.1.6 il existe $b \in \mathbf{A}_L$ primitif de degré 1 tel que $y_1 = (b)$. On a alors

$$\mathcal{O}_K = \left(\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}/(b)\right)^{G_L} = \mathbf{A}_L/(b).$$

En effet, il y a une suite exacte longue de cohomologie galoisienne

$$0 \longrightarrow \mathbf{A}_L/(b) \longrightarrow \left(\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}/(b)\right)^{G_L} \longrightarrow H^1(G_L, \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}) \xrightarrow{\times b} H^1(G_L, \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}).$$

D'après le corollaire 3.1.2, pour tout $\epsilon \in \mathfrak{m}_L$,

$$[\epsilon].H^1(G_L, \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}) = 0.$$

Mais b étant primitif de degré 1, $b = [b_0] + \pi u$ avec $u \in \mathbf{A}_L^\times$ et $|b_0| < 1$. Le noyau de la multiplication par b sur $H^1(G_L, \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}})$ s'identifie donc au noyau de la multiplication par π qui est nul puisque

$$(\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}/\pi\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}})^{G_L} = \mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}}^{G_L} = \mathcal{O}_L = \mathbf{A}_L/\pi\mathbf{A}_L.$$

Maintenant, il suffit de constater que

$$\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K = \mathbf{A}_L/(b, \pi) = \mathcal{O}_L/b_0\mathcal{O}_L$$

sur lequel Frobenius est surjectif. □

Notons le corollaire suivant qui n'était pas évident à priori.

Corollaire 3.1.12. — *Il existe un corps perfectoïde $K|E$ tel que $K^\flat \simeq F$.*

Démonstration. — Il suffit par exemple de prendre $K = B_F^b/([a] - \pi)$ avec $0 < |a| < 1$. □

Définition 3.1.13. — Soit $y \in |Y_F|$, $y = (a)$ avec $a \in Prim_F^{irred}$.

1. On note $\mathfrak{m}_y = B_F^b a$ et $\mathfrak{m}_y^+ = B^{b,+}a$.
2. On note K_y le corps perfectoïde
$$K_y = B_F^b/\mathfrak{m}_y = B^{b,+}/\mathfrak{m}_y^+.$$
3. On note $\theta_y : B_F^b \longrightarrow K_y$ et on normalise la valeur absolue $|.|_y$ de K_y de telle manière que
$$|\theta_y([x])|_y = |x|$$
et ainsi $K_y^\flat|F$ est isométrique.

Remarque 3.1.14. — L'application $\theta_y : \mathbf{A}_F \to \mathcal{O}_{K_y}$ n'est surjective que si $\deg(y) = 1$.

Remarque 3.1.15. — Contrairement au cas où F est algébriquement clos, il est faux que tout $y \in |Y_F|$ de degré 1 est de la forme $([a] - \pi)$. C'est le cas si et seulement si il existe $\underline{\pi} \in K_y^\flat$ tel que $\underline{\pi}^{(0)} = \pi$.

3.2. Le théorème de presque pureté

Le théorème suivant est contenu dans [**56**]. La preuve que nous en donnons est différente. En retraçant tout ce que nous avons fait jusqu'à maintenant, on constate que les deux points cruciaux de notre preuve sont le lemme 2.2.5 et la proposition 2.2.20 qui permettent de montrer que si K est perfectoïde tel que $K^\flat$ est algébriquement clos alors K est algébriquement clos (coro. 3.1.10).

Théorème 3.2.1. — *Soit $K|E$ perfectoïde de basculement $K^\flat$. Alors, tout extension de degré fini de K est perfectoïde. De plus, le foncteur $(-)^\flat$ induit une équivalence de catégories entre K-algèbres étales finies et $K^\flat$-algèbres étales finies.*

Démonstration. — Prenons $F := K^\flat$. On a alors $K = K_y$ pour un $y \in |Y_F|$ de degré 1. Soit $\widehat{\overline{F}}$ le complété d'une clôture algébrique de F. Au point y est associé $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F}$ tel que $K_z|K_y$ soit algébriquement clos. Notons $\overline{K}_y$ la clôture algébrique de K_y dans K_z. Puisque $\widehat{\overline{K}}_y$ est algébriquement clos, il est perfectoïde et d'après la proposition 2.1.11 $\widehat{\overline{K}}_y^\flat$ est algébriquement clos. Mais puisque

$$K_z^\flat = \widehat{\overline{F}} \mid \widehat{\overline{K}}_y^\flat \mid F = K_y^\flat$$

on a $K_z^\flat = \widehat{\overline{K}}_y^\flat$ ce qui implique que

$$\widehat{\overline{K}}_y = K_z.$$

L'action de G_F sur K_z définit un morphisme

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}|F) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y).$$

Dans l'autre sens, le foncteur $(-)^\flat$ induit un morphisme

$$\mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y) = \mathrm{Aut}\big(\widehat{\overline{K}}_y|K_y\big) = \mathrm{Aut}(K_z|K_y) \longrightarrow \mathrm{Aut}(K_z^\flat|K_y^\flat) = \mathrm{Aut}\big(\widehat{\overline{F}}|F\big) = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$$

où « Aut » désigne les automorphismes continus. On vérifie aussitôt que les deux morphismes précédents sont inverses l'un de l'autre et donc

$$\mathrm{Gal}(\overline{F}|F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y).$$

On conclut facilement. □

Du théorème précédent on déduit le résultat suivant que nous exploiterons via la méthode de Sen-Tate afin de calculer des groupes de cohomologie galoisienne continue.

Proposition 3.2.2. — *Soit $K|E$ perfectoïde et $L|K$ une extension de degré fini. On a alors*

$$\mathfrak{m}_K \subset tr_{L/K}(\mathcal{O}_L).$$

Démonstration. — Soit $a \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_K^\flat)$ un générateur primitif de degré 1 de $\ker\theta$. On a alors

$$\mathcal{O}_L = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_L^\flat)/(a).$$

Si $a_0 \in \mathfrak{m}_F$ désigne la réduction modulo π de a on a

$$\mathcal{O}_L/\pi\mathcal{O}_L = \mathcal{O}_{L^\flat}/a_0\mathcal{O}_{L^\flat} \text{ et } \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K = \mathcal{O}_{K^\flat}/a_0\mathcal{O}_{K^\flat}.$$

Via ces identifications

$$\mathrm{tr}_{L/K} \bmod \pi = \mathrm{tr}_{L^\flat/K^\flat} \bmod a_0 : \mathcal{O}_{L^\flat}/a_0\mathcal{O}_{L^\flat} \longrightarrow \mathcal{O}_{K^\flat}/a_0\mathcal{O}_{K^\flat}.$$

On conclut grâce au lemme 3.1.1. □

3.3. En résumé

En mettant ensemble tout ce que l'on a fait on arrive au théorème suivant.

Théorème 3.3.1. —

1. *Il y a une application*

$$\beta : |Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}} \longrightarrow |Y_F|$$

induisant une bijection $|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F-\mathrm{fin}}/G_F \xrightarrow{\sim} |Y_F|$. *Si* $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ *a pour image* $y = \beta(z)$ *alors*

   (a) C_z *est algébriquement clos et* K_y *est perfectoïde,*

   (b) $[K_y^\flat : F] = |G_F.z| = |\beta^{-1}(y)| = \deg(y)$,

   (c) $C_z = \widehat{\overline{K}}_y$,

   (d) $Gal(\overline{K}_y|K_y) \xrightarrow{\sim} Gal(\overline{F}|K_y^\flat)$.

2. *Soit*

$$E_d = \{(K, \iota) \mid \iota : F \hookrightarrow K^\flat\}/\sim$$

où :
— $K|E$ *est perfectoïde*
— ι *fait de* $K^\flat$ *une extension de degré* d *de* F.
Il y a alors une bijection

$$E_d \xrightarrow{\sim} |Y_F|^{\deg=d}.$$

3.4. Zéros des fonctions holomorphes

3.4.1. Extension à B_I de l'application d'évaluation en un point. —

Définition 3.4.1. — 1. On note

$$\|.\| : |Y_F| \longrightarrow]0,1[$$

la fonction qui associe à la classe de $a = \sum_{i\geq 0}[a_i]\pi^i$ primitif irréductible de degré d le nombre $|a_0|^{1/d}$.

2. Pour un intervalle I de $[0,1]$ on note

$$|Y_{F,I}| = \{y \in |Y_F| \mid \|y\| \in I\}.$$

Lemme 3.4.2. — *1. Pour $y \in |Y_F|$ on a*

$$\|y\| = |\pi|_y.$$

2. Si $y = (a)$ avec $a \in Prim^{irred}_{F,\deg(y)}$ alors le polygone de Newton de a vaut $+\infty$ sur $]-\infty, 0[$, 0 sur $[\deg(y), +\infty[$ et est une droite de pente $-\log_q \|y\|$ sur $[0, \deg(y)]$.

Démonstration. — Choisissons $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ tel que $\beta(z) = y$. On a alors

$$|\pi|_y = |\pi|_z.$$

Notons $G_L = \mathrm{Stab}_{\mathrm{G_F}}(\mathrm{z})$, $[L : F] = \deg(y)$. Si $y = (a)$ et $z = (b)$, comme idéaux de $\mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}$

$$(a) = \prod_{\sigma \in G_F/G_L} (b)^\sigma$$

et donc $a = u\prod_{i=1}^{\deg(y)} b_i$ où $u \in \mathbf{A}^\times_{\widehat{\overline{F}}}$, $b_i \in Prim_{\widehat{\overline{F}},1}$ et les $(b_i)_{1\leq i\leq \deg(y)}$ sont conjugués sous l'action de G_F. On en déduit facilement le résultat. □

Du point (1) du lemme précédent on déduit que $\beta : |Y_{\widehat{\overline{F}}}| \to |Y_F|$ vérifie

$$\|\beta(.)\| = \|.\|$$

On en déduit également le lemme qui suit.

Lemme 3.4.3. — *Pour $y \in |Y_F|$ et $f \in B^b$ on a*

$$|\theta_y(f)|_y \leq |f|_{\|y\|}.$$

Soit I un intervalle de $[0,1]$. Comme précédemment (lemme 2.4.7) on en déduit que si $y \in |Y_I|$, l'application θ_y se prolonge par continuité en

$$\theta_y : B_I \longrightarrow K_y.$$

On a de plus (cf. lemme 2.4.8, la preuve est identique)

$$\begin{aligned} \ker\left(B_I \xrightarrow{\theta_y} K_y\right) &= B_I\mathfrak{m}_y \\ \ker\left(B_I^+ \xrightarrow{\theta_y} K_y\right) &= B_I^+\mathfrak{m}_y^+. \end{aligned}$$

Comme précédemment, on utilise les notations abrégées

$$\begin{aligned} f(y) &:= \theta_y(f) \\ |f(y)| &:= |\theta_y(f)|_y. \end{aligned}$$

Pour $y \in |Y|$ on note alors

$$B^+_{dR,y}$$

le complété $\mathfrak{m}_y$-adique de B. C'est un anneau de valuation discrète dont on note

$$\mathrm{ord}_y : B^+_{dR,y} \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$$

la valuation.

3.4.2. Zéros et polygones de Newton. — Soit I un intervalle de $[0,1]$.

Théorème 3.4.4. — *Pour $f \in B_{F,I}$ non nul, les pentes non-nulles de $\mathcal{N}ewt_I(f)$ sont*

$$\{\|y\| \mid y \in |Y_{F,I}|,\ f(y) = 0\},$$

chaque pente étant comptée avec multiplicité $\deg(y) ord_y(f)$ *: la multiplicité de λ est*

$$\sum_{\substack{\|y\|=q^{-\lambda} \\ f(y)=0}} ord_y(f) \deg(y).$$

Démonstration. — D'après le point (2) du lemme 3.4.2 il suffit de montrer que si λ est une pente strictement positive de $\mathcal{N}ewt_I(f)$ alors il existe $y \in |Y_{F,I}|$ tel que $\|y\| = q^{-\lambda}$ et $f(y) = 0$. D'après le théorème 2.4.10 il existe $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}},I}|$ tel que $q^{-\lambda} = \|z\|$ et $f(z) = 0$. Dès lors, pour $\sigma \in G_F$,

$$f(z^\sigma) = f^\sigma(z^\sigma) = f(z)^\sigma = 0.$$

Or,

$$\{z' \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}| \mid \|z'\| = q^{-\lambda}, f(z') = 0\}$$

est fini de cardinal borné par la multiplicité de λ dans $\mathcal{N}ewt(f)$. On en déduit que la G_F-orbite de z est finie. On vérifie alors aussitôt $y = \beta(z) \in |Y_F|$ convient. □

3.4.3. Produits de Weierstrass. —

Lemme 3.4.5. — *Soit $(y_i)_{i\geq 0}$ une suite d'éléments de $|Y_F|$ telle que $\lim_{i\to+\infty} \|y_i\| = 0$. Il existe alors une suite $(a_i)_{i\geq 0}$ d'éléments primitifs dans $\mathbf{A}_F$ telle $y_i = (a_i)$ et*

$$\lim_{i\to+\infty} \frac{a_i}{\pi^{\deg y_i}} = 1$$

dans B^+_F.

Démonstration. — Soit $a \in Prim_{F,d}^{irred}$. Il existe $u \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}^{\times}$ ainsi que $z_1, \ldots, z_d \in \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}$ non nuls tels que

$$a = u \prod_{i=1}^{d} (\pi - [z_i]).$$

Notons $w = \prod_{i=1}^{d}(\pi - [z_i])$. On a alors, pour tout i, $|z_i| = \|y\|^d$ et donc

$$|w - \pi^d|_1 \leq \|y\|^d.$$

Notons pour $\alpha \in]0,1[$,

$$\mathfrak{a}_\alpha = \{x \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}} \mid |x|_1 \leq \alpha\} \subset \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}^{\circ\circ}.$$

Pour tout $\sigma \in G_F$,

$$w^{\sigma - 1} \in 1 + \mathfrak{a}_{\|y\|^d} \subset \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}^{\times}.$$

Comme dans la preuve de la proposition 3.1.5, on montre que si $0 < \alpha < \alpha' < 1$, le morphisme

$$H^1(G_F, 1 + \mathfrak{a}_\alpha) \longrightarrow H^1(G_F, 1 + \mathfrak{a}_{\alpha'})$$

est nul. En prenant $\alpha = \|y\|^d$, il existe un unité

$$u' \in 1 + \mathfrak{a}_{\alpha^{1/2}}$$

telle que

$$u'w \in \mathbf{A}_{\widehat{\overline{F}}}^{G_F} = \mathbf{A}_F.$$

On a de plus pour une telle unité u'

$$|u'w - \pi^d|_1 \leq \alpha^{1/2}.$$

Cela entraine que pour $\rho \in]0,1]$,

$$\Big|\frac{u'w}{\pi^d} - 1\Big|_\rho \leq \frac{\alpha^{1/2}}{\rho^d} = \Big(\frac{\|y\|^{1/2}}{\rho}\Big)^{\deg(y)}.$$

On a donc montré que pour tout $y \in |Y_F|$, il existe $a \in \mathbf{A}_F$ primitif tel que $y = (a)$ et

$$\Big|\frac{a}{\pi^{\deg(y)}} - 1\Big|_\rho \leq \Big(\frac{\|y\|^{1/2}}{\rho}\Big)^{\deg(y)}$$

dès que $\rho \in]0,1[$. Le résultat s'en déduit. □

On définit le groupe des diviseurs $\mathrm{Div}^+(Y_{F,I})$ comme dans la section 2.7.2.

Proposition 3.4.6. — *Soit $\rho \in]0,1[$. Pour tout diviseur $D \in \mathrm{Div}^+(Y_{]0,\rho]})$ il existe $f \in B^+$ tel que $\mathrm{div}(f) = D$.*

Démonstration. — Étant donnée une suite $(a_i)_{i \geq 0}$ comme dans le lemme 3.4.5, le produit infini

$$\prod_{i \geq 0} \frac{a_i}{\pi^{\deg y_i}}$$

est convergeant. La proposition s'en déduit. □

On a également le résultat suivant lorsqu'au lieu de se rapprocher de l'origine on tend vers le « bord extérieur de Y ».

Proposition 3.4.7. — *Pour $\rho \in]0,1[$ et $D \in \mathrm{Div}^+(Y_{[\rho,1[})$ il existe $f \in B$ non nul tel que*

$$\mathrm{div}(f) \geq D.$$

Démonstration. — Soit $a \in Prim_{F,d}^{irred}$, $a = \sum_{i\geq 0}[a_i]\pi^i$. D'après le calcul du polygone de Newton de a (lemme 3.4.2) le polygone de Newton de $a - [a_0]$ est au dessus du polygone valant $+\infty$ sur $]-\infty, 1[$, qui est une droite de pente $v(a_0)/d$ sur $[1, d]$ et vaut 0 sur $[d, +\infty[$. De cela on déduit que dès que $r \geq v(a_0)/d$,

$$v_r(a - [a_0]) \geq \frac{d-1}{d} v(a_0) + r.$$

Cette inégalité se traduit en

$$\left|1 - \frac{a}{[a_0]}\right|_{\rho'} \leq \frac{\rho'}{\|y\|}$$

dès que $\rho' \leq \|y\|$.

Soit maintenant $D = \sum_{i\geq 1}[y_i] \in \mathrm{Div}^+(Y_{[\rho,1[})$ un diviseur de support infini (si le support de D est fini alors D est principal et alors la proposition est évidente). On a donc $\lim_{i\to+\infty} \|y_i\| = 1$. Notons $y_i = (a_i)$ avec a_i primitif de terme constant $a_{i,0} \in \mathcal{O}_F$. D'après le calcul précédent, le produit infini

$$\prod_{i\geq 1}\left(1 - \left(1 - \frac{a_i}{[a_{i,0}]}\right)^i\right)$$

est convergeant dans B. Le diviseur de cet élément de B est alors plus grand que D. □

3.5. Diviseurs et idéaux

3.5.1. Les B_I sont principaux pour I compact. — La preuve des théorèmes 2.5.1 et 2.5.3 s'adaptent aussitôt pour donner le résultat suivant.

Théorème 3.5.1. — *Supposons que $I \subset [0,1[$ soit compact.*

1. *Si $I = \{0\}$ ou bien $I = \{\rho\}$ avec $\rho \notin |F|^{1/\infty}$ alors B_I est un corps valué complet.*
2. *Sinon, B_I est un anneau principal tel que $|Y_{F,I}| \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spm}(\mathrm{B}_{\mathrm{I}\setminus\{0\}})$.*
3. *Si $0 \in I$ et $I \neq \{0\}$ alors*

$$\{x \in B_I \mid v_\pi(x) \geq 0\}$$

est un anneau principal d'idéaux maximaux en bijection avec $|Y_{F,I}| \cup \{(\pi)\}$.

3.5.2. Diviseurs positifs et idéaux fermés. — Soit I un intervalle de $]0,1[$. On pose

$$\mathrm{Div}^+(Y_I) = \varprojlim_J \mathrm{Div}^+(Y_J)$$

où J parcourt les intervalles compacts de I et $\mathrm{Div}^+(Y_J)$ est le monoïde abélien libre sur $\mathrm{Spm}(B_J)$ i.e. le monoïde des idéaux non-nuls de B_J. On a donc

$$\mathrm{Div}^+(Y_I) = \Big\{ D = \sum_{y \in |Y_I|} m(y)[y] \;\big|\; \forall J \subset I \text{ compact, } \mathrm{supp}(D) \cap |Y_J| \text{ est fini} \Big\}.$$

Si $D = \sum_y m(y)[y] \in \mathrm{Div}^+(Y_I)$ on pose

$$\mathfrak{a}_{-D} = \{ f \in B_I \mid \mathrm{div}(f) \geq D \},$$

un idéal de B_I. Cet idéal est fermé car pour tout $y \in |Y_I|$, ord_y est continue comme fonction sur B_I.

Proposition 3.5.2. — *L'application $D \mapsto \mathfrak{a}_{-D}$ identifie $\mathrm{Div}^+(Y_I)$ avec les idéaux fermés non-nuls de B_I.*

Démonstration. — C'est une conséquence de ce que si $\mathfrak{a}$ est un idéal fermé de B_I alors

$$\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_J B_J\mathfrak{a} \subset \varprojlim_J B_J = B_I$$

où J parcourt les intervalles compacts de I. □

Corollaire 3.5.3. — *L'ensemble $|Y_I|$ s'identifie aux idéaux maximaux fermés de B_I.*

Remarque 3.5.4. — De la même façon, si $I \subset [0,1[$ et $0 \in I$ alors $|Y_I| \cup \{(\pi)\}$ s'identifie aux idéaux fermés de $\{x \in B_I \mid v_\pi(x) \geq 0\}$, les « fonctions holomorphes en 0 ».

Si I est un intervalle de $[0,1]$ non réduit à $\{0\}$ ou $\{1\}$ on note encore $\mathrm{Div}^+(Y_I)$ pour $\mathrm{Div}^+(Y_{I \cap]0,1[})$. La preuve du théorème 2.7.4 s'adapte aussitôt.

Théorème 3.5.5. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$ non réduit à $\{0\}$ ou $\{1\}$. Soient $f, g \in B_I$ non nuls.*

1. $\mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(g)$ *si et seulement si* $f \in B_I g$.
2. $\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g)$ *si et seulement si* $f \in B_I^\times g$.
3. *L'application diviseur induit une injection*

$$B_I \setminus \{0\}/B_I^\times \hookrightarrow \mathrm{Div}^+(Y_I)$$

telle que via la correspondance de la proposition 3.5.2, l'image corresponde aux idéaux principaux de B_I.

3.5.3. L'anneau de Robba est de Bezout. —

Proposition 3.5.6. — *Soit I un intervalle de $]0,1[$. Soient $f,g \in B_I$. Sont équivalents :*

1. *L'idéal $B_I f + B_I g$ est principal.*
2. *Le diviseur* $\inf\{\mathrm{div}(f), \mathrm{div}(g)\}$ *est principal.*

Démonstration. — Si $B_I f + B_I g = B_I h$ alors pour tout $y \in |Y_I|$, via le morphisme $B_I \to B^+_{dR,y}$

$$B^+_{dR,y} f + B^+_{dR,y} g = B^+_{dR,y} h$$

et donc $\mathrm{ord}_y(h) = \inf\{\mathrm{ord}_y(f), \mathrm{ord}_y(g)\}$. De cela on déduit que $\mathrm{div}(h) = \inf\{\mathrm{div}(f), \mathrm{div}(g)\}$.

Réciproquement, supposons que $\inf\{\mathrm{div}(f), \mathrm{div}(g)\} = \mathrm{div}(h)$. Puisque $\mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(h)$ et $\mathrm{div}(g) \geq \mathrm{div}(h)$, $f/h \in B_I$ et $g/h \in B_I$ (théo. 3.5.5). On peut donc se ramener au cas où $\mathrm{div}(f)$ et $\mathrm{div}(g)$ sont premiers entre eux. Pour tout intervalle compact $J \subset I$ il y a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow B_J \longrightarrow B_J \oplus B_J \longrightarrow B_J \longrightarrow 0$$

où la première flèche est $x \mapsto (gx, -fx)$ et la seconde $(a,b) \mapsto af + bg$. On conclut en appliquant $\varprojlim_J$ et en utilisant

$$R^1 \varprojlim_J B_J = 0$$

puisque pour $J \subset J'$, $B_{J'} \to B_J$ est d'image dense ([**31**] remarque 0.13.2.4). □

On peut maintenant redémontrer le théorème suivant de Kedlaya dans notre contexte.

Théorème 3.5.7 **(Kedlaya [42] theo.2.9.6)**. — *Pour $\rho \in]0,1[$, l'anneau $B_{]0,\rho]}$ est de Bezout. De plus, les idéaux fermés de $B_{]0,\rho]}$ sont exactement les idéaux principaux.*

Démonstration. — C'est une conséquence des propositions 3.5.6, 3.4.6 et 3.5.2. □

Corollaire 3.5.8. — *L'anneau de Robba $\mathscr{R}_F$ (def. 1.8.1) est de Bezout.*

3.5.4. Fonctions méromorphes et leurs diviseurs. —

Définition 3.5.9. — On note

$$\mathcal{M}(Y) = \varprojlim_I \mathrm{Frac}(B_I)$$

où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$.

Le résultat suivant dit que toute fonction méromorphe sur Y est le quotient de deux fonctions holomorphes. Il se déduit immédiatement de la proposition 3.4.7.

Proposition 3.5.10. — *On a*

$$\mathcal{M}(Y) = Frac(B).$$

Les résultats du théorème 2.7.4 s'étendent alors facilement aux fonctions méromorphes. Plus précisément, il y a un morphisme diviseur

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{div} : \mathcal{M}(Y)^\times & \longrightarrow & \mathrm{Div}(Y) \\ f & \longmapsto & \displaystyle\sum_{y \in |Y|} \mathrm{ord}_y(f)[y]. \end{array}$$

En posant $\mathrm{div}(0) = +\infty$ on a par exemple

$$B = \{f \in \mathcal{M}(Y) \mid \mathrm{div}(f) \geq 0\}.$$

Théorème 3.5.11. — *Le morphisme diviseur induit une injection*

$$\mathcal{M}(Y)^\times / B^\times \hookrightarrow \mathrm{Div}(Y)$$

telle que pour $f, g \in \mathcal{M}(Y)^\times$,

$$\mathrm{div}(f) \geq \mathrm{div}(g) \Longleftrightarrow f \in Bg.$$

3.6. Calcul des invariants sous Galois de $B_{\widehat{\overline{F}}}$

Théorème 3.6.1. — *On a des égalités*

$$\begin{array}{rcl} B_{\widehat{\overline{F}}}^{G_F} & = & B_F \\ \left(B_{\widehat{\overline{F}}}^{+}\right)^{G_F} & = & B_F^+. \end{array}$$

Démonstration. — Soit $f \in B_{\widehat{\overline{F}}}^{G_F}$. Fixons $\rho \in]0,1[$. Le diviseur

$$D = \sum_{z \in |Y_{\widehat{\overline{F}},]0,\rho]}|} \mathrm{ord}_z(f)\,[z] \in \mathrm{Div}^+(Y_{\widehat{\overline{F}},]0,\rho]})$$

est G_F-invariant. Il descend donc en un diviseur $D' \in \mathrm{Div}^+(Y_{F,]0,\rho]})$, $D = \beta^* D'$. D'après le lemme 3.4.6 il existe $g \in B_F^+$ tel que

$$\mathrm{div}(g) = D'.$$

On a donc en particulier $\mathrm{div}(g) \leq \mathrm{div}(f)$. D'après le théorème 2.7.4 cela entraine l'existence de $h \in B_{\widehat{\overline{F}}}$ tel que

$$f = gh.$$

Puisque f et g sont galois invariants on a en fait $h \in B_{\widehat{\overline{F}}}^{G_F}$. Remarquons maintenant que g n'a pas de zéros dans $|Y_{\widehat{\overline{F}},]0,\rho]}|$. D'après la proposition 1.9.1 cela entraine que

$$h \in B_{\widehat{\overline{F}},[0,1[}^{G_F} = B_{F,[0,1[}$$

d'après la proposition 1.6.23 qui donne une description explicite de $B_{\widehat{\overline{F}},[0,1[}$ comme sous-anneau de $\mathscr{E}_{\widehat{\overline{F}}}$. $\square$

Remarque 3.6.2. — On démontre plus généralement, et de manière différente, dans la section 11.2.4 que pour tout intervalle $I \subset [0,1]$ on a

$$B_{\widehat{\overline{F}},I}^{G_F} = B_{F,I}.$$

CHAPITRE 4

$\mathbb{Q}_p$-ESPACES VECTORIELS FORMELS ET PÉRIODES DES GROUPES p-DIVISIBLES

Introduction

Ce chapitre est à part dans ce livre au sens où nous n'utiliserons dans la suite qu'une partie de ses résultats. Le but est de faire le point sur les théorèmes de comparaison pour les groupes p-divisibles et d'introduire un point de vue géométrique sur les espaces de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$ lorsque $0 \leq d \leq h$ tel qu'envisagé dans la section 4 de [**27**]. On montre en effet que cet espace de Banach de dimension finie au sens de Colmez ([**12**]) n'est pas seulement un foncteur défini sur certaines algèbres de Banach p-adiques mais admet une structure géométrique. Plus précisément, si $F = C^\flat$ avec $C|E$ algébriquement clos et $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_E$-module formel π-divisible on montre que l'on peut donner un sens à la limite projective $X(\mathcal{G})$ du système projectif

$$\mathcal{G} \xleftarrow{\times\pi} \mathcal{G} \xleftarrow{\times\pi} \dots \xleftarrow{\times\pi} \mathcal{G} \xleftarrow{\times\pi} \dots$$

comme schéma formel et que celui-ci ne dépend que de la fibre spéciale de $\mathcal{G}$. C'est ce qu'on appelle un E-espace vectoriel de dimension finie. On donne également des formules explicites pour la « fibre générique » de ce schéma formel c'est à dire la limite projective du revêtement pro-étale de boules ouvertes

$$\mathcal{G}^{rig} \xleftarrow{\times\pi} \mathcal{G}^{rig} \xleftarrow{\times\pi} \dots \xleftarrow{\times\pi} \mathcal{G}^{rig} \xleftarrow{\times\pi} \dots$$

en montrant que l'algèbre de Hopf de Fréchet complétée de $\varinjlim_{\times\pi} \Gamma(\mathcal{G}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}^{rig}})$ ne dépend que de la fibre spéciale de $\mathcal{G}$. Lorsque cette fibre spéciale est isocline de pente d/h les C-points de cette limite projective coïncident avec $B^{\varphi^h=\pi^d}$. Ces résultats sont utilisés dans [**57**] où la limite projective précédente est appelée le revêtement universel de $\mathcal{G}$ et notée $\widetilde{\mathcal{G}}$ pour ce que l'on note $X(\mathcal{G})$. Remarquons de plus que nous n'avons pas apporté de changement à ce chapitre comparé à sa version préliminaire. Ainsi, on utilise une notion ad-hoc « d'espaces spectraux » afin de donner un sens à la limite projective précédente d'espaces rigides. Entre temps est apparue la théorie

des espaces perfectoïdes qui donne un sens beaucoup plus naturel à cette limite. Néanmoins cela n'est pas très important puisque ces espaces sont « de Stein » et sont donc complètement déterminés par l'algèbre de Fréchet de leurs sections globales et l'introduction d'un faisceau strucural n'est donc pas si importante pour les considérations qui nous intéressent.

On reprend les notations des chapitres précédents. On suppose que F est parfait non-nécessairement algébriquement clos. On suppose de plus que $E|\mathbb{Q}_p$ et que que F contient une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ i.e. la clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ dans F est algébriquement close. On note alors pour tout $h \geq 1$, $\mathbb{F}_{q^h} = F^{\mathrm{Frob}_{q^h}=Id}$ et $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q^h})$ l'extension non-ramifiée de degré h de E associée.

4.1. Les E-espaces de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$

4.1.1. Quelques calculs préliminaires. — Avant d'attaquer la structure de nos espaces de Banach commençons par récolter les fruits de nos résultats sur les polygones de Newton obtenus dans le chapitre 1. Avec les notations de la section 1.6.3, pour $x \in B$ non-nul on note $\mathcal{N}ewt(x)$ pour le polygone $\mathcal{N}ewt^0_{]0,1[}(x)$ qui est la transformée de Legendre inverse de la fonction $]0,+\infty[\ni r \mapsto v_r(x)$ (il s'agit de $\mathcal{N}ewt_{]0,1[}(x)$ auquel on a éventuellement rajouté une pente 0 à droite de son domaine de définition et qui vaut éventuellement $+\infty$ à gauche de son domaine de définition).

Proposition 4.1.1. — *On a l'égalité*

$$B^{\varphi=Id} = E.$$

Démonstration. Soit $x \in B^{\varphi=Id}$ non nul. Puisque $\mathcal{N}ewt(\varphi(x))$ est obtenu à partir de $\mathcal{N}ewt(x)$ via la transformation du plan $(x,y) \mapsto (x, q^h y)$, les pentes de $\mathcal{N}ewt(x)$ sont nulles. On en déduit que pour $t \ll 0$, $\mathcal{N}ewt(x)(t) = +\infty$. D'après la proposition 1.9.1 cela entraine que $x \in B_{[0,1[} \subset \mathscr{E}$ et donc $x \in \mathscr{E}^{\varphi=Id} = E$. □

Pour $d, h \in \mathbb{Z}$ on note dans la suite

$$B^{\varphi^h=\pi^d} = \{x \in B \mid \varphi^h(x) = \pi^d x\}.$$

Proposition 4.1.2. — *Pour $d \in \mathbb{Z}_{<0}$ et $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ on a*

$$B^{\varphi^h=\pi^d} = 0.$$

Démonstration. — Pour $x \in B$ non-nul, soit $N \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}$ tel que $\mathcal{N}ewt(x)$ prend la valeur $+\infty$ exactement sur $]-\infty, N[$. Soient $(\lambda_i)_{i \geq N}$ les pentes de $\mathcal{N}ewt(x)$ où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$. On a alors $\lim_{i \to +\infty} \lambda_i = 0$. Supposons maintenant

que $\varphi^h(x) = \pi^d x$. On en déduit tout d'abord que $N = N + d$ et donc $N = -\infty$. On en déduit ensuite que pour $i \geq N$,

$$\lambda_{i-d} = q^h \lambda_i.$$

En itérant cette relation on en déduit que si $\lambda_i > 0$ alors $\lim_{k\to+\infty} \lambda_{i-kd} = +\infty$ ce qui est impossible. On a donc pour tout i, $\lambda_i = 0$ ce qui est impossible car $\lim_{i\to-\infty} \lambda_i = +\infty$. □

Proposition 4.1.3. — *Pour $d \in \mathbb{N}$ et $h \in N_{\geq 1}$ on a*

$$B^{\varphi^h=\pi^d} = (B^+)^{\varphi^h=\pi^d}.$$

Démonstration. — Si $d = 0$ cela résulte de la proposition 4.1.1. Supposons donc $d > 0$. Soit $x \in B^{\varphi^h=\pi^d}$ non nul. Comme dans la preuve de la proposition 4.1.2 on constate que $\mathcal{N}ewt(x)$ ne prend pas la valeur $+\infty$. Notons $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ ses pentes où λ_i est la pente sur le segment $[i, i+1]$. Ses pentes satisfont l'équation fonctionnelle

$$\lambda_{i+d} = q^{-h} \lambda_i.$$

Le polygone est donc complètement déterminé par ses valeurs en les abscisses $0, \ldots, d-1$. Puisque la série $\sum_{k\geq 0} q^{-kh}$ converge on en déduit que $\mathcal{N}ewt(x)$ est borné inférieurement. D'après la proposition 1.9.2 cela implique que $x \in B_{]0,1]}$. Mais $v_0(x) = \lim_{+\infty} \mathcal{N}ewt(x)$ satisfait

$$q^h v_0(x) = v_0(x).$$

On a donc $v_0(x) = 0$ et donc $x \in B^+$ (prop. 1.10.7). □

4.1.2. Structure d'espace de Banach sur $B^{\varphi^h=\pi^d}$. — Soient $d, h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Puisque l'action de φ sur B est continue $B^{\varphi^h=\pi^d}$ est un sous-E_h-espace vectoriel fermé de B. C'est donc un sous espace de Fréchet de B.

Lemme 4.1.4. — *Pour $\rho, \rho' \in]0, 1[$ la topologie topologie induite par $|.|_\rho$ sur $B^{\varphi^h=\pi^d}$ coïncide avec celle induite par $|.|_{\rho'}$.*

Démonstration. Remarquons que pour $x \in B^{\varphi^h=\pi^d}$ on a

$$|x|_{\rho^{1/q^h}}^{q^h} = \rho^d |x|_\rho$$

(et de même pour ρ' bien sûr). Soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $\rho'^{q^{kh}} \in [\rho^{1/q^h}, \rho]$. On a alors

$$\begin{aligned} |x|_{\rho'} = \rho^{kd} |x|_{\rho'^{q^{kh}}}^{q^{-kh}} &\leq \rho^{kd} \sup\{|x|_{\rho^{1/q^h}}, |x|_\rho\}^{q^{-kh}} \\ &= \rho^{kd} \sup\left\{\rho^{dq^{-h}} |x|_\rho^{q^{-h}}, |x|_\rho\right\}^{q^{-kh}}. \end{aligned}$$

La topologie définie par $|.|_\rho$ est donc plus fine que celle définie par $|.|_{\rho'}$. Par symétrie entre ρ et ρ' on conclut. □

De cela on déduit immédiatement la proposition suivante.

Proposition 4.1.5. — *Pour $d, h \geq 1$, $B^{\varphi^h=\pi^d}$ est un E_h-espace de Banach dont la topologie est définie par n'importe quelle norme de Gauss $|.|_\rho$, $\rho \in]0,1[$.*

4.1.3. Description via l'anneau $\overline{B}$. — On rappelle (sec. 1.10.4) que l'on a défini un anneau $\overline{B}$ qui est un quotient de B^+. On a

$$\overline{B} = B^{b,+}/\{v_0 > 0\} = B^+/\{v_0 > 0\}.$$

Proposition 4.1.6. — *Pour $d, h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$, l'application $B^+ \twoheadrightarrow \overline{B}$ induit un isomorphisme*

$$(B^+)^{\varphi^h=\pi^d} \xrightarrow{\sim} \left(\overline{B}\right)^{\varphi^h=\pi^d}.$$

Démonstration. Soit $x \in B^+$. Pour tout $k \geq 0$ et tout $\rho \in]0,1]$ on a

$$\left|\pi^{-(k+1)d}\varphi^{(k+1)h}(x) - \pi^{-kd}\varphi^{kh}(x)\right|_\rho = \rho^{-kd}.\left|x - \pi^{-d}\varphi^h(x)\right|_{\rho^{1/q^{kh}}}^{q^{kh}}.$$

De plus,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|x - \pi^{-d}\varphi^h(x)\right|_{\rho^{1/q^{kh}}} = \left|x - \pi^{-d}\varphi^h(x)\right|_1.$$

De cela on déduit facilement que le morphisme $(B^+)^{\varphi^h=\pi^d} \to \left(\overline{B}\right)^{\varphi^h=\pi^d}$ possède un inverse naturel donné par

$$x \bmod \mathfrak{p} \longmapsto \lim_{k\to+\infty} \pi^{-kd}\varphi^{kh}(x).$$

□

4.1.4. Changement d'uniformisante. — Soit π' une autre uniformisante de E. Notons $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans F. Il existe $u \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)^\times$ tel que

$$u^{\varphi^h-1} = \frac{\pi'}{\pi}.$$

Le choix d'un tel u induit un isomorphisme de E_h-espaces de Banach

$$\begin{array}{ccc} B^{\varphi^h=\pi^d} & \xrightarrow{\sim} & B^{\varphi^h=\pi'^d} \\ x & \longmapsto & u^d x. \end{array}$$

On peut écrire cet isomorphisme de manière plus intrinsèque en considérant le E_h-espace vectoriel de dimension 1

$$L_{\pi,\pi'} = \{u \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q) \mid \varphi^h(u)\pi = u\pi'\}.$$

Il y a alors un isomorphisme canonique

$$B^{\varphi^h=\pi^d} \otimes_{E_h} L_{\pi,\pi'}^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} B^{\varphi^h=\pi'^d}.$$

4.1.5. Changement de corps E. — Soit $E'|E$ de degré fini et de corps résiduel $\mathbb{F}_{q'}|\mathbb{F}_q$ contenu dans F. Soient $\pi_{E'}$ et π_E des uniformisantes.

Supposons d'abord $E'|E$ non-ramifiée, $E' = E_n = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}^{\varphi_E^n=Id}$ et choisissons $\pi_{E'} = \pi_E$. On a alors $B_E = B_{E_n}$ et $\varphi_{E_n} = \varphi_E^n$ (cf. sec. 1.6.2).

Proposition 4.1.7. — *Soit $n \geq 1$ un entier. Le morphisme naturel*

$$\left(B_E\right)^{\varphi_E^h=\pi_E^d} \otimes_{E_h} E_{nh} \longrightarrow \left(B_{E_n}\right)^{\varphi_{E_n}^h=\pi_E^{nd}}$$

est un isomorphisme.

Démonstration. Le E_{nh}-espace vectoriel $\left(B_{E_n}\right)^{\varphi_{E_n}^h=\pi_E^{nd}}$ est muni d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(E_{nh}|E_h)$ via l'action de $(\pi_E^{-d}\varphi_E^h)^{\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}}$. La proposition résulte alors du théorème de Hilbert 90. □

Supposons maintenant $E'|E$ quelconque. Soit $f_{E'/E}$ le degré résiduel. L'élément $\pi_{E'}^{[E':E]}/\pi_E^{f_{E'/E}}$ étant une unité de $\mathcal{O}_{E'}$, il existe $u \in W_{\mathcal{O}_{E'}}(\overline{\mathbb{F}}_q)^\times$ tel que

$$u^{\varphi_{E'}^h-1} = \frac{\pi_{E'}^{[E':E]}}{\pi_E^{f_{E'/E}}}.$$

Considérons l'application

$$\begin{array}{ccc} (B_E)^{\varphi_E^h=\pi_E^d} & \longrightarrow & (B_{E'})^{\varphi_{E'}^h} = \pi_{E'}^{[E':E]d} \\ x & \longmapsto & u^d x. \end{array}$$

Proposition 4.1.8. — *L'application précédente induit un isomorphisme*

$$(B_E)^{\varphi_E^h=\pi_E^d} \otimes_{E_h} E'_h \xrightarrow{\sim} (B_{E'})^{\varphi_{E'}^h=\pi_{E'}^{[E':E]d}}.$$

Démonstration. Utilisant la proposition 4.1.7 précédente on se ramène au cas où $E'|E$ est totalement ramifiée. On a alors $B_{E'} = B_E \otimes_E E'$, identification via laquelle $\varphi_{E'} = \varphi_E \otimes Id$. Le résultat est alors aisé à démontrer. □

4.2. L'espace de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$ vit dans les bivecteurs lorsque $d \leq h$

Proposition 4.2.1. — *Supposons $1 \leq d \leq h$.*

1. *L'inclusion naturelle $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \subset B_E^+$ induit une égalité*

$$BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^{\varphi_E^h=\pi_E^d} = \left(B_E^+\right)^{\varphi_E^h=\pi_E^d}.$$

2. Il y a une bijection

$$\begin{aligned} \mathscr{L}_{d,h} : \mathfrak{m}_F^d &\xrightarrow{\sim} \left(B_E^+\right)^{\varphi_E^h = \pi_E^d} \\ (x_0, \dots, x_{d-1}) &\longrightarrow \sum_{i=0}^{d} \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[x_i^{q^{-nh}}\right] \pi_E^{nd+i}. \end{aligned}$$

Démonstration. Le point (1) entraîne clairement le point (2). Utilisant la proposition 4.1.6 on est ramené à montrer que pour tout $x \in B^{b,+}$ dont l'image dans $\overline{B}$ est dans $\left(\overline{B}\right)^{\varphi^h = \pi^d}$, il existe $x' \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h = \pi^d}$ tel que $v_0(x - x') > 0$.

Soit donc $x \in B^{b,+}$ dont l'image dans $\overline{B}$ est dans $\left(\overline{B}\right)^{\varphi^h = \pi^d}$. Considérons l'opérateur

$$T = \pi^{-d} \varphi^h : B^{b,+} \longrightarrow B^{b,+}.$$

Soit $y = T(x) - x$, qui vérifie donc $v_0(y) > 0$. On a alors pour tout entier $k \geq 1$,

$$T^k(x) = x + y + T(y) + \cdots + T^{k-1}(y).$$

Notons

$$y = \sum_{i \geq N} [y_i] \pi^i = \sum_{i \geq N} V_\pi^i \left[y_i^{q^i}\right].$$

pour un $N \in \mathbb{Z}$. On a alors

$$T^k(y) = \sum_{i \geq N - kd} V_\pi^i \left[y_{i+kd}^{q^{i+kh}}\right].$$

On voit désormais les $(T^k(y))_{k \geq 0}$ comme des éléments de $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Regardons d'abord le cas $d < h$ qui est plus simple. Soit $s > 0$ et $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$. Puisque $d < h$ et $v_0(y) > 0$, il existe un entier $k(s)$ tel que pour $k \geq k(s)$ on ait

$$T^k(y) \in \ker\left(BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)\right).$$

On peut alors définir

$$z = \Big(\sum_{0 \leq k \leq k(s)} T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) \Big)_{s>0} \in \varprojlim_{s>0} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) = BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F).$$

Considérons alors $x + z \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On a $V_\pi^{-d} F^{h-d}(x+z) = (x+z)$, puisque cette égalité est vérifiée dans $BW(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)$ pour tout $s > 0$. On a donc, si l'on considère $x+z$ comme un élément de B^+, $\varphi^h(x+z) = \pi^d(x+z)$. Pour conclure il faut donc voir que $v_0(z) > 0$. Mais on peut toujours écrire y sous la forme $y = [a]y'$ avec $v_0(y') > 0$ et $v(a) > 0$. On voit alors facilement que $z = [a]z'$ pour un élément $z' \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ défini par un procédé limite comme précédemment pour z :

$$z' = \Big(\sum_{0 \leq k \leq k'(s)} \left[a^{q^{kh}-1}\right] T^k(y') \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) \Big)_{s>0} \in \varprojlim_{s>0} BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s).$$

Regardons maintenant le cas $d = h$. Pour tout $s > 0$, d'après la proposition 1.1 du chapitre II de [**24**] (tout du moins lorsque $E = \mathbb{Q}_p$, la preuve étant identique pour E quelconque), on peut donner un sens à la somme

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s)) \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s).$$

Plus précisément, soit $T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_\pi^i[y_{i,k}]$ avec $y_{i,k} \in \mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s$ et

$$\sum_{k=0}^{l}\sum_{i\in\mathbb{Z}} V_\pi^i[y_{i,k}] = \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_\pi^i[z_{i,l}].$$

D'après la proposition 1.1 du chapitre II de [**24**], utilisant toujours que $v_0(y) > 0$, pour tout i il existe $l(i) \in \mathbb{N}$ tel que la suite $(z_{i,l})_{l\geq l(i)}$ soit constante. On pose alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty}(T^k(y) \bmod BW_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{a}_s)) := \sum_{i\in\mathbb{Z}} V_\pi^i[z_{i,l(i)}].$$

Notant $z_s \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)$ cet élément, on vérifie comme précédemment que si $z = (z_s)_{s>0} \in BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$, $v_0(z) > 0$ et $\varphi^h(x+z) = \pi^d(x+z)$. □

La bijection $\mathcal{L}_{d,h}$ précédente induit une structure d'espace de Banach sur $\mathfrak{m}_F^d$. Dans les sections qui suivent on va interpréter géométriquement cette structure d'espace de Banach.

Remarque 4.2.2. — Soient $h \geq 1$ et $d \geq 0$ des entiers. Dans ce chapitre nous étudions entre autres le E_h-espace vectoriel $(B_E^+)^{\varphi_E^h=\pi_E^d}$. Bien sûr, posant $\pi_{E_h} = \pi_E$, cet espace vectoriel coïncide avec $(B_{E_h}^+)^{\varphi_{E_h}=\pi_{E_h}^d}$ et on pourrait donc se ramener, quitte à remplacer E par E_h, à supposer que $h = 1$. Néanmoins, lorsque $d \leq h$, on va voir que $(B_E^+)^{\varphi_E^h=\pi_E^d}$ admet une interprétation géométrique en termes de $\mathcal{O}_E$-modules π-divisibles et que de plus, comme on vient de le voir, il est contenu dans les bivecteurs $BW_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Cela n'est pas le cas de $(B_{E_h}^+)^{\varphi_{E_h}=\pi_{E_h}^d}$ qui n'admet pas d'interprétation en termes de $\mathcal{O}_{E_h}$-modules π-divisibles et n'est pas contenu dans $BW_{\mathcal{O}_{E_h}}(\mathcal{O}_F)$ lorsque $d > 1$. C'est pourquoi nous traitons le cas général de $(B_E^+)^{\varphi_E^h=\pi_E^d}$ sans forcément se ramener à $h = 1$.

4.3. $\mathcal{O}$-modules π-divisibles

4.3.1. Généralités et théorie de Dieudonné. — Si S est un $\mathcal{O}_E$-schéma sur lequel π est nilpotent, resp. un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$-schéma formel, un $\mathcal{O}$-module π-divisible est un groupe p-divisible H sur S, muni d'une action de $\mathcal{O}_E$ telle que l'action induite sur le $\mathcal{O}_S$-module $\mathrm{Lie}\, H$ soit l'action déduite du morphisme structural $S \to \mathrm{Spec}(\mathcal{O}_E)$,

resp. $S \to \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$. La hauteur d'un $\mathcal{O}$-module π-divisible est un multiple de $[E : \mathbb{Q}_p]$. On appelle alors $\mathcal{O}$-hauteur la quantité

$$\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}(H) = \frac{\mathrm{ht}(H)}{[E : \mathbb{Q}_p]}.$$

Si k est un corps parfait extension de $\mathbb{F}_q$ et H un $\mathcal{O}$-module π-divisible sur k, le module de Dieudonné contravariant du groupe p-divisible H, $\mathbb{D}(H)$, est un $W(k)$-module muni d'une action de $\mathcal{O}_E$ commutant à l'action du Frobenius et du Verschiebung F et V. On a une décomposition

$$\mathbb{D}(H) = \bigoplus_{\tau : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k} \mathbb{D}(H)_\tau$$

où $\mathcal{O}_{E_0} = W(\mathbb{F}_q)$ agit sur $\mathbb{D}(H)_\tau$ via le plongement $W(\tau) : \mathcal{O}_{E_0} \hookrightarrow W(k)$. Si σ désigne le Frobenius de $W(k)$, F est σ-linéaire et V est σ^{-1}-linéaire. On a de plus

$$F : \mathbb{D}(H)_\tau \to \mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} \quad \text{et} \quad V : \mathbb{D}(H)_\tau \to \mathbb{D}(H)_{\sigma^{-1}\tau}.$$

Puisque k est une extension de $\mathbb{F}_q$ il y a un plongement canonique $can : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k$. On pose alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) = \mathbb{D}(H)_{can}.$$

Puisque $W_{\mathcal{O}_E}(k) = W(k) \otimes_{\mathcal{O}_{E_0}} \mathcal{O}_E$, c'est un $W_{\mathcal{O}_E}(k)$-module libre de rang $\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}(H)$. Notons σ_E le Frobenius relatif de $W_{\mathcal{O}_E}(k)$, c'est à dire $\sigma^f \otimes Id$ où $q = p^f$. On note F_E, l'endomorphisme de $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ égal à F^f. Avec les notations précédentes, F_E est σ_E^{-1}-linéaire. Puisque l'action induite par $\mathcal{O}_E$ sur $\mathrm{Lie}\, H$ est l'action déduite du plongement canonique,

$$\begin{aligned} \omega_H = V\mathbb{D}(H)/p\mathbb{D}(H) &= \bigoplus_{\tau : \mathbb{F}_q \hookrightarrow k} V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau}/p\mathbb{D}(H)_\tau \\ &= V\mathbb{D}(H)_{\sigma can}/p\mathbb{D}(H)_{can}. \end{aligned}$$

On a donc si $\tau \neq can$, $V\mathbb{D}(H)_{\sigma\tau} = p\mathbb{D}(H)_\tau$ et $p\mathbb{D}(H)_{can} \subset \pi V\mathbb{D}(H)_{\sigma can}$. Cela implique que $\pi\mathbb{D}(H) \subset F_E\mathbb{D}(H)$. On pose alors $V_\pi = \pi F_E^{-1}$. On a donc

$$F_E V_\pi = V_\pi F_E = \pi.$$

On note désormais F pour F_E agissant sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$. La correspondance $H \mapsto (\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), F, V_\pi)$ induit alors une équivalence de catégories entre les $\mathcal{O}$-modules π-divisibles sur k et les triplets (D, F, V_π) où D est un $W_{\mathcal{O}_E}(k)$-module libre de rang fini, $F : D \to D$ est σ_E-linéaire, $V : D \to D$ est σ_E^{-1}-linéaire et $FV_\pi = V_\pi F = \pi$.

La théorie de Dieudonné covariante des $\mathcal{O}$-module π-divisibles est bien développée. Plus précisément, la théorie de Cartier des $\mathcal{O}$-modules formels π-divisibles est développée dans [**15**], [**35**], [**38**], [**37**] et le chapitre V.29 de [**36**]. Le point de vue cristallin de l'extension vectorielle universelle est développé dans [**16**] et l'appendice B de [**18**]. Nous utiliserons dans la suite la version contravariante suivante généralisant

la théorie développée dans [**24**]. Si H est un $\mathcal{O}$-module π-divisible sur k on peut montrer que le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné précédent $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ s'identifie à

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(H, CW_{\mathcal{O}}).$$

De plus, $F : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H) \to \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$ est induit par le morphisme $F : H \to H^{(q)}$ qui est la puissance f-ième du morphisme de Frobenius du groupe p-divisible H. Il y a une isogénie $V_\pi : H^{(q)} \to H$ induisant V_π sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H)$. Le $\mathcal{O}$-module π-divisible H se retrouve alors via la formule

$$H = \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}_E}(k)[F,V_\pi]}\big(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(H), CW_{\mathcal{O}}\big).$$

Lorsque H est formel on peut de plus remplacer $CW_{\mathcal{O}}$ par les covecteurs de Witt formels, $\widehat{CW}_{\mathcal{O}}$.

4.3.2. Exemple. — Nous utiliserons dans la suite l'exemple qui suit. Soient $d, h \geq 1$ avec $d \leq h$. Soit

$$\mathcal{G}_{d,h} = \ker\big(CW_{\mathcal{O}} \xrightarrow{F^{h-d} - V_\pi^d} CW_{\mathcal{O}}\big).$$

C'est un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible de dimension d et de $\mathcal{O}$-hauteur h sur $\mathbb{F}_q$. Un système de coordonnées formelles est donné par $(x_0, \ldots, x_{d-1})$ avec

$$\mathcal{G}_{d,h} = \big\{\big[x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}\big]_{i\leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}\big\}$$

où $-i = a(i)d + b(i)$ est la division euclidienne de $-i$ par d. Si $e \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{d,h}, CW_{\mathcal{O}})$ désigne le plongement canonique alors

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{d,h}) =< e, Fe, \ldots, F^{h-d}e, V_\pi e, \ldots, V_\pi^{d-1}e >= \mathrm{Hom}(\mathcal{G}_{d,h}, CW_{\mathcal{O}})$$

qui forme une base du $\mathcal{O}$-module de Dieudonné. Au système de coordonnées formelles précédent $(x_0, \ldots, x_{d-1})$ est associé une loi de groupe formel sur $\mathbb{F}_q$,

$$\mathfrak{F}_{d,h} = \big(\mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)}\big) \in \mathbb{F}_q[\![x_0, \ldots, x_{d-1}, y_0, \ldots, y_{d-1}]\!]^d$$

où

$$(x_0, \ldots, x_{d-1}) \underset{\mathfrak{F}_{d,h}}{+} (y_0, \ldots, y_{d-1}) = \big(\mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}, \ldots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)}\big)$$

et avec les notations précédentes

$$\big[x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}\big]_{i\leq 0} + \big[y_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}\big]_{i\leq 0} = \big[\ldots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(d-1)}, \ldots, \mathfrak{F}_{d,h}^{(0)}\big]$$

dans $CW_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q[\![x_0, \ldots, x_{d-1}, y_0, \ldots, y_{d-1}]\!])$.

Du point de vue de la théorie de Cartier covariante, le module de Cartier covariant de $\mathcal{G}_{d,h}$ est

$$M = \mathrm{Hom}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, \mathcal{G}_{d,h})$$

qui est un module sur l'anneau de Cartier $\mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q} = \mathrm{End}(\widehat{W}_{\mathcal{O}})^{opp}$. L'anneau de Cartier $\mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q}$ est le V-complété de $W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q)[F_\pi, V]$, c'est à dire

$$\Big\{ \sum_{n,m\geq 0} V^n[a_{n,m}]F_\pi^m \mid a_{n,m} \in \mathbb{F}_q \text{ et } \forall n,\ a_{n,m} = 0 \text{ pour presque tout } m \Big\}$$

où

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{O}_E = W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q) & \hookrightarrow & \mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q} \\ \displaystyle\sum_{n\geq 0} V_\pi^n[a_n] & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} V^n[a_n]F_\pi^n, \end{array}$$

l'action de $V \in \mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q} = \mathrm{End}(\widehat{W}_{\mathcal{O}})^{\mathrm{opp}}$ sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$ est donnée par l'opérateur F usuel agissant sur $\widehat{W}_{\mathcal{O}}$, celle de $[a]$ est la multiplication par $[a]$ et celle de $F_\pi \in \mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q}$ est donnée par l'action de V_π. Soit

$$\begin{array}{rcl} \epsilon : \widehat{W}_{\mathcal{O}} & \longrightarrow & CW_{\mathcal{O}} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\geq 0} V_\pi^{-nd} F^{n(h-d)} x \bmod W_{\mathcal{O}} \end{array}$$

où la somme infinie précédente est à valeurs dans les bivecteurs $BW_{\mathcal{O}}$ et on la réduit modulo W_O, $BW_{\mathcal{O}}/W_{\mathcal{O}} = CW_{\mathcal{O}}$. On a $\epsilon \in M$ et comme $W_{\mathcal{O}}(\mathbb{F}_q)$-module

$$M =< \epsilon, V\epsilon, \ldots, V^{h-d}\epsilon, F_\pi\epsilon, \ldots, F_\pi^{d-1}\epsilon > .$$

qui forme une base du module de Cartier comme $\mathcal{O}_E = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_q)$-module. Une V-base de ce module de Cartier est donnée par $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{d-1})$ où pour $0 \leq i \leq d-1$, $\epsilon_i = F_\pi^i \epsilon$. Les équations structurelles de M associées à cette V-base sont

$$\begin{cases} F_\pi \epsilon_i = \epsilon_{i+1} \text{ si } 0 \leq i < d-1 \\ F_\pi \epsilon_{d-1} = V^{h-d}\epsilon_0. \end{cases}$$

Elles fournissent une présentation du module de Cartier

$$0 \longrightarrow \mathbb{E}^d_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q} \xrightarrow{u} \mathbb{E}^d_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q} \longrightarrow M \longrightarrow 0$$

où

$$u(x_0, \ldots, x_{d-1}) = (x_{d-1}F_\pi - x_0V^{h-d}, x_0F_\pi - x_1, \ldots, x_{d-2}F_\pi - x_{d-1}).$$

L'application

$$\begin{array}{rcl} M = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\widehat{W}_{\mathcal{O}}, \mathcal{G}_{d,h}) & \longrightarrow & \mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[\![T]\!]) \\ u & \longmapsto & u([T]) \end{array}$$

induit un isomorphisme entre M et le sous-$\mathcal{O}_E$-module de $\mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[\![T]\!])$ formé des courbes π-typiques. Puisque $(\epsilon_0, \ldots, \epsilon_{d-1})$ est une V_π-base de M,

$$\gamma = \sum_{i=0}^{d-1} \epsilon_i([x_i]) \in \mathcal{G}_{d,h}(\mathbb{F}_q[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!])$$

définit un isomorphisme

$$\gamma : \mathrm{Spf}(\mathbb{F}_q[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}.$$

On vérifie par un calcul immédiat que ces coordonnées formelles sont celles utilisées précédemment pour définir la loi de groupe formel $\mathfrak{F}_{d,h}$.

Soit maintenant $\widetilde{M}$ le module de Cartier sur $\mathcal{O}_E$ de V_π-base $(\tilde{\epsilon}_0, \ldots, \tilde{\epsilon}_{d-1})$ et ayant pour équations structurelles

$$\begin{cases} F_\pi \tilde{\epsilon}_i = \tilde{\epsilon}_{i+1} \text{ si } 0 \leq i < d-1 \\ F_\pi \tilde{\epsilon}_{d-1} = V^{h-d} \tilde{\epsilon}_0. \end{cases}$$

Il admet la même présentation que la présentation précédente de M en remplaçant $\mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathbb{F}_q}$ par $\mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathcal{O}_E}$. Soit $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ le $\mathcal{O}$-module π-divisible sur $\mathcal{O}_E$ associé,

$$\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} = \widehat{W}_{\mathcal{O}} \otimes_{\mathbb{E}_{\mathcal{O},\mathcal{O}_E}} \widetilde{M}.$$

On a donc $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \otimes \mathbb{F}_q = \mathcal{G}_{g,d}$ et une résolution sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$

$$0 \longrightarrow \widehat{W}_{\mathcal{O}}^d \xrightarrow{v} \widehat{W}_{\mathcal{O}}^d \longrightarrow \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \longrightarrow 0$$

où

$$v(y_0, \ldots, y_{d-1}) = (V_\pi y_{d-1} - F^{h-d} y_0, V_\pi y_0 - y_1, \ldots, V_\pi y_{d-2} - y_{d-1}).$$

Pour $i \in \{0, \ldots, d-1\}$

$$\tilde{\epsilon}_i([T]) \in \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}(\mathcal{O}_E[\![T]\!])$$

est une courbe π-typique. Notons

$$\begin{array}{rcl} \alpha_i : \mathcal{O}_E[\![T]\!] & \longrightarrow & \mathcal{O}_E[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!] \\ T & \longmapsto & x_i. \end{array}$$

Alors, si

$$\tilde{\gamma} = \sum_{i=0}^{d-1} \alpha_{i*} \tilde{\epsilon}_i([T]) = \sum_{i=0}^{d-1} \tilde{\epsilon}_i([x_i]) \in \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}(\mathcal{O}_E[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!]),$$

puisque $(\tilde{\epsilon}_i)_{0 \leq i \leq d-1}$ est une V-base du module de Cartier de $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$, il induit un isomorphisme

$$\tilde{\gamma} : \mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!]) \xrightarrow{\sim} \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$$

c'est à dire un système de coordonnées formelles sur le groupe formel $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ et donc une loi de groupe formel en d variables. Ce système de coordonnées formelles de $\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ relève celui utilisé précédemment pour $\mathcal{G}_{d,h}$.

Il existe alors un unique isomorphisme de $\mathcal{O}$-modules formels sur E

$$\log : \widetilde{\mathcal{G}}_{d,h} \hat{\otimes} E \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_a^d$$

tel que l'isomorphisme induit au niveau des espaces tangents envoie la base de $\mathrm{Lie}\,\widetilde{\mathcal{G}}_{d,h}$ déduite de la V-base $(\tilde{\epsilon}_i)_{0\leq i\leq d-1}$ sur la base canonique de $\mathrm{Lie}\,\widehat{\mathbb{G}}_a^d = E^d$. Un tel isomorphisme est donné par des séries formelles

$$f = (f_0, \ldots, f_{d-1}) \in E[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!]^d$$

où $(f_0, \ldots, f_{d-1})$ forme une base des logarithmes de notre loi de groupe formel que nous allons calculer explicitement. Pour $0 \leq i \leq d-1$ soit

$$g_i = (g_{i,0}, \ldots, g_{i,d-1}) = \log \tilde{\epsilon}_i([T]) \in \widehat{\mathbb{G}}_a^d(E[\![T]\!]) = E[\![T]\!]^d.$$

Alors,

$$f = \sum_{i=0}^{d-1} g_i(x_i).$$

De plus, pour $0 \leq i, j \leq d-1$, $g_{i,j}$ est une courbe π-typiqe de $\widehat{\mathbb{G}}_a$ vérifiant :

1. $F.g_{i,j} = g_{i+1,j}$ si $0 \leq i < d-1$
2. $F.g_{d-1,j} = V_\pi^{h-d}.g_{0,j}$
3. $g_{i,j}(T) \equiv 0 \bmod T^2$ si $i \neq j$ et $g_{i,i}(T) \equiv T \bmod T^2$.

Les courbes π-typiques de $\widehat{\mathbb{G}}_a(E[\![T]\!]) = TE[\![T]\!]$ sont les séries de la forme

$$\sum_{n\geq 0} a_n T^{q^n}$$

dans $E[\![T]\!]$. L'opérateur V agit sur ces séries via $g(T) \mapsto g(T^q)$ et F_π via

$$\sum_{n\geq 0} a_n T^{q^n} \longmapsto \pi \sum_{n\geq 0} a_{n+1} T^{q^n}.$$

On vérifie par un calcul explicite que les conditions (1), (2) et (3) imposent les formules

$$g_{i,j} = \begin{cases} \displaystyle\sum_{n\geq 0} \frac{T^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} & \text{si } j \geq i \\ \displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{T^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} & \text{si } j < i. \end{cases}$$

On en déduit la proposition suivante.

Proposition 4.3.1. — *Considérons pour $0 \leq j \leq d-1$ la série*

$$f_j = \sum_{0\leq i\leq j} \sum_{n\geq 0} \frac{x_i^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} + \sum_{j<i\leq d-1} \sum_{n\geq 1} \frac{x_i^{q^{nh+j-i}}}{\pi^{nd+j-i}} \in E[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!].$$

Alors, $(f_0, \ldots, f_{d-1})$ sont les logarithmes d'une unique loi de $\mathcal{O}$-module formel de dimension d sur $\mathcal{O}_E$, $\widetilde{\mathfrak{F}}_{d,h}$, relevant la loi de $\mathcal{O}$-module formel $\mathfrak{F}_{d,h}$ sur $\mathbb{F}_q$.

Exemple 4.3.2. — Si $d = 1$, $\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ est un groupe de Lubin-Tate associé à l'extension non-ramifiée E_h de E. Une loi de groupe formel associée à pour logarithme

$$f(T) = \sum_{n \geq 0} \frac{T^{q^{nh}}}{\pi^n}.$$

Cette loi de groupe formel est $\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,h} = f^{-1}(f(X) + f(Y)) \in \mathcal{O}_E[\![X, Y]\!]$.

4.3.3. Quasi-logarithmes et leur interprétation rigide analytique. — Soit $K|E$ un corps valué complet pour une valuation de rang un étendant la valuation π-adique de E. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_K$.

Écrivons $\mathcal{G} = \mathrm{Spf}(R)$ où $R \simeq \mathcal{O}_K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$ avec $d = \dim(\mathcal{G})$. Soit $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_K$ un idéal contenant $\pi\mathcal{O}_K$. Soit $\widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]}$ le complété de l'anneau $R\left[\frac{1}{\pi}\right]$ relativement à son idéal d'augmentation noyau du morphisme $R\left[\frac{1}{\pi}\right] \twoheadrightarrow K$,

$$\widehat{R\left[\tfrac{1}{\pi}\right]} \simeq K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$$

et $\mathcal{G}\hat{\otimes}K = \mathrm{Spf}\big(\widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]}\big)$ est le groupe formel fibre générique de $\mathcal{G}$.

Définition 4.3.3. — On note $\mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})$ les éléments f dans l'idéal maximal de $\widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]}$ tels que $\Delta(f) - f \otimes 1 - 1 \otimes f \in R\left[\frac{1}{\pi}\right]$ et pour tout $a \in \mathcal{O}_E$, si $[a]_{\mathcal{G}} \in \mathrm{End}(R)$ désigne l'action de a sur le $\mathcal{O}$-module $\mathcal{G}$, $f \circ [a]_{\mathcal{G}} - af \in R\left[\frac{1}{\pi}\right]$.

Le groupe des quasi-logarithmes contient l'idéal d'augmentation de $R\left[\frac{1}{\pi}\right]$. On note

$$\mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})/\sim$$

le groupe quotient des classes d'équivalences de quasi-logarithmes. Le lemme qui suit dit que la définition précédente des quasi-logarithmes coïncide avec celle que l'on trouve dans le chapitre IV de [**24**] et dans le chapitre V de [**41**] (définition qui est donc trop forte).

Lemme 4.3.4. — *Fixons des coordonnées $R \simeq \mathcal{O}_K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$. Soit $f \in K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$ un quasi-logarithme. Alors pour $1 \leq i \leq d$, $\frac{\partial f}{\partial x_i} \in \mathcal{O}_K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]\left[\frac{1}{\pi}\right]$.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G}\hat{\otimes}K \simeq \mathrm{Spf}(K[\![x_1, \ldots, x_d]\!])$ le groupe formel fibre générique du groupe formel $\mathcal{G}$. Voyons f comme un morphisme de schémas formels $f : \mathcal{G}\hat{\otimes}K \to \widehat{\mathbb{G}}_a$ envoyant la section unité de $\mathcal{G}\hat{\otimes}K$ sur celle de $\widehat{\mathbb{G}}_a$. Soit $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K/K}$, resp. $\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}$, les formes différentielles sur $\mathcal{G}\hat{\otimes}K$, resp. $\mathcal{G}$. Le lemme équivaut alors à ce que la forme différentielle $f^*dT \in \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K/K}$ vérifie

$$f^*dT \in \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}\left[\tfrac{1}{\pi}\right].$$

Soit $(\omega_1, \ldots, \omega_d)$ une base des formes différentielles invariantes sur $\mathcal{G}$. On a alors

$$\widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K} = R\omega_1 \oplus \cdots \oplus R\omega_d \subset \widehat{R\left[\tfrac{1}{\pi}\right]}\omega_1 \oplus \cdots \oplus \widehat{R\left[\tfrac{1}{\pi}\right]}\omega_d = \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K/K}.$$

Considérons le morphisme de K-schémas formels

$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{G}\hat{\otimes}K \underset{\mathrm{Spf}(K)}{\times} \mathcal{G}\hat{\otimes}K & \longrightarrow & \widehat{\mathbb{G}}_a \\ (x,y) & \longmapsto & f(x+y)-f(x)-f(y). \end{array}$$

Notons

$$m : \mathcal{G}\hat{\otimes}K \underset{\mathrm{Spf}(K)}{\times} \mathcal{G}\hat{\otimes}K \to \mathcal{G}\hat{\otimes}K$$

la loi de groupe et pour $i = 1, 2$,

$$pr_i : \mathcal{G}\hat{\otimes}K \underset{\mathrm{Spf}(K)}{\times} \mathcal{G}\hat{\otimes}K \to \mathcal{G}\hat{\otimes}K$$

les deux projections. On a donc

$$g = f \circ m - f \circ pr_1 - f \circ pr_2.$$

L'invariance des formes ω_i, $i = 1, \ldots, d$, se traduit en l'égalité

$$m^*\omega_i = pr_1^*\omega_i + pr_2^*\omega_i.$$

Si

$$f^*dT = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i \omega_i$$

avec $\lambda_i \in \widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]}$ on a donc

$$\begin{array}{rcl} g^*dT & = & \displaystyle\sum_i \left[(\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_1)\, pr_1^*\omega_i + (\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_2)\, pr_2^*\omega_i\right] \\ & \in & \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K \times \mathcal{G}\hat{\otimes}K/K} = pr_1^*\widehat{\Omega}_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K/K} \oplus pr_2^*\widehat{\Omega}_{\mathcal{G}\hat{\otimes}K/K}. \end{array}$$

Mais puisque $g \in (R\hat{\otimes}R)\left[\frac{1}{\pi}\right]$,

$$g^*dT \in \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}\times\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}\left[\tfrac{1}{\pi}\right] = \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \otimes_K R\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \oplus R\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \otimes_K \widehat{\Omega}^1_{\mathcal{G}/\mathcal{O}_K}\left[\tfrac{1}{\pi}\right].$$

On en déduit que pour tout i, $\lambda_i \circ m - \lambda_i \circ pr_1 \in (R\hat{\otimes}R)\left[\frac{1}{\pi}\right]$ i.e. la « fonction » $(x,y) \mapsto \lambda_i(x+y) - \lambda_i(x)$ est dans $(R\hat{\otimes}R)\left[\frac{1}{\pi}\right]$. Spécialisant en $x = 0$ on en déduit que pour tout i, $\lambda_i \in R\left[\frac{1}{\pi}\right]$. □

Soit $\mathcal{G}\hat{\otimes}K$ la fibre générique du groupe formel $\mathcal{G}$ comme K-groupe formel. Il y a un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}\hat{\otimes}K, \widehat{\mathbb{G}}_a) & \xrightarrow{\sim} & (\mathrm{Lie}\,\mathcal{G}\left[\frac{1}{\pi}\right])^* = \omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{\pi}\right] \\ f & \longmapsto & f^*dT. \end{array}$$

Le K-espace vectoriel $\omega_{\mathcal{G}}\left[\frac{1}{\pi}\right]$ se plonge donc dans $\mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})/\sim$. Ce sous-espace vectoriel de l'espace des classes d'équivalence de quasi-logarithme est l'espace des logarithmes, c'est à dire les $f \in \widehat{R\left[\frac{1}{\pi}\right]}$ tels que $\Delta(f) = f \otimes 1 + 1 \otimes f$. La filtration déduite sur les quasi-logarithmes est la filtration de Hodge.

Prenons maintenant un point de vue rigide analytique. On note G la fibre générique de $\mathcal{G}$ comme K-groupe rigide analytique. En tant qu'espace rigide analytique, G est isomorphe à une boule ouverte de dimension $\dim \mathcal{G}$.

Définition 4.3.5. — On note $\mathrm{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{rig})$ les morphisme $f : G \to \mathbf{G}_a^{rig}$ d'espaces analytiques rigides vérifiant $f(0) = 0$,

$$\|f(x+y) - f(x) - f(y)\|_\infty < +\infty$$

où $f(x+y) - f(x) - f(y) : G \times G \to \mathbf{G}_a^{rig}$ et pour tout $a \in \mathcal{O}_E$,

$$\|f(ax) - af(x)\|_\infty < +\infty.$$

On note $\mathrm{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{rig})/\sim$ le quotient par le sous-groupe formé des $f : G \to \mathbf{G}_a^{rig}$ tels que $\|f\|_\infty < +\infty$.

Le groupe formel $\mathcal{G}\hat{\otimes}K$ se retrouve à partir du groupe analytique rigide G comme étant $\mathrm{Spf}(\widehat{\mathcal{O}}_{G,0})$ où $\mathcal{O}_{G,0}$ désigne l'anneau local des germes de fonctions anaytiques rigides au voisinage de l'élément neutre de G. Tout morphisme d'espaces rigides $f : G \to \mathbf{G}_a^{rig}$ tel que $f(0) = 0$ définit donc naturellement un morphisme de schémas formels $\mathcal{G}\hat{\otimes}K \to \widehat{\mathbb{G}}_a$. On vérifie en utilisant le lemme 4.3.4 que l'application naturelle

$$\mathrm{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{rig}) \longrightarrow \mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})$$

est un isomorphisme.

Soit I un idéal de définition de R, via un isomorphisme $R \simeq \mathcal{O}_K[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$ on peut prendre $I = (\pi, x_1, \ldots, x_n)$ (on considère le groupe formel $\mathcal{G}$ comme un groupe formel sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$ et non $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$, auquel cas on aurait pris $I = (x_1, \ldots, x_n)$). On a alors

$$CW_{\mathcal{O}}(R) = \varprojlim_{n \geq 0} CW_{\mathcal{O}}(R/I^n)$$

et donc

$$CW_{\mathcal{O}}(R) = \big\{[y_i]_{i \leq 0} \mid y_i \in R,\ \exists N, \exists k,\ (\sum_{i \leq N} R.y_i)^k \subset I\big\}.$$

Il y a un morphisme $\mathcal{O}_E$-linéaire ([**24**], II.5 lorsque $E = \mathbb{Q}_p$)

$$\begin{array}{rcl} w : CW_{\mathcal{O}}(R) & \longrightarrow & \widehat{R\big[\frac{1}{\pi}\big]} \\ [y_n]_{n \leq 0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n \geq 0} \pi^{-n} y_{-n}^{q^n}. \end{array}$$

Soit maintenant $\mathfrak{a}$ un idéal de $\mathcal{O}_K$ contenu dans son idéal maximal et tel que $\pi \in \mathfrak{a}$. Notons $\mathcal{G}_{\mathfrak{a}} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$ d'algèbre $R_{\mathfrak{a}} = R/\mathfrak{a}R$. On a alors

$$\begin{array}{rl} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}, CW_{\mathcal{O}}) \\ = & \big\{[y_n]_{n \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}}) \mid [\Delta(y_n)]_{n \leq 0} = [y_n \otimes 1]_{n \leq 0} + [1 \otimes y_n]_{n \leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}}\hat{\otimes}R_{\mathfrak{a}})\big\} \end{array}$$

où $\Delta : R \to R\hat{\otimes}R$ désigne la comultiplication de notre groupe formel. D'après [**24**] chap. IV, il y a une application $\mathcal{O}_E$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{\mathfrak{a}}, CW_{\mathcal{O}}) & \longrightarrow & \mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})/\sim \\ x & \longmapsto & w(\hat{x}) \end{array}$$

où $\hat{x} \in CW_{\mathcal{O}}(R)$ est un relèvement quelconque de $x \in CW_{\mathcal{O}}(R_{\mathfrak{a}})$. Notons k_K le corps résiduel de K que l'on suppose parfait et supposons fixé une section du morphisme $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \to k_K$ (lorsque la valuation de K est discrète le relèvement de Teichmüller fournit canoniquement une telle section). Soit $\mathcal{G}_{k_K}$ la réduction de $\mathcal{G}$ sur le corps résiduel. Faisons l'hypothèse suivante : l'identité de $\mathcal{G}_{k_K}$ de relève en une quasi-isogénie (nécessairement unique)

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K} \otimes_{k_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

Par rigidité des quasi-isogénies, lorsque la valuation de K est discrète cette hypothèse est automatiquement vérifiée. Alors, toujours d'après [**24**] chap. IV, si $D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{k_K}, CW_{\mathcal{O}})$ est le module de Dieudonné de la fibre spéciale de $\mathcal{G}$, ρ et le morphisme précédent induisent un isomorphisme

$$D \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_K)} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Quasilog}(\mathcal{G})/\sim .$$

Exemple 4.3.6. — Soit $\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ le $\mathcal{O}$-module formel sur $\mathcal{O}_E$ de l'exemple 4.3.2. Une base de ses quasi-logarithmes est

$$\sum_{n\geq 0} \frac{T^{q^{nh+i}}}{\pi^n}$$

lorsque i varie entre 0 et $h-1$.

4.4. Description de $B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de $\mathcal{O}$-modules π-divisibles lorsque $d \leq h$

On va maintenant décrire géométriquement la structure d'espace de Banach sur $\mathfrak{m}_F^d$ déduite de la bijection $\mathscr{L}_{d,h}$ de la proposition 4.2.1. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. On note $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spec}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F), \mathcal{G})$. Pour tout $s > 0$, si $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$, soit

$$\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F) = \ker\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s)\big).$$

On vérifie aisément la proposition qui suit.

Proposition 4.4.1. — *Le groupe $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ est un E-espace vectoriel. De plus, pour tout $s > 0$, $\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F)$ est un sous-$\mathcal{O}_E$-module π-adiquement complet de $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ qui définit une structure d'espace de Banach sur $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$, c'est à dire est la boule unité d'une norme de Banach sur $\mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$. La topologie de Banach ainsi définie ne dépend pas du choix de $s > 0$.*

Soit

$$G = (\mathcal{G}\hat{\otimes}\mathcal{O}_F)^{rig}$$

la fibre générique du $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_F)$-schéma formel $\mathcal{G}\hat{\otimes}\mathcal{O}_F$ comme F-espace analytique rigide. Il s'agit d'un groupe analytique rigide sur F tel que

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) = G(F).$$

Pour tout $s > 0$, $s \in v(F^\times)$, il y a un sous-groupe affinoïde $G_s \subset G$, tel que

$$\mathcal{G}_s(\mathcal{O}_F) = G_s(F).$$

Après avoir fixé des coordonnées formels sur $\mathcal{G}$, c'est à dire un isomorphisme $\mathrm{Spf}(k[\![x_1, \ldots, x_d]\!]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}$, on a

$$G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d,$$

la boule ouverte unité rigide analytique de dimension $d = \dim(\mathcal{G})$ sur F et

$$G_s \simeq \mathbb{B}^d(0, q^{-s})$$

la boule fermée de rayon q^{-s} dans la boule ouverte. La multiplication par π, $\times\pi : G \to G$, vérifie alors que pour tout $s > 0$, on a un recouvrement admissible

$$\bigcup_{n\geq 1} \pi^{-n} G_s = G$$

et pour $s > t > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$\pi^n G_s \subset G_t.$$

Remarquons enfin que le foncteur $\mathcal{G} \mapsto \mathcal{G}(\mathcal{O}_F)$ de la catégorie des $\mathcal{O}$-modules formels π-divisibles sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ dans celle des E-espaces de Banach se factorise par la catégorie $\mathcal{O}$-modules formels π-divisibles à isogénies près.

Considérons maintenant le module de Dieudonné contravariant de $\mathcal{G}$,

$$D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}, CW_{\mathcal{O}}).$$

Notons $F, V_\pi : D \to D$ son Frobenius et son Verschiebung. Il y a alors un isomorphisme naturel

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}\big(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\big).$$

où si $\mathfrak{a}_s = \{x \in \mathcal{O}_F \mid v(x) \geq s\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(\mathcal{O}_F) &= \varprojlim_{s>0} \mathcal{G}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) \\ CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) &= \varprojlim_{s>0} CW(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}_s) = \big\{[x_i]_{i\leq 0} \mid x_i \in \mathcal{O}_F,\ \liminf_{i\to-\infty} v(x_i) > 0\big\}. \end{aligned}$$

Puisque $\mathcal{G}$ est formel, dans les formules précédentes on pourrait remplacer $CW_{\mathcal{O}}$ par $\widehat{CW}_{\mathcal{O}}$ et en particulier $CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ par

$$\widehat{CW}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) = \big\{[x_i]_{i\leq 0} \mid x_i \in \mathfrak{m}_F,\ \liminf_{i\to-\infty} v(x_i) > 0\big\}.$$

Proposition 4.4.2. — *L'application de réduction $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \to CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ induit un isomorphisme de $\mathcal{O}_E$-modules*

$$Hom_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} Hom_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)).$$

Démonstration. Puisque F est bijectif sur $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ et $CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ on a pour $* \in \{BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\}$,

$$\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}(D, *) = \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}(D, *).$$

La suite exacte

$$0 \longrightarrow W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to \\ \to \quad &\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to 0. \end{aligned}$$

Pour $* \in \{W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F), CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\}$, le $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$-module $\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, *)$ est muni d'un opérateur σ^{-1}-linéaire ψ en posant $\psi(u) = F^{-1} \circ u \circ F$. La suite exacte précédente est une suite exacte de $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$-modules munis d'un tel opérateur. En prenant les invariants sous un tel opérateur elle induit donc une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \quad &\to \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}(D, BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to \\ \to \quad &\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}(D, CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \to A \end{aligned}$$

où

$$A = \mathrm{coker}\big(\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{Id-\psi} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))\big).$$

Puisque F est topologiquement nilpotent sur D et bijectif sur $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$,

$$\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) = 0.$$

La nilpotence topologique de F sur D implique également que l'opérateur ψ agissant sur le $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$-module libre $\mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)}(D, W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ est π-adiquement topologiquement nilpotent. On en déduit que $Id - \psi$ est bijectif et donc $A = 0$. □

Remarque 4.4.3. — Par définition, $BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ où les applications de transition sont données par $V_\pi : CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \to CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. Soit $n \gg 0$ tel que $F^n D \subset V_\pi D$. Posons $\gamma = V_\pi^{-1} F^n$ l'endomorphisme associé de D. Alors, si $u : D \to CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ commute à F et V_π, l'unique relèvement donné par la proposition précédente est

$$(F^{-n} \circ u \circ \gamma^n)_{n\geq 0} : D \to \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

De la proposition précédente, du théorème de Dieudonné-Manin et du point (1) de la proposition 4.2.1 on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 4.4.4. — *Il y a un isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} Hom_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}\big(D\big[\tfrac{1}{\pi}\big], BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)\big) = Hom_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F]}\big(D\big[\tfrac{1}{\pi}\big], B^+\big)$$

où $D\big[\frac{1}{\pi}\big]$ est le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné rationnel contravariant de $\mathcal{G}$.

Soient $1 \leq d \leq h$ et

$$\mathcal{G}_{d,h} = \ker\big(CW_{\mathcal{O}} \xrightarrow{F^{h-d}-V_\pi^d} CW_{\mathcal{O}}\big),$$

le $\mathcal{O}$-module formel de la section 4.3.2. Soit $e : \mathcal{G}_{d,h} \hookrightarrow CW_{\mathcal{O}}$ le générateur canonique de son module de Dieudonné, c'est à dire le plongement canonique. Soit $(x_0, \ldots, x_{d-1})$ les coordonnées formels sur $\mathcal{G}_{d,h}$ de la section 4.3.2, c'est à dire l'isomorphisme

$$\mathrm{Spf}(k[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!]) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}$$

tel que composé avec $e : \mathcal{G}_{d,h} \hookrightarrow CW_{\mathcal{O}}$ ce soit

$$[\ldots, x_0^{q^{(h-d)}}, x_{d-1}, \ldots, x_0] = \big[x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}\big]_{i\leq 0} \in CW_{\mathcal{O}}(k[\![x_0, \ldots, x_{d-1}]\!])$$

où $-i = a(i)d + b(i)$ est la division euclidienne de $-i$ par d. Ce choix de coordonnées formelles induit une bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F).$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)[F,V_\pi]}(D, B^+) & \xrightarrow{\sim} & \big(B^+\big)^{\varphi^h=\pi^d} \\ u & \longmapsto & u(e). \end{array}$$

Proposition 4.4.5. — *Soit $\mathfrak{F}_{d,h}$ la loi de groupe formel associée à $\mathcal{G}_{d,h}$ et au choix précédent de coordonnées formelles. Via ces choix, l'isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$\big(\mathfrak{m}_F^d, \underset{\mathfrak{F}_{d,h}}{+}\big) \xrightarrow{\sim} \big(B^+\big)^{\varphi^h=\pi^d}$$

est donné par

$$(x_0, \ldots, x_{d-1}) \longmapsto \pi^{-d}\mathscr{L}_{d,h}(x_{d-1}^{q^{d-1}}, \ldots, x_1^q, x_0)$$

où $\mathscr{L}_{d,h}$ est l'application de la proposition 4.2.1.

Démonstration. La bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} CW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h=\pi^d}$$

est donnée par

$$(x_0, \ldots, x_{d-1}) \longmapsto \sum_{i\leq 0} V_\pi^i\big[x_{b(i)}^{q^{a(i)(h-d)}}\big] = \sum_{i=0}^{d-1}\sum_{n\leq 0} V_\pi^{nd-i}\big[x_i^{q^{-n(h-d)}}\big].$$

La bijection

$$\mathfrak{m}_F^d \xrightarrow{\sim} BW_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^{\varphi^h=\pi^d}$$

associe donc à $(x_0, \ldots, x_{d-1})$

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{d-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} V_\pi^{nd-i}\big[x_i^{q^{-n(h-d)}}\big] &= \sum_{i=0}^{d-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[x_i^{q^{-n(h-d)-(nd-i)}}\big]\pi^{nd-i}\\ &= \sum_{i=0}^{d-1}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[x_i^{q^{-nh+i}}\big]\pi^{nd-i}.\end{aligned}$$

Le résultat s'en déduit immédiatement. □

On a défini sur le E-espace vectoriel $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F)$ une structure d'espace de Banach (prop. 4.4.1). De plus (cf. section 4.1.2) $B^{\varphi^h=\pi^d}$ est un sous-espace de Banach de l'espace de Fréchet B. Utilisant la formule explicite fournie par la proposition précédente on vérifie facilement la proposition qui suit.

Proposition 4.4.6. — *L'isomorphisme précédent* $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} B^{\varphi^h=\pi^d}$ *est un homéomorphisme d'espaces de Banach.*

On a donc obtenu une interprétation géométrique de l'espace de Banach $B^{\varphi^h=\pi^d}$.

Exemple 4.4.7. — Supposons $E = \mathbb{Q}_p$ et $d = h = 1$. Soit la loi de groupe formel $\widetilde{\mathfrak{F}}$ sur $\mathbb{Z}_p$ de logarithme $\sum_{n\geq 0}\frac{T^{p^n}}{p^n}$ et $\mathfrak{F}$ sa réduction sur $\mathbb{F}_p$. Il y a un isomorphisme de E-espaces de Banach

$$\begin{aligned}\mathcal{L} : \big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathfrak{F}}{+}\big) &\xrightarrow{\sim} \big(B^+\big)^{\varphi=p}\\ x &\longmapsto \sum_{n\in\mathbb{Z}}\big[x_n^{p^{-n}}\big]p^n.\end{aligned}$$

Soit

$$E = \exp\Big(\sum_{n\geq 0}\frac{T^{p^n}}{p^n}\Big) \in \mathbb{Z}_p[\![T]\!]$$

l'exponentielle d'Artin-Hasse. Elle induit un isomorphisme de lois de groupe formel

$$E : \mathfrak{F} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathbb{G}}_m.$$

On en déduit que l'on a un diagramme commutatif d'isomorphismes d'espaces de Banach

$$\begin{tikzcd}\big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathfrak{F}}{+}\big) \arrow[dd, "E"', "\simeq"] \arrow[dr, "\mathscr{L}", "\simeq"'] & \\ & \big(B^+\big)^{\varphi=p} \\ (1+\mathfrak{m}_F, \times) \arrow[ur, "\simeq", "\log([-])"'] & \end{tikzcd}$$

4.5. Lien avec l'application des périodes d'un groupe p-divisible

4.5.1. Un résultat de relèvement. — Soit A une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur A.

Définition 4.5.1. — Si B est une A-algèbre adique pour un idéal contenant π, posant $\mathcal{G}(B) := \mathrm{Hom}_{\mathrm{Spf}(A)}(\mathrm{Spf}(B), \mathcal{G}))$, on note

$$X(\mathcal{G})(B) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathcal{G}(B) \text{ et } \pi x_{n+1} = x_n\}.$$

Remarquons que $X(\mathcal{G})(B)$ est un E-espace vectoriel ne dépendant que de la classe d'isogénie de $\mathcal{G}$.

Proposition 4.5.2. — *Soit B une A-algèbre J-adique avec $(\pi) \subset J$. Soit $I \subset J$ un idéal de B fermé pour la topologie J-adique. Munissons B de la topologie J-adique et B/I de la topologie J/I-adique. L'application de réduction modulo I induit alors un isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$X(\mathcal{G})(B) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})(B/I).$$

Démonstration. On a

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(B) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k\geq 1} \mathcal{G}(B/J^k) \\ \mathcal{G}(B/I) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k\geq 1} \mathcal{G}(B/I+J^k). \end{aligned}$$

qui induisent donc des bijections

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G})(B) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k\geq 1} X(\mathcal{G})(B/J^k) \\ X(\mathcal{G})(B/I) &\xrightarrow{\sim} \varprojlim_{k\geq 1} X(\mathcal{G})(B/I+J^k). \end{aligned}$$

Quitte à remplacer B par B/J^k, I par $I + J^k/J^k$ et $\mathcal{G}$ par $\mathcal{G} \otimes B/J^k$ pour un $k \geq 1$ on peut donc supposer qu'il existe un entier k tel $J^k = 0$. On a donc en particulier $I^k = 0$ et $\pi^k B = 0$. L'application de réduction

$$\mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I)$$

se dévisse en

$$\mathcal{G}(B) = \mathcal{G}(B/I^k) \longrightarrow G(B/I^{k-1}) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^{k-2}) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathcal{G}(B/I^2) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I).$$

Pour un indice l compris entre 1 et k, puisque $\pi^k B = 0$ et donc $\pi^k \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} = 0$,

$$\ker\big(\mathcal{G}(B/I^l) \to \mathcal{G}(B/I^{l-1})\big)$$

est annulé par π^k. On en déduit que

$$\ker\big(\mathcal{G}(B) \longrightarrow \mathcal{G}(B/I)\big)$$

est annulé par π^{k^2}.

Soit maintenant

$$x = (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in \ker\big(X(\mathcal{G})(B) \to X(\mathcal{G})(B/I)\big).$$

On a donc pour tout n, $\pi^{k^2} x_n = x_{n+k^2} = 0$. Cela étant vrait pour tout n, $x = 0$. L'application de réduction

$$X(\mathcal{G})(B) \longrightarrow X(\mathcal{G})(B/I)$$

est donc injective.

Soit maintenant $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(B/I)$ et pour tout n, $\hat{x}_n \in \mathcal{G}(B)$ un relèvement quelconque de x_n. D'après le résultat précédent, pour tout n la suite

$$(\pi^m \hat{x}_{n+m})_{m\geq 0}$$

est constante pour $m \gg 0$. On vérifie alors facilement que l'application

$$(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \lim_{m\to+\infty} \pi^m \hat{x}_{n+m}$$

induit un inverse à l'application de réduction modulo I. □

4.5.2. Interprétation de l'isomorphisme $\mathcal{G}_{d,h}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} B^{\varphi^h=\pi^d}$ en termes de quasi-logarithmes. — Soit maintenant $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. On note $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}$ sa réduction sur le corps résiduel. Munissons $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ de la topologie faible (cf. sec. 1.4.3). D'après la proposition 4.5.2 l'application de réduction modulo π induit une bijection

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\mathcal{O}_F).$$

De plus,

$$\begin{array}{rcl} X(\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q})(\mathcal{O}_F) & \xrightarrow{\sim} & \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\mathcal{O}_F) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & x_0. \end{array}$$

On dispose donc d'un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\mathcal{O}_F).$$

Soit $G = \mathcal{G}^{rig}$ la fibre générique de $\mathcal{G}$ comme $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$-groupe rigide analytique. Soit $\Gamma(G, \mathcal{O}_G) = \mathrm{Hom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$. Muni de la topologie de la convergence uniforme sur les domaines affinoïdes de G c'est un E-espace de Fréchet. De plus, l'espace vectoriel $\Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_{\mathcal{G}})\big[\frac{1}{\pi}\big] = \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \widehat{\mathbb{G}}_a)\big[\frac{1}{\pi}\big]$, les fonctions rigides analytiques bornées, est dense dans cet espace de Fréchet. Si $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ il y a une application d'évaluation

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Hom}(\mathcal{G}, \widehat{\mathbb{G}}_a)\big[\frac{1}{\pi}\big] & \longrightarrow & B^{b,+} \\ f & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Lemme 4.5.3. — *Pour $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, l'application d'évaluation précédente s'étend en une unique application continue entre espaces de Fréchet*

$$\begin{array}{rcl} Hom(G, \mathbb{G}_a^{rig}) & \longrightarrow & B^+ \\ f & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Démonstration. — Pour $r > 0$ notons w_r la valuation de Gauss qui est la borne inférieur de la valuation d'une fonction rigide analytique sur la boule de rayon q^{-r} dans l'espace rigide G. On vérifie par un calcul en coordonnées que pour $f \in \Gamma(\mathcal{G}, \mathcal{O}_G)\left[\frac{1}{\pi}\right]$,

$$v_r(f(x)) \geq w_{v_r(x)}(f).$$

□

On peut donc définir pour $f \in \mathrm{Quasilog}(\mathcal{G}) = \mathrm{QuasiHom}(G, \mathbb{G}_a^{rig})$ (cf. section 4.3.3) et $x \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$, $f(x) \in B^+$. Concrètement, si $(T_1, \ldots, T_d)$ est un système de coordonnées formelles sur $\mathcal{G}$, $f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha T_1^{\alpha_1} \ldots T_d^{\alpha_d}$ et $x = (x_1, \ldots, x_d) \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \subset W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^d$,

$$f(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \ldots x_d^{\alpha_d}$$

dans B^+ où

$$\mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^d \mid \forall i,\ x_i \bmod \pi \in \mathfrak{m}_F\}$$

puisque pour la topologie faible

$$W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^{\circ\circ} = \{x \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \mid x \bmod \pi \in \mathfrak{m}_F\}.$$

Lemme 4.5.4. — *Soit $f : G \to \mathbb{G}_a^{rig}$ un quasi-morphisme. Il existe alors $A \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $\|\pi^m f - f \circ \pi^m\|_\infty \leq A$.*

Démonstration. Il suffit d'écrire

$$\|\pi^{m+1} f - f \circ \pi^{m+1}\|_\infty \leq \sup\{\|\pi(\pi^m f - f \circ \pi^m)\|_\infty, \|(\pi f - f \circ \pi) \circ \pi^m\|_\infty\}$$

pour en déduit par récurrence sur m que

$$\|\pi^m f - f \circ \pi^m\|_\infty \leq \|\pi f - f \circ \pi\|_\infty.$$

□

Lemme 4.5.5. — *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ et $f \in QuasiHom(G, \mathbb{G}_a^{rig})$. Les propriétés suivantes sont vérifiées :*

1. *La suite $(\pi^n f(x_n))_{n \in \mathbb{Z}}$ est convergente dans B^+.*
2. *Si f est borné, $\lim\limits_{n \to +\infty} \pi^n f(x_n) = 0$.*
3. *Si y est un autre élément de $X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ alors*

$$\lim_{n \to +\infty} \pi^n f(x_n + y_n) = \lim_{n \to +\infty} \pi^n f(x_n) + \lim_{n \to +\infty} \pi^n f(y_n).$$

Démonstration. Soit $r > 0$. On reprend les notations de la démonstration du lemme 4.5.3. Pour $n, m \geq 0$,

$$\begin{aligned} v_r(\pi^{n+m} f(x_{n+m}) - \pi^n f(x_n)) &= nr + v_r(\pi^m f(x_{n+m}) - \pi^n f(x_n)) \\ &\geq nr + w_{v_r(x_{n+m})}(\pi^m f - f \circ \pi^m) \\ &\geq nr + \inf_{r'>0} w_{r'}(\pi^m f - f \circ \pi^m). \end{aligned}$$

Puisque f est un quasi-morphisme, d'après le lemme 4.5.4 il existe une constante A indépendante de m telle que $\inf_{r'>0} w_{r'}(\pi^m f - f \circ \pi^m) \geq A$. On en déduit ausstôt que la suite $(\pi^n f(x_n))_{n\geq 0}$ est de Cauchy dans B^+, d'où le point (1). Le point (2) est immédiat et le point (3) ne pose pas de problème. □

Du lemme précédent on déduit que l'on dispose d'un morphisme de E-espaces vectoriels

$$\begin{aligned} X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) &\longrightarrow \mathrm{Hom}\big(\mathrm{QuasiHom}(G, \mathbf{G}_a^{rig})/\sim, B^+\big) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} &\longmapsto \big[f \mapsto \lim_{n\to+\infty} \pi^n f(x_n)\big]. \end{aligned}$$

Soit

$$D = \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}, CW_{\mathcal{O}})$$

le module de Dieudonné contravariant de $\mathcal{G}_k$. Rappelons (cf. fin de la section 4.3.3) qu'il y a un isomorphisme

$$D\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \xrightarrow{\sim} \mathrm{QuasiLog}(\mathcal{G})/\sim .$$

On a de plus vu qu'on a un isomorphisme canonique

$$X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F).$$

On obtient donc un morphisme

$$\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathrm{Hom}_E(D\big[\tfrac{1}{\pi}\big], B^+).$$

Proposition 4.5.6. — *Le morphisme $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow Hom_E(D\big[\frac{1}{\pi}\big], B^+)$ construit via les quasi-logarithmes de $\mathcal{G}$ coïncide avec le morphisme du corollaire 4.4.4.*

Démonstration. Soit $\mathcal{G} = \mathrm{Spf}(R)$ et $\mathcal{G}_k = \mathrm{Spf}(R/\pi R)$. Si

$$g = [g_n]_{n\leq 0} \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{G}_k, CW_{\mathcal{O}}) \subset CW_{\mathcal{O}}(R/\pi R),$$

on note pour tout n, $\widehat{g}_n \in R$ un relèvement quelconque de g_n dans l'idéal d'augmentation de R et

$$\sum_{n\leq 0} \pi^n \, \widehat{g}_n^{\,q^{-n}} \in \Gamma(G, \mathcal{O}_G)$$

le quasi-logarithme associé. Remarquons que la série précédente est convergente pour la topologie de Fréchet de $\Gamma(G, \mathcal{O}_G)$. Pour tout $x \in \mathcal{G}(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, l'évaluation du quasi-logarithme précédent sur x vaut donc dans B^+

$$\sum_{n \leq 0} \pi^n \, \widehat{g}_n(x)^{\,q^{-n}}.$$

Si $x = (x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ il lui correspond l'application qui au quasi-logarithme précédent associe

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}}.$$

Commençons par vérifier que cette application $D\big[\frac{1}{\pi}\big] \to B^+$ commute au Frobenius. Du point de vue des classes d'équivalence de quasi-logarithmes, l'action du Frobenius sur le module de Dieudonné est donnée par

$$\sum_{n \leq 0} \pi^n \, \widehat{g}_n^{\,q^{-n}} \longmapsto \sum_{n \leq 0} \pi^n \, \widehat{g}_n^{\,q^{-n+1}}.$$

Il s'agit donc de montrer que

$$\lim_{m \to +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \varphi\big(\widehat{g}_n(x_m)\big)^{q^{-n}} = \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \big(\widehat{g}_n(x_m)^q\big)^{q^{-n}}.$$

Or on a dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$

$$\begin{aligned} & \varphi\big(\widehat{g}_n(x_m)\big) \equiv \widehat{g}_n(x_m)^q \bmod \pi \\ \Longrightarrow \quad & \varphi\big(\widehat{g}_n(x_m)\big)^{q^{-n}} \equiv \big(\widehat{g}_n(x_m)^q\big)^{q^{-n}} \bmod \pi^{-n+1} \end{aligned}$$

et donc

$$\sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \varphi\big(\widehat{g}_n(x_m)\big)^{q^{-n}} - \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \big(\widehat{g}_n(x_m)^q\big)^{q^{-n}} \in \pi^m W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$$

qui tend vers 0 lorsque m tend vers l'infini. On a donc montré que notre morphisme commute au Frobenius.

Puisque le morphisme de Frobenius du module de Dieudonné D est π-adiquement topologiquement nilpotent, deux morphismes de D à valeurs dans B^+ compatibles aux Frobenius coïncident si et seulement si leur différence est à valeurs dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. À $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$ est associé $\overline{x}_0 := x_0 \bmod \pi$ dans $\mathcal{G}_{\overline{\mathbb{F}}_q}(\mathcal{O}_F)$. Pour montrer le théorème il suffit donc de montrer que

$$\sum_{n \leq 0} V_\pi^n \big[g_n(\overline{x}_0)\big] - \lim_{m \to +\infty} \sum_{n \leq 0} \pi^{n+m} \, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

On a

$$\sum_{n \leq 0} V_\pi^n \big[g_n(\overline{x}_0)\big] = \sum_{n \leq 0} \pi^n \big[g_n(\overline{x}_0)^{q^{-n}}\big].$$

Puisque $[g_n]_{n\leq 0}$ est un morphisme de $\mathcal{G}_k$ à valeurs dans $CW_{\mathcal{O}}$ il commute à l'action de π^m. Écrivant $\pi^m = V_\pi^m F^m$ comme endomorphisme de $CW_{\mathcal{O}}$ et utilisant le fait que $\pi^m x_m = x_0$ on obtient que lorsque $n \leq 0$, $m \geq 0$ et $n+m \leq 0$ on a

$$\begin{aligned} \widehat{g}_n(x_m)^{q^m} &\equiv \widehat{g}_{n+m}(x_0) \bmod \pi \\ &\equiv \big[g_{n+m}(\overline{x}_0)\big] \bmod \pi. \end{aligned}$$

On a donc sous les conditions précédentes

$$\widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} \equiv \big[g_{n+m}(\overline{x}_0)^{q^{-(n+m)}}\big] \bmod \pi^{-(n+m)+1}.$$

Écrivons pour $m \geq 0$

$$\sum_{n\leq 0} \pi^{n+m}\, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} = \sum_{m+n\leq 0} \pi^{n+m}\, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} + \sum_{-m<n\leq 0} \pi^{n+m}\, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}}.$$

Le second termes est dans $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$. De plus, d'après la congruence établie précédemment

$$\sum_{m+n\leq 0} \pi^{n+m}\, \widehat{g}_n(x_m)^{q^{-n}} - \sum_{n\leq 0} V_\pi^n\big[g_n(\overline{x}_0)\big] \in W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F).$$

Puisque $W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)$ est fermé dans B^+ on en déduit le résultat en passant à la limite sur m. □

Exemple 4.5.7. — Soit $(T_0, \ldots, T_{d-1})$ un système de coordonnées formelles sur $\mathcal{G}$ et $\mathfrak{F}$ la loi de groupe formel associée. Soit $f \in E[\![T_0, \ldots, T_{d-1}]\!]$ un logarithme. Si $(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F))$, $\pi^n f(y_n) = f(y_0)$. Le morphisme défini par f,

$$\big(\mathfrak{m}_F^d, \underset{\mathfrak{F}}{+}\big) \longrightarrow B^+$$

est donc donné par

$$\begin{aligned} (x_0, \ldots, x_{d-1}) &\longmapsto f\Big(\lim_{n\to+\infty} [\pi^n]_{\mathfrak{F}}\big([x_0^{(n)}], \ldots, [x_{d-1}^{(n)}]\big)\Big) \\ &= \lim_{n\to+\infty} \pi^n f\big([x_0^{(n)}], \ldots, [x_{d-1}^{(n)}]\big). \end{aligned}$$

où $[\pi^n]_{\mathfrak{F}}(x_0^{(n)}, \ldots, x_{d-1}^{(n)}) = (x_0, \ldots, x_{d-1}) \in \mathfrak{m}_F^d$.

Exemple 4.5.8. — Soit $\widetilde{\mathfrak{F}}_{1,h}$ la loi de groupe formel de l'exemple 4.3.2 de réduction $\mathfrak{F}_{1,h}$ modulo π. Soit $f(T) = \sum_{k\geq 0} \frac{T^{q^k}}{\pi^k}$ son logarithme. On a $[\pi]_{\mathfrak{F}_{1,h}} = T^q$. L'isomorphisme associé

$$\big(\mathfrak{m}_F, \underset{\mathfrak{F}_{1,h}}{+}\big) \xrightarrow{\sim} \big(B^+\big)^{\varphi^h = \pi}$$

est donc donné par

$$\begin{aligned} x \mapsto \lim_{n\to+\infty} f\big([x^{q^{-n}}]\big) &= \lim_{n\to+\infty} \sum_{k\geq 0} \frac{[x^{q^{k-n}}]}{\pi^{k-n}} \\ &= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \frac{[x^{q^k}]}{\pi^k}. \end{aligned}$$

On retrouve donc bien la formule donnée par la proposition 4.4.5 lorsque $d = 1$. On peut vérifier plus généralement en utilisant les formules données par la proposition 4.3.1 que l'on retrouve bien la formule de la proposition 4.4.5 lorsque d est quelconque.

4.5.3. Application des périodes. — On suppose F algébriquement clos. Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos muni d'une identification $C^\flat = F$ (cela ne signifie rien de plus que $C = C_y$ pour un $y \in |Y_F|$, cf. 2.3). Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_C$. Notons $\mathcal{G}_k$ sa réduction sur le corps résiduel k de $\mathcal{O}_C$. On suppose fixée une section de la projection $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \to k$ et on voit donc k comme plongé dans $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$. Remarquons que cela induit également un plongement $k \subset \mathcal{O}_F$. Nous ferons l'hypothèse suivante : il existe une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{G}_k \otimes_k \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C$$

relevant l'identité de $\mathcal{G}_k$ après réduction via $\mathcal{O}_C/p\mathcal{O}_C \twoheadrightarrow k$. Une telle quasi-isogénie est alors unique. Cette hypothèse est équivalente à demander l'existence un idéal $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{m}_C$ contenant $p\mathcal{O}_C$ et un isomorphisme

$$\rho_{\mathfrak{a}} : \mathcal{G}_k \otimes_k \mathcal{O}_C/\mathfrak{a} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_C} \mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$$

déformant l'identité de $\mathcal{G}_k$. En effet, étant donnée une quasi-isogénie ρ comme précédemment, pour un idéal $\mathfrak{a}$ suffisemment grand dans $\mathfrak{m}_C$ contenant $p\mathcal{O}_C$, la réduction modulo $\mathfrak{a}$ de ρ est un isomorphisme. Réciproquement, utilisant la rigidité des quasi-isogénies, un isomorphisme $\rho_{\mathfrak{a}}$ induit une quasi-isogénie ρ. Cette hypothèse est par exemple vérifiée s'il existe un sous-corps valué complet de valuation discrète K de C, tel que $\mathcal{G}$ provienne par extension des scalaires d'un groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K$ à $\mathcal{O}_C$.

Considérons maintenant

$$\mathfrak{X}(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C),$$

un E-espace vectoriel. Si $G = \mathcal{G}^{rig} \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$ est la fibre générique de $\mathcal{G}$ comme espace analytique rigide en groupes, il s'agit de la limite projective des C-points du système projectif de boule ouvertes

$$\ldots \xleftarrow{\times\pi} G \xleftarrow{\times\pi} G \xleftarrow{\times\pi} \ldots.$$

L'espace vectoriel $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C)$ ne dépend ainsi que du groupe rigide analytique G. On a donc $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) = X(G)(C)$ où

$$X(G)(C) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in G(C),\ \pi x_{n+1} = x_n\}.$$

Proposition 4.5.9. — *Posons pour $r \in]0, +\infty[$,*

$$X(\mathcal{G})_r(\mathcal{O}_C) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \mid x_0 \in \ker\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}_r)\big)\}.$$

où $\mathfrak{a}_r = \{y \in \mathcal{O}_C \mid v(x) \geq r\}$. C'est un sous-$\mathcal{O}_E$-module π-adiquement complet du E-espace vectoriel $X(\mathcal{G})(C)$ définissant une structure d'espace de Banach sur $X(\mathcal{G})(C)$. La topologie de Banach ainsi définie ne dépend pas du choix d'un tel r.

Si $G_r \subset G$ désigne le sous-groupe analytique rigide affinoïde tel que $G_r(\mathcal{O}_C) = \ker\big(\mathcal{G}(\mathcal{O}_C) \to \mathcal{G}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}_r)\big)$, après choix d'un système de coordonnées formelles sur $\mathcal{G}$, G_r s'identifie à la boule fermée de rayon q^{-r} dans $G \simeq \mathring{\mathbb{B}}^d$. Le morphisme d'espaces rigides $G \xrightarrow{\times\pi} G$ est étale fini, c'est un revêtement galoisien de groupe $\mathcal{G}[\pi](\mathcal{O}_C)$. Notons pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\pi^n G_r \subset G$ l'image réciproque de G_r par le morphisme $G \xrightarrow{\times\pi^{-n}} G$ si $n \leq 0$ et l'image par le morphisme $G \xrightarrow{\times\pi^n} G$ de G_r si $n \geq 0$. C'est un sous-groupe affinoïde de G. Alors, le réseau $X(\mathcal{G})_r(\mathcal{O}_C)$ de $X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) = X(G)(C)$ s'identifie à la limite projective des C-points du système projectif de groupes analytiques rigides affinoïdes

$$\ldots \xleftarrow{\times\pi} \pi^{n+1}G_r \xleftarrow{\times\pi} \pi^n G_r \xleftarrow{\times\pi} \pi^{n-1}G_r \xleftarrow{\times\pi} \ldots$$

où les morphismes de transition sont des revêtements galoisiens de groupe $\mathcal{G}[\pi](\mathcal{O}_C)$.

Soit

$$\log : G \longrightarrow \operatorname{Lie} G \otimes \mathbf{G}_a^{rig}$$

le logarithme de $\mathcal{G}$. C'est un revêtement étale au sens de de Jong ([**39**]) « galoisien de groupe le groupe discret $G[\pi^\infty](\mathcal{O}_C)$ ». En restriction au sous-groupe affinoïde G_r, $\log_{|G_r} : G_r \to \log(G_r)$ est un revêtement étale galoisien fini de groupe $G_r \cap G[\pi^\infty](C)$. En particulier, si $r_0 = \inf\{r \mid G_r \cap G[\pi] = \emptyset\}$, en restriction à la boule ouverte $\cup_{r>r_0} G_r$, log est un isomorphisme sur son image, d'inverse donné par l'exponentielle du groupe formel (dont le plus grand domaine de convergence est justement $\cup_{r>r_0} \log(G_r)$). Le logarithme définit un morphisme de E-espaces vectoriels

$$\begin{array}{rcl} \log : X(G)(C) & \longrightarrow & \operatorname{Lie} G = \operatorname{Lie} \mathcal{G}\big[\frac{1}{p}\big] \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \log(x_0) \end{array}$$

de noyau le module de Tate rationnel de $\mathcal{G}$,

$$V_\pi(\mathcal{G}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid x_n \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_C),\ \pi x_{n+1} = x_n,\ x_n = 0 \text{ pour } n \ll 0\}.$$

On a donc une suite exacte d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G}) \longrightarrow X(G)(C) \xrightarrow{\log} \operatorname{Lie} G \longrightarrow 0$$

où $V_\pi(\mathcal{G})$ est un E-espace vectoriel de dimension finie et $\operatorname{Lie} G$ un C-espace vectoriel de dimension finie. Une fois de plus, cette suite exacte ne dépend que du groupe rigide analytique G.

De la proposition 4.5.2 on déduit que pour tout idéal non nul $\mathfrak{a} \subset \mathfrak{m}_C$, l'application de réduction modulo $\mathfrak{a}$

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \longrightarrow X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})$$

est un isomorphisme de E-espaces vectoriels d'inverse donné par

$$(y_n)_{n\in\mathbb{Z}} \longmapsto \Big(\lim_{k\to+\infty} \pi^k \hat{y}_{n+k}\Big)_{n\in\mathbb{Z}}$$

où $\hat{y}_n \in \mathcal{G}(\mathcal{O}_C)$ est un relèvement quelconque de y_n.

Choisissons $\mathfrak{a}$ tel que $\pi\mathcal{O}_C \subset \mathfrak{a}$ et la réduction modulo $\mathfrak{a}$ de ρ,

$$\rho_{\mathfrak{a}} : \mathcal{G}_k \otimes \mathcal{O}_C/\mathfrak{a} \longrightarrow \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$$

soit un isomorphisme. Composant l'isomorphisme précédent avec $\rho_{\mathfrak{a}}^{-1}$ on obtient un isomorphisme canonique de E-espaces vectoriels

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}_k)(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}).$$

Considérons maintenant le système projectif des $(\mathcal{G}_k^{(q^{-n})})_{n\geq 0}$ avec comme morphismes de transition le morphisme de Frobenius :

$$\mathcal{G}_k \xleftarrow{F} \mathcal{G}_k^{(p^{-1})} \xleftarrow{F} \dots \xleftarrow{F} \mathcal{G}_k^{(p^{-n})} \xleftarrow{F} \dots.$$

La limite projective des $\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}$-points du système projectif précédent est canoniquement

$$\mathcal{G}_k((\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})^\flat) = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathcal{G}_k^{(p^{-n})}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}).$$

Remarquons maintenant qu'il y a un morphisme de systèmes projectif

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{G}_k \arrow[d, equal] & \mathcal{G}_k \arrow[l, "\times\pi"'] \arrow[d, "V_\pi"] & \dots \arrow[l, "\times\pi"'] & \mathcal{G}_k \arrow[l, "\times\pi"'] \arrow[d, "V_\pi^n"] & \dots \arrow[l, "\times\pi"'] \\
\mathcal{G}_k & \mathcal{G}_k^{(q^{-1})} \arrow[l, "F"'] & \dots \arrow[l, "F"'] & \mathcal{G}_k^{(q^{-n})} \arrow[l, "F"'] & \dots \arrow[l, "F"']
\end{tikzcd}$$

Lemme 4.5.10. — *Le morphisme de systèmes projectifs précédents induit un isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$\varprojlim_{\mathbb{N},\times\pi} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{\mathbb{N},F} \mathcal{G}_k^{(q^{-n})}(\mathcal{O}_C/\mathfrak{a}) = \mathcal{G}_k((\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})^\flat).$$

Démonstration. Cela résulte de ce que $\mathcal{G}$ étant formel, pour n grand on peut écrire $F^n = \pi u$ où u est une isogénie. □

Puisqu'on a des identifications canoniques $\mathcal{O}_F = \mathcal{O}_C^\flat = (\mathcal{O}_C/\mathfrak{a})^\flat$ on a donc défini un isomorphisme de E-espaces vectoriels

$$X(G)(C) = X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F).$$

Rappelons (section 4.4) que l'on a défini une structure d'espace de Banach sur le E-espace vectoriel $\mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F)$. On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 4.5.11. — *L'isomorphisme de E-espaces vectoriels*

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F)$$

est un homéomorphisme d'espaces de Banach.

Soit $D\left[\frac{1}{\pi}\right]$ le module de Dieudonné contravariant rationnel de $\mathcal{G}_k$. Des résultats précédents on déduit donc que l'on a des isomorphismes d'espaces de Banach

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}[F,V_\pi]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) \simeq \bigoplus_{\substack{\lambda\in\mathbb{Q}\cap[0,1]\\ \lambda=\frac{d}{h},\,(d,h)=1}} \left(B^{\varphi^h=\pi^d}\right)^{\oplus m_\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de la pente λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $(D\left[\frac{1}{\pi}\right], F)$. À l'identification $\mathcal{O}_C^\flat = \mathcal{O}_F$ est associée un morphisme

$$\theta : W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow \mathcal{O}_C$$

qui s'étend en

$$\theta : B^+ \longrightarrow C.$$

On peut alors interpréter géométriquement le morphisme composé

$$X(\mathcal{G})(\mathcal{O}_C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}[F,V_\pi]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) \xrightarrow{\theta_*} \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], C).$$

Plus précisément, on dispose du lemme suivant analogue du lemme 4.5.5.

Lemme 4.5.12. — *Si $f \in QuasiHom(G, \mathbb{G}_a^{rig})$ et $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}} \in X(G)(C)$, la suite $(\pi^n f(x_n))_{n\geq 0}$ est convergente dans C. Cela définit un morphisme de E-espaces vectoriels*

$$\begin{array}{rcl} X(G)(C) & \longrightarrow & Hom_C\big(QuasiHom(G, \mathbb{G}_a^{rig})/\sim, C\big) \\ (x_n)_{n\in\mathbb{Z}} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^n f(x_n). \end{array}$$

La proposition qui suit donne l'interprétation géométrique annoncée dont la démonstration est laissée au lecteur.

Proposition 4.5.13. — *Via l'identification $D\left[\frac{1}{\pi}\right] \otimes C = QuasiHom(G, \mathbf{G}_a^{rig})$, le morphisme composé*

$$\begin{array}{rcl} X(G)(C) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_k(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} Hom_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}[F,V_\pi]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) & \xrightarrow{\theta} & Hom_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], C) \\ & = & Hom_C(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \otimes C, C) \end{array}$$

coïncide avec le morphisme $(x_n)_n \mapsto \lim\limits_{n\to+\infty} \pi^n f(x_n)$ du lemme précédent.

Des résultats précédents on déduit la proposition suivante.

Proposition 4.5.14. — *Soit $D_C = D \otimes_{W_{\mathcal{O}}(k)} C$. Si l'on note* $\operatorname{Fil} D_C^*$ *la filtration de Hodge du dual de D_C et*

$$\operatorname{Fil} Hom_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) = \theta_*^{-1}(\operatorname{Fil} D_C),$$

il y a un isomorphisme de suites exactes d'espaces de Banach

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & V_\pi(\mathcal{G}) \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & X(G)(C) \arrow[r, "\log"] \arrow[d, "\sim"] & Lie\, G \arrow[r] \arrow[d, "\sim"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \operatorname{Fil} Hom_{W_{\mathcal{O}}(k)[F]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) \arrow[r] & Hom_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}[F]}(D\left[\tfrac{1}{\pi}\right], B^+) \arrow[r, "\theta"] & D_C^*/\operatorname{Fil} D_C^* \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Exemple 4.5.15. — Soit $\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}$ le $\mathcal{O}$-module π-divisible sur $\mathcal{O}_E$ de l'exemple 4.3.2. Si $C = \widehat{\overline{E}}$, $F = C^\flat$, la suite exacte

$$0 \longrightarrow V_\pi\big(\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}\big) \longrightarrow X\big(\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}\big) \longrightarrow \operatorname{Lie} \widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \otimes C \longrightarrow 0$$

s'identifie à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker(\theta_{|B^{\varphi^h=\pi}}) \longrightarrow \big(B^+\big)^{\varphi^h=\pi} \xrightarrow{\theta} C \longrightarrow 0.$$

Les morphismes $\theta, \theta \circ \varphi, \ldots, \theta \circ \varphi^{h-1} : \big(B^+\big)^{\varphi^h=\pi} \to C$ sont donnés par les quasi-logarithmes de $\widetilde{\mathcal{G}}_{1,h}$, θ correspondant au logarithme.

4.6. Espaces vectoriels formels et spectraux

Dans cette section on va encore plus loin dans l'interprétation géométrique des espaces de Banach des sections précédentes.

4.6.1. E-espaces vectoriels formels. —

4.6.1.1. Définition. — Soit R une $\mathcal{O}_E$-algèbre anneau I-adique pour un idéal I contenant π. Considérons le $\operatorname{Spf}(R)$-schéma formel

$$\widehat{\mathbb{A}}^d = \operatorname{Spf}(R[\![x_1, \ldots, x_d]\!])$$

où $R[\![x_1, \ldots, x_d]\!]$ est muni de la topologie $I + (x_1, \ldots, x_d)$-adique. Comme faisceau fppf sur $\operatorname{Spf}(R)$, pour un $\operatorname{Spf}(R)$-schéma U,

$$\widehat{\mathbb{A}}^d(U) = \{(x_1, \ldots, x_d) \in \Gamma(U, \mathcal{O}_U)^d \mid \forall i,\ x_i \text{ est nilpotent}\}.$$

Soit

$$\alpha : \widehat{\mathbb{A}}^d \longrightarrow \widehat{\mathbb{A}}^d$$

défini par $\alpha^* x_i = x_i^p$. Considérons le système projectif

$$\widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \ldots \xleftarrow{\alpha} \widehat{\mathbb{A}}^d \xleftarrow{\alpha} \ldots.$$

Sa limite projective $\widehat{\mathcal{A}}_R^d$ comme faisceau fppf sur $\mathrm{Spf}(R)$ est représentée par le schéma formel qui est le spectre formel de l'anneau

$$\Big(\bigcup_{n\geq 0} R[\![x_1^{p^{-n}},\dots,x_d^{p^{-n}}]\!]\Big)^{\widehat{}}$$

où la complétion est pour la topologie $I+(x_1,\dots,x_d)$-adique. Concrètement,

$$\begin{aligned}&\Big(\bigcup_{n\geq 0} R[\![x_1^{p^{-n}},\dots,x_d^{p^{-n}}]\!]\Big)^{\widehat{}}\\ =\ &\Big\{\sum_{\alpha\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d}\mid \forall A>0,\ \forall k\in\mathbb{N},\ \{\alpha\mid |\alpha|\leq A,\ a_\alpha\notin I^k\}\text{ est fini}\Big\}.\end{aligned}$$

En particulier, si la topologie de R est la topologie discréte il s'agit des séries formelles à exposants fractionnaires dans $\mathbb{N}\big[\frac{1}{p}\big]$ à support localement fini dans $\mathbb{R}_+^d$. Nous adopterons la notation suivante.

Définition 4.6.1. — Si R est un anneau adique nous noterons

$$R\{\{x_1^{p^{-\infty}},\dots,x_d^{p^{-\infty}}\}\} := \Big(\bigcup_{n\geq 0} R[\![x_1^{p^{-n}},\dots,x_d^{p^{-n}}]\!]\Big)^{\widehat{}}.$$

Définition 4.6.2. — Un E-espace vectoriel formel de dimension d sur $\mathrm{Spf}(R)$ est un $\mathrm{Spf}(R)$-schéma formel en E-espaces vectoriels isomorphe à $\widehat{\mathcal{A}}_R^d$ en tant que $\mathrm{Spf}(R)$-schéma formel pointé.

4.6.2. E-espace vectoriel formel associé à $\mathcal{O}$-module formel π-divisible en caractéristique positive. — Soit R une $\mathcal{O}_E$-algèbre adique.

Définition 4.6.3. — Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur R. On note $X(\mathcal{G})$ le faisceau fppf

$$X(\mathcal{G}) = \varprojlim_{\mathbb{N}} \mathcal{G}$$

où les applications de transition sont $\mathcal{G}\xrightarrow{\times\pi}\mathcal{G}$.

Supposons maintenant R annulé par π. Alors, $\widehat{\mathcal{A}}_R^d = \varprojlim_{\mathbb{N}} \widehat{\mathbb{A}}^d$ où les applications de transition sont données par le Frobenius relatif de $\widehat{\mathbb{A}}^d/\mathrm{Spf}(R)$. Si de plus R est parfait alors

$$R\{\{x_1,\dots,x_d\}\} = \big(R[\![x_1,\dots,x_d]\!]^{\mathrm{perf}}\big)^{\widehat{}}.$$

Proposition 4.6.4. — *Supposons R parfait. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible.*

1. *$X(\mathcal{G})$ est un E-espace vectoriel formel*

2. Comme foncteurs

$$R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels}$$

il y a un isomorphisme canonique

$$X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G} \circ (-)^\flat$$

où

$$\begin{array}{rcl} (-)^\flat : R\text{-algèbres adiques} & \longrightarrow & R\text{-algèbre topologiques} \\ A & \longmapsto & \varprojlim\limits_{\mathbb{N}, Frob_q} A \end{array}$$

muni de la topologie limite projective.

Démonstration. Comme dans la preuve du lemme 4.5.10, il y a un morphisme de systèmes projectifs

$$\begin{tikzcd} \mathcal{G} & \mathcal{G} \arrow[l, "\times\pi"'] \arrow[d, "V_\pi"] & \dots \arrow[l, "\times\pi"'] & \mathcal{G}_k \arrow[l, "\times\pi"'] \arrow[d, "V_\pi^n"] & \dots \arrow[l, "\times\pi"'] \\ \mathcal{G} \arrow[u, equal] & \mathcal{G}^{(q^{-1})} \arrow[l, "F"'] & \dots \arrow[l, "F"'] & \mathcal{G}^{(q^{-n})} \arrow[l, "F"'] & \dots \arrow[l, "F"'] \end{tikzcd}$$

qui induit un isomorphisme

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}, \times\pi} \mathcal{G} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n\in\mathbb{N}, F} \mathcal{G}^{(q^{-n})}.$$

□

Bien sûr, si A est une R-algèbre adique parfaite

$$X(\mathcal{G})(A) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}(A^\flat) = \mathcal{G}(A).$$

4.6.3. Relèvement canonique en caractéristique 0. — Toute $\mathbb{F}_q$-algèbre parfaite A possède un unique relèvement en une $\mathcal{O}_E$-algèbre π-adique sans π-torsion, $W_{\mathcal{O}}(A)$. Si de plus A est I-adique alors $W_{\mathcal{O}}(A)$ est adique relativement à l'idéal $(\pi) + ([a])_{a\in I}$. Cela définit un plongement de catégories

$$W_{\mathcal{O}} : \mathbb{F}_q\text{-algèbres adiques parfaites} \hookrightarrow \mathcal{O}_E\text{-algèbres adiques sans } \pi\text{-torsion}.$$

Lemme 4.6.5. — *Soit R une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite et $W_{\mathcal{O}}(R)$ la $\mathcal{O}_E$-algèbre adique associée. Le morphisme de $W_{\mathcal{O}}(R)$-algèbres*

$$\begin{array}{rcl} \bigcup\limits_{n\geq 0} W_{\mathcal{O}}(R)[\![x_1^{p^{-n}}, \dots, x_d^{p^{-n}}]\!] & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}}\big(R\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}\big) \\ x_i^{p^{-n}} & \longmapsto & [x_i^{p^{-n}}] \end{array}$$

s'étend en un isomorphisme de $W_{\mathcal{O}}(R)$-algèbres adiques

$$W_{\mathcal{O}}(R)\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\} \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}}\big(R\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}\big).$$

Démonstration. Le morphisme est continu et s'étend donc aux complétés. Les deux algèbres sont π-adiques sans π-torsion de réduction modulo π des algèbres parfaites. Il suffit donc de vérifier que le morphisme annoncé induit un isomorphisme modulo π. □

De ce lemme on déduit que si R est une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite et $\mathfrak{E} = \mathrm{Spf}(A)$ est un E-espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(R)$ alors $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(A))$ est un E-espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(R))$.

Définition 4.6.6. — Soit R une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite et $\mathfrak{E}$ un E-espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(R)$. On note $\widetilde{\mathfrak{E}}$ le E-espace vectoriel formel sur $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(R))$ égal à $\mathrm{Spf}(W_{\mathcal{O}}(A))$ que l'on appelle le relèvement canonique de $\mathfrak{E}$.

Proposition 4.6.7. — *Soit R une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite et $\mathfrak{E}$ un E-espace vectoriel formel sur R.*

1. *Comme foncteurs*

$$W_{\mathcal{O}}(R)\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels},$$

il y a un isomorphisme

$$\widetilde{\mathfrak{E}} \simeq \mathfrak{E} \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R).$$

2. *Comme foncteurs*

$$R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow E\text{-espaces vectoriels}$$

il y a un isomorphisme

$$\mathfrak{E} \simeq \widetilde{\mathfrak{E}} \circ W_{\mathcal{O}}.$$

où

$$W_{\mathcal{O}} : R\text{-algèbres adiques} \longrightarrow W_{\mathcal{O}}(R)\text{-algèbres adiques.}$$

Démonstration. Cela résulte de la propriété d'adjonction de la proposition 2.1.7 (tout du moins une version améliorée de cette proposition pour des anneaux topologiques). □

Par exemple, si $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur R et $\widetilde{X}(\mathcal{G})$ désigne le relèvement canonique de $X(\mathcal{G})$,

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}) \simeq X(\mathcal{G}) \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq \mathcal{G} \circ (-)^\flat \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq \mathcal{G} \circ (-)^\flat,$$

l'isomorphisme $(-)^\flat \circ (- \otimes_{W_{\mathcal{O}}(R)} R) \simeq (-)^\flat$ résultant de la proposition 2.1.7.

4.6.4. Espace vectoriel formel associé à un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible en inégales caractéristiques. —

Proposition 4.6.8. — *Soit R une $\mathcal{O}_E$-algèbre adique et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur R. Supposons qu'il existe une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite A munie d'un morphisme $A \to R/\pi R$ ainsi qu'un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible $\mathcal{H}$ sur A et une quasi-isogénie*

$$\rho : \mathcal{H} \otimes_A R/\pi R \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_R R/\pi R.$$

Alors :

1. *$X(\mathcal{G})$ est un E-espace vectoriel formel.*
2. *Soit $W_{\mathcal{O}}(A) \to R$ le relèvement canonique du morphisme $A \to R/\pi R$. La quasi-isogénie ρ induit un isomorphisme*

$$\widetilde{X}(\mathcal{H})\hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(A)} R \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G})$$

où $\widetilde{X}(\mathcal{H})$ désigne le relèvement canonique de $X(\mathcal{H})$.

Démonstration. Il suffit de montrer le point (2). La proposition 4.5.2 se traduit en disant qu'il y a un isomorphisme de foncteurs sur les R-algèbres adiques

$$X(\mathcal{G}) \xrightarrow{\sim} X(\mathcal{G}) \circ (- \otimes_R R/\pi R).$$

Maintenant, si B est une R-algèbre adique, il y a une suite d'isomorphismes fonctoriels en B

$$\begin{array}{ccc} X(\mathcal{G})(B) & \xrightarrow{\sim} & X(\mathcal{G})(B/\pi B) \\ & \xrightarrow[\sim]{X(\rho)^{-1}} & X(\mathcal{H})(B/\pi B) \\ & \simeq & \widetilde{X}(\mathcal{H})(B). \end{array}$$

On en déduit facilement la proposition. □

Corollaire 4.6.9. — *Soit $K|E$ un corps valué complet de corps résiduel k_K parfait. Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_K$ de fibre spéciale $\mathcal{G}_{k_K}$ sur le corps résiduel. Fixons une section de la projection $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \to k_K$. Supposons que l'identité de $\mathcal{G}_{k_K}$ se relève en une quasi-isogénie (nécessairement unique)*

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K} \otimes_{k_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G} \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

Il y a alors un isomorphisme

$$X(\mathcal{G}) \simeq \widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})\hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(k_K)}\mathcal{O}_K.$$

En particulier, **l'espace vectoriel formel $X(\mathcal{G})$ ne dépend que de la fibre spéciale de $\mathcal{G}$.**

Exemple 4.6.10. — Considérons le cas de $\widehat{\mathbb{G}}_m$ sur $\mathbb{Z}_p$. Soit le système inductif $(\mathbb{Z}_p[\![U_i]\!])_{i\in\mathbb{N}}$ où $U_i \mapsto (1+U_{i+1})^p - 1$. Il y a alors un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\} & \longrightarrow & \widehat{\Big(\bigcup_{i\geq 0} \mathbb{Z}_p[\![U_i]\!]\Big)} \\ T^{p^{-n}} & \longmapsto & \lim_{k\to+\infty} U_{n+k}^{p^k} \end{array}$$

où la complétion est pour la topologie (p, U_0)-adique. La loi de $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel formel associée au système de coordonnées précédent sur $X(\widehat{\mathbb{G}}_m)$,

$$\Delta : \mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\} \to \mathbb{Z}_p\{\{X^{p^{-\infty}}, Y^{p^{-\infty}}\}\},$$

est alors donnée par

$$\Delta(T^{p^{-n}}) = \sum_{\substack{\alpha,\beta\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]\cap[0,1] \\ \alpha+\beta\geq 1}} a_{\alpha,\beta} X^{\alpha p^{-n}} Y^{\beta p^{-n}}$$

où

$$a_{\alpha,\beta} = \lim_{n\to+\infty} \binom{p^n}{p^n(1-\alpha), p^n(1-\beta), p^n(\alpha+\beta-1)},$$

un entier p-adique qui lorsque $p \neq 2$ et $\alpha \neq 1$ ou bien $\beta \neq 1$ est de valuation $1 - \inf\{v_p(\alpha), v_p(\beta), v_p(\alpha+\beta)\}$.

4.6.5. Espaces spectraux. — Étant donné un système projectif d'espaces rigides analytiques $(X_n)_{n\geq 0}$ dont les morphismes de transition sont finis et surjectifs, en général l'espace $\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} X_n$ n'a pas de sens dans le contexte de la géométrie analytique rigide de Tate. Dans cette section on donne un sens à ces objets lorsque chacun des X_n est un espace rigide réduit quasi-Stein, le point étant qu'un espace rigide réduit quasi-Stein X est complètement déterminé par l'algèbre de Fréchet $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ munie de la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts admissibles quasicompacts. On adopte pour cela le point de vue de Berkovich concernant la géométrie analytique p-adique ([**6**]).

4.6.5.1. Généralités. — On fixe $K|\mathbb{Q}_p$ un corps valué complet pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$ étendant la valuation p-adique.

Définition 4.6.11. — Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre topologique.

1. On note
$$\mathcal{M}(\mathcal{A})$$
l'ensemble des valuations $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ continues étendant la valuation de K.
2. Si $x \in \mathcal{M}(A)$ et $f \in \mathcal{A}$ on notera $v(f(x)) := x(f)$ et $|f(x)| := p^{-v(f(x))}$.

3. Si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $f \in \mathcal{A}$ on note
$$\|f\|_\Omega = \sup\{|f(x)| \mid x \in \Omega\}.$$
4. Un sous-ensemble $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est dit borné s'il existe un voisinage U de 0 dans $\mathcal{A}$ tel que $\sup\{|f(x)|| \ f \in U, \ x \in U\} < +\infty$.

Dire que les valuations que l'on considère sont continues est équivalent à dire que pour tout $x \in \mathcal{M}(\mathcal{A})$, l'ensemble $\{x\}$ est borné. Bien sûr, si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné la quantité $\|f\|_\Omega$ est finie. Cela définit alors une semi-norme sous-multiplicative
$$\|.\|_\Omega : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}_+$$
vérifiant de plus pour tout entier positif n, $\|f^n\|_\Omega = \|f\|_\Omega$. Remarquons qu'une union finie d'ensembles bornés et bornée et que bien sûr, $\Omega_1 \subset \Omega_2$ avec Ω_2 borné implique que Ω_1 l'est également.

Définition 4.6.12. — Une K-algèbre spectrale est une K-algèbre topologique $\mathcal{A}$ telle que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit union dénombrable d'ensembles bornés, la topologie de $\mathcal{A}$ soit la topologie définie par la famille de semi-normes $(\|.\|_\Omega)_{\Omega \text{Borné}}$ et $\mathcal{A}$ soit séparée complète.

Nous adopterons la définition suivante concernant la topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$.

Définition 4.6.13. — Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre topologique. Munissons tout sous-ensemble borné de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ de la topologie faible des applications de $\mathcal{A}$ à valeurs dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. La topologie de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est alors la topologie limite inductive obtenue en écrivant $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \bigcup_{\Omega \text{ borné}} \Omega$.

Les algèbres spectrales $\mathcal{A}$ telles que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ soit borné sont les algèbres de Banach spectrales. Dans ce cas là, $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact non vide ([**6**] 1.2.1). On notera alors $\|.\|_\infty := \|.\|_{\mathcal{M}(\mathcal{A})}$.

Il résulte de la définition des algèbres spectrales que ce sont des espaces de Fréchet. On vérifie facilement la proposition suivante.

Proposition 4.6.14. — *Soit $\mathcal{A}$ une K-algèbre topologique.*

1. *Tout sous-ensemble borné de $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ est compact.*
2. *Si $\Omega \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné alors le complété $(\mathcal{A}, \|.\|_\Omega)\widehat{\ }$ est une algèbre de Banach spectrale de spectre un sous-ensemble borné $\Omega^c \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ contenant Ω (« l'enveloppe convexe holomorphe » de Ω). De plus, comme normes sur $(\mathcal{A}, \|.\|_\Omega)\widehat{\ }$, $\|.\|_\Omega = \|.\|_\infty$ et comme normes sur $\mathcal{A}$, $\|.\|_\Omega = \|.\|_{\Omega^c}$.*
3. *Supposons que $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ s'écrive comme une union dénombrable d'ensembles bornés. L'algèbre*
$$\mathcal{A}^{sp} := \varprojlim_{\Omega \text{ borné}} (\mathcal{A}, \|.\|_\Omega)\widehat{\ }$$

est une algèbre spectrale munie d'un morphisme continu $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{sp}$ qui induit un homéomorphisme $\mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A})$. De plus, $\mathcal{A}$ est spectrale si et seulement si $\mathcal{A} \to \mathcal{A}^{sp}$ est un isomorphisme. Le foncteur $\mathcal{A} \mapsto \mathcal{A}^{sp}$ est un adjoint à droite à l'inclusion de la catégorie des algèbres spectrales dans celle des K-algèbres topologiques dont le spectre est union dénombrable d'ensembles bornés.

4. *Si $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système projectif d'algèbres de Banach spectrales alors $\mathcal{A} = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n$ est spectrale. Si de plus les morphismes de transition $\mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ sont d'image dense alors $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n) \subset \mathcal{M}(\mathcal{A})$ est borné, $\mathcal{M}(\mathcal{A}) = \cup_{n\geq 0}\mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ et $(\mathcal{A}, \|.\|_{\mathcal{M}(\mathcal{A}_n)})^{\widehat{}} \xrightarrow{\sim} \mathcal{A}_n$.*

Rappelons que si $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système projectif d'espaces de Banach à applications de transition d'image dense et $V = \varprojlim_{n\in\mathbb{N}} V_n$ est l'espace de Fréchet associé alors les projections $\varprojlim_n V_n \xrightarrow{pr_i} V_i$ sont d'image dense et pour tout espace de Banach W,

$$\varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{Hom}(V_n, W) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}(V, W).$$

De cela on déduit la proposition suivante.

Proposition 4.6.15. — *La catégorie des K-algèbres spectrales est équivalente à la pro-catégorie des systèmes projectifs de K-algèbres de Banach spectrales $(\mathcal{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dont les morphismes de transition sont d'image dense où par pro-catégorie on entend la relation*

$$Hom(\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{A}_n, \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_m) = \varinjlim_{n\in\mathbb{N}} \varprojlim_{m\in\mathbb{N}} Hom(\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_m)$$

pour $(\mathcal{A}_n)_n$ et $(\mathcal{B}_m)_m$ deux systèmes projectifs du type précédent.

Nous adopterons la définition suivante.

Définition 4.6.16. — La catégorie des K-espaces spectraux est la catégorie opposée à celle des K-algèbres spectrales. On note $\mathcal{M}(\mathcal{A})$ l'espace spectral associé à $\mathcal{A}$. Si X est un K-espace spectral on note $|X|$ l'espace topologique associé

Tout système inductif $(X_n)_{n\geq 0} = \mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ d'espaces spectraux bornés possède une limite inductive $\mathcal{M}(\varprojlim_n \mathcal{A}_n)$ dans la catégorie des espaces spectraux. De plus, si l'on se restreint aux systèmes inductifs du type précédent en supposant de plus que les images des morphismes $\mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ sont denses, cela définit une équivalence entre la ind-catégorie de tels systèmes inductifs et la catégorie des espaces spectraux.

Tout espace spectral X définit un foncteur

$$\begin{array}{rcl} K\text{-algèbres de Banach spectrales} & \longrightarrow & \text{Ensembles} \\ \mathcal{A} & \longmapsto & X(\mathcal{A}). \end{array}$$

qui caractérise complètement l'espace spectral X. Si $X = \varinjlim_n X_n$ avec $X_n = \mathrm{sp}(\mathcal{A}_n) \to \mathrm{sp}(\mathcal{A}_{n+1}) = X_{n+1}$ et $\mathcal{A}_{n+1} \to \mathcal{A}_n$ d'image dense alors le foncteur précédent est une limite inductive

$$X(-) = \varinjlim_n X_n(-).$$

Soit X un espace spectral. Tout $x \in X$ définit un corps valué complet $\mathcal{K}(x)$. Si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et x correspond à la valuation $v : \mathcal{A} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ soit $\mathfrak{p}_x = v^{-1}(\{+\infty\}) \in \mathrm{Spec}(\mathcal{A})$ son support. Alors, $\mathcal{K}(x)$ est le complété du corps des fractions de $\mathcal{A}/\mathfrak{p}_x$ relativement à v. Si $L|K$ est une extension valuée complète, $\mathcal{M}(L)$ est réduit à un seul point et il y a une application

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{M}(L), X) = X(L) \longrightarrow |X|.$$

Chaque $x \in |X|$, est l'image d'un élément canonique dans $X(\mathcal{K}(x))$ qui s'envoie sur x via l'application précédente. En particulier,

$$X(K) \subset |X|$$

qui est un sous-espace topologique totalement discontinu égal à

$$\{x \in |X| \mid \mathcal{K}(x) = K\}.$$

Enfin, d'après ([**6**] 1.3.4) $|X|$ est réduit à un seul point si et seulement si il est de la forme $\mathcal{M}(L)$ avec $L|K$ valuée complète.

La catégorie des espaces spectraux possède des produits fibrés. Plus précisément, si $X = \mathcal{M}(\mathcal{A})$ et $Y = \mathcal{B})$ sont des espaces spectraux bornés alors

$$X \times Y = \mathcal{M}\big((\mathcal{A}\hat{\otimes}_K\mathcal{B})^{sp}\big),$$

où $(\mathcal{A}\hat{\otimes}_K\mathcal{B})^{sp}$ est le complété spectral de $\mathcal{A}\hat{\otimes}_K\mathcal{B}$ qui est également le complété spectral de la K-algèbre normée $\mathcal{A} \otimes_K \mathcal{B}$. Si $X = \varinjlim_n X_n$, $Y = \varinjlim_n Y_n$ avec pour tout n X_n et Y_n borné alors

$$X \times Y = \varinjlim_n X_n \times Y_n.$$

Remarquons enfin que si $L|K$ est une extension valuée complète on dispose d'un foncteur extension des scalaires des K-espaces spectraux vers les L-espaces spectraux

$$X \longmapsto X\hat{\otimes}_K L$$

défini par $\mathcal{M}(\mathcal{A})\hat{\otimes}_K L = \mathcal{M}\big((\mathcal{A} \otimes_K L)^{sp}\big)$.

4.6.5.2. Espaces spectraux associés aux espaces rigides quasi-Stein. — Soit $X = \mathrm{sp}(\mathcal{A})$ un K-espace rigide affinoïde réduit. Alors, $\mathcal{A}$ est une K-algèbre de Banach spectrale ([**8**] 6.2.4) et définit donc un espace spectral que nous noterons X^{an}. Cela définit un foncteur pleinement fidèle

$$K\text{-espaces rigides affinoïdes réduits} \hookrightarrow K\text{-espaces spectraux bornés.}$$

L'espace topologique associé à l'espace spectral est l'espace sous-jacent de l'espace analytique de Berkovich.

Soit plus généralement X un K-espace rigide quasi-Stein réduit. Rappelons que cela signifie que X possède un recouvrement affinoïde admissible $X = \cup_{n\geq 0} U_n$ avec $U_n \subset U_{n+1}$ un domaine de Weierstrass (c'est à dire $\Gamma(U_{n+1}, \mathcal{O}_X) \to \Gamma(U_n, \mathcal{O}_X)$ d'image dense). Munissons $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ de la topologie de la convergence uniforme sur les ouverts admissibles quasicompacts de X. Alors, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est une K-algèbre spectrale. Nous noterons $X^{an} = \mathcal{M}(\Gamma(X, \mathcal{O}_X))$ l'espace spectral associé. L'espace topologique $|X^{an}|$ est celui de l'espace analytique de Berkovich associé à X. Cela définit un foncteur pleinement fidèle

$$K\text{-espaces rigides de Stein réduits} \hookrightarrow K\text{-espaces spectraux.}$$

Les sous-ensembles bornés de $|X^{an}|$ sont ceux contenus dans un domaine affinoïde. De plus, si $X = \cup_{n\geq 0} U_n$ est un recouvrement affinoïde admissible de X avec $U_n \subset U_{n+1}$ un domaine de Weierstrass,

$$X^{an} = \varinjlim_{n} U_n^{an}$$

dans la catégorie des espaces spectraux.

Exemple 4.6.17. — L'espace spectral associé à la boule ouverte de dimension d, $\mathring{\mathbb{B}}^d$ est le spectre de l'algèbre de Fréchet

$$\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1} \dots x_d^{\alpha_d} \mid \forall \rho < 1, \lim_{|\alpha|\to+\infty} |a_\alpha| \rho^{|\alpha|} = 0 \}$$

munie de la famille de normes de Gauss $(\|.\|_\rho)_{\rho<1}$ associée aux limites précédentes.

4.6.5.3. Espaces spectraux étales. — Soit X un espace topologique compact totalement discontinu. Considérons l'algèbre de Banach des fonctions continues sur X à valeurs dans K, $\mathcal{C}^0(X, K)$ munie de la norme sup. Il s'agit d'une K-algèbre de Banach spectrale. De plus l'application naturelle

$$X \longrightarrow \mathcal{M}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

est un homéomorphisme. De tout cela on déduit que l'on a un foncteur pleinement fidèle

$$\text{Espaces topologiques compacts tot. discontinus} \hookrightarrow \text{Espaces spectraux bornés}$$

On notera

$$X \mapsto X^{\text{ét}} = \mathrm{sp}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

ce foncteur.

Plus généralement, soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K et $C = \widehat{\overline{K}}$. Notons $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$. Soit X un espace topologique compact totalement discontinu muni d'une action continue de G_K. Dans la suite le symbole $\mathcal{C}^\infty$ désigne les fonctions localement constantes. Faisons agir G_K sur les fonctions de X à valeurs dans $\overline{K}$ via la formule $(\sigma.f)(x) = \sigma(f(\sigma^{-1}(x)))$. Considérons la K-algèbre

$$\mathcal{A} = \mathcal{C}^\infty(X, \overline{K})^{G_K}$$

munie de la norme de la convergence uniforme. Il y a un homéomorphisme

$$X/G_K \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(\mathcal{A}) = \mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}).$$

On note alors

$$X^{\text{ét}} := \mathcal{M}(\mathcal{A}^{sp}).$$

Comme précédemment, la correspondance $X \mapsto X^{\text{ét}}$ est fonctorielle. Remarquons de plus que l'on a $X^{\text{ét}} \hat{\otimes}_K C = X^{\text{ét}}$ où dans le membre de droite on a oublié l'action de G_K. Néanmoins on prendra garde qu'à priori en général $\mathcal{A}\hat{\otimes}_K C \neq \mathcal{C}^0(X, C)$.

Plus généralement, soit X un espace topologique localement compact totalement discontinu union dénombrable de compacts et $\mathcal{C}^0(X, K)$ la K-algèbre des fonctions continues sur X à valeurs dans K. Munie de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de X c'est une algèbre spectrale. De plus

$$X \xrightarrow{\sim} \mathrm{sp}(\mathcal{C}^0(X, K)),$$

les sous-ensembles bornés étant les sous-ensembles relativement compacts de X. Notons

$$X^{\text{ét}} = \mathrm{sp}(\mathcal{C}^0(X, K))$$

comme espace spectral. Alors,

$$X^{\text{ét}} = \varinjlim_{\Omega} \Omega^{\text{ét}}$$

où Ω parcourt les sous-ensembles compacts de X. Comme précédemment, ce foncteur s'étend en un foncteur $X \mapsto X^{\text{ét}}$ de la catégorie des espaces topologiques localement compacts totalement discontinus union dénombrables de compacts munis d'une action continue de G_K vers les K-espaces spectraux.

4.6.5.4. Limite projective de tours d'espaces rigides quasi-Stein. — Afin de construire de nouveaux espaces spectraux à partir des espaces rigides nous avons besoin de la construction suivante. Supposons donné un système projectif $(X_n)_{n\geq 0}$ de K-espaces rigides réduits affinoïdes dont les morphismes de transition $X_{n+1} \to X_n$ sont finis

et surjectifs. Notons $X_n = \mathrm{sp}(\mathcal{A}_n)$. L'hypothèse sur les morphismes de transition implique que les morphismes induits d'algèbres de Banach

$$(\mathcal{A}_n, \|.\|_\infty) \longrightarrow (\mathcal{A}_{n+1}, \|.\|_\infty)$$

sont des isométries. Munissons l'algèbre limite inductive

$$\mathcal{A}_\infty = \varinjlim_n \mathcal{A}_n$$

de la norme associée $\|.\|_\infty$ telle que pour tout n le plongement

$$\mathcal{A}_n \hookrightarrow \mathcal{A}_\infty$$

soit une isométrie. Notons

$$\widehat{\mathcal{A}_\infty}$$

le complété de $\mathcal{A}_\infty$ relativement à cette norme. On vérifie alors aisément que :

— $\big(\widehat{\mathcal{A}_\infty}, \|.\|_\infty\big)$ est une K-algèbre de Banach spectrale.

— L'application naturelle d'espaces topologiques $\mathcal{M}(\mathcal{A}_n) \to \varprojlim_n \mathcal{M}(\mathcal{A}_n)$ est un homéomorphisme

— Si $X = \mathcal{M}\big(\widehat{\mathcal{A}_\infty}\big)$ comme espace spectral borné alors les morphismes naturels $X \to X_n^{an}$, $n \in \mathbb{N}$, identifient X à une limite projective du système $(X_n^{an})_{n\geq 0}$ dans la catégorie des espaces spectraux.

Plaçons nous maintenant dans un cadre plus général. Faisons les mêmes hypothèses que précédemment concernant le système projectif $(X_n)_{n\geq 0}$ mis à part le fait que l'on suppose seulement que les $(X_n)_n$ sont des K-espaces rigides réduits quasi-Stein qui ne sont pas nécessairement affinoïdes. Écrivons X_0 sous la forme

$$X_0 = \bigcup_{i\geq 0} U_i,$$

un recouvrement affinoïde admissible avec $U_i \subset U_{i+1}$ un domaine de Weierstrass. Si $p_n : X_n \to X_0$, notons

$$U_{i,n} = p_n^{-1}(U_i).$$

Pour tout i, le système projectif $(U_{i,n})_{n\geq 0}$ satisfait les hypothèses précédentes et on peut donc considérer l'espace spectral borné

$$\varprojlim_{n\geq 0} U_{i,n}.$$

Lorsque i varie ces espaces spectraux forment un système inductifs. De plus si on note $\mathrm{sp}(\mathcal{B}_i)$ cet espace spectral alors les morphisme $\mathcal{B}_{i+1} \to \mathcal{B}_i$ sont d'image dense. On vérifie alors que

$$\varinjlim_{i\geq 0} \varprojlim_{n\geq 0} U_{i,n} = sp\big(\varprojlim_{i\geq 0} \mathcal{B}_i\big)$$

est une limite inductive du système projectif $(X_n)_{n\geq 0}$ dans la catégorie des espaces spectraux. Cette limite projective s'écrit également de la façon suivante. Soit pour

tout n, $X_n = \mathrm{sp}(\mathcal{A}_n)$. La norme sup sur l'ensemble $U_{i,n}$ définit une semi-norme $\|.\|_{i,n}$ sur $\mathcal{A}_n$. Les inclusions $(\mathcal{A}_n, \|.\|_{i,n}) \hookrightarrow (\mathcal{A}_n, \|.\|_{i,n+1})$ étant des isométries cela définit une semi-norme $\|.\|_i$ sur

$$\mathcal{A}_\infty = \bigcup_n \mathcal{A}_n.$$

Alors, $\varprojlim_n X_n$ est le spectre de l'algèbre spectrale complétée de $\mathcal{A}_\infty$ relativement à la famille de semi-normes $(\|.\|_i)_{i\geq 0}$.

Exemple 4.6.18. — Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Supposons donné un système projectif $(X_n)_{n\geq 0}$ de K-espaces rigides étales ayant un nombre dénombrable de composantes connexes à morphismes de transition finis surjectifs. Chaque X_n étant un espace rigide de Stein cela définit un système projectif d'espaces spectraux $(X_n^{\text{ét}})_n$. Soit $X = \varprojlim_n X_n(\overline{K})$ muni de son action continue de G_K. Alors,

$$\varprojlim_n X_n^{an} = \big(\varprojlim_n X_n(\overline{K})\big)^{\text{ét}}.$$

Exemple 4.6.19. — Soit $\mathcal{G}$ un groupe p-divisible sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_K)$ de fibre générique $\mathcal{G}_\eta = (\mathcal{G}[p^n] \otimes K)_{n\geq 1}$ sur $\mathrm{Spec}(K)$. Pour tout n, $\mathcal{G}_\eta[p^n]$ est un K-schéma étale fini et $\Gamma = \varinjlim_n \mathcal{G}_\eta[p^n]^{rig}$ définit donc un K-espace rigide étale en groupes. Alors,

$$\varprojlim_{\mathbb{N}} \Gamma^{an} \simeq V_p(\mathcal{G})^{\text{ét}}$$

où les morphismes de transition dans la limite projective sont $\Gamma^{an} \xrightarrow{\times p} \Gamma^{an}$.

4.6.5.5. Fibre générique de certains schémas formels. — Il y a un foncteur fibre générique

$$\mathfrak{X} \longmapsto \mathfrak{X}^{rig}$$

de la catégorie des $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$-schémas formels affines formellement de type fini, c'est à dire dont l'algèbre est de la forme

$$\mathcal{O}_K[\![x_1, \ldots, x_n]\!]\langle y_1, \ldots y_m\rangle/\text{Idéal}$$

avec pour idéal de définition $(p, x_1, \ldots, x_n)$, vers les K-espaces rigides quasi-Stein. Si $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$, I est un idéal de définition de A alors l'algèbre de Fréchet $\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}})$ admet la description suivante :

$$\Gamma(\mathfrak{X}^{rig}, \mathcal{O}_{\mathfrak{X}^{rig}}) = \varprojlim_{k\geq 0} \Big(\big(A\big[\tfrac{x}{\pi}\big]_{x\in I^k}\big)^{\widehat{}}\big[\frac{1}{\pi}\big]\Big)$$

comme limite projective d'algèbres de Banach où la complétion dans la formule précédente est la complétion π-adique.

Définition 4.6.20. — Soit $\mathfrak{X}$ un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_C)$-schéma formel affine, $\mathfrak{X} = \mathrm{Spf}(A)$ avec A adique et I un idéal de définition de A. Pour tout $k \geq 0$ considérons la $\mathcal{O}_K$-algèbre

$$A_k = A\big[\tfrac{x}{\pi}\big]_{x \in I^k}$$

et $\widehat{A}_k$ son complété π-adique. Soit $\widehat{A_k}\big[\frac{1}{\pi}\big]$ l'algèbre de Banach associée et

$$B = \varprojlim_{k \geq 0} \widehat{A_k}\big[\tfrac{1}{\pi}\big],$$

une K-algèbre de Fréchet. Soit B^{sp} son complété spectral. On note alors

$$\mathfrak{X}^{an} := sp(B^{sp})$$

comme K-espace spectral.

Ainsi si $\mathfrak{X}$ est un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_K)$-schéma formel affine formellement de type fini réduit, via le plongement $X \mapsto X^{an}$ des K-espace rigides réduits quasi-Stein dans les C-espaces spectraux on retrouve la définition classique de $\mathfrak{X}^{an}$, c'est à dire avec les notations précédentes $(\mathfrak{X}^{rig})^{an} = \mathfrak{X}^{an}$.

Comme foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathfrak{X}^{an} : K\text{-Algèbres de Banach spectrales} & \longrightarrow & \text{Ensembles} \\ \mathcal{A} & \longmapsto & \mathfrak{X}(\mathcal{A}^0) \end{array}$$

où $\mathcal{A}^0 = \{a \in \mathcal{A} \mid \|a\|_\infty \leq 1\}$. Cela caractérise complètement l'espace spectral $\mathfrak{X}^{an}$.

Proposition 4.6.21. — *Soit $(\mathfrak{X}_n)_{n \geq 0}$ un système projectif de Spf($\mathcal{O}_K$)-schémas formels affines formellement de type fini dont les morphismes de transition sont adiques finis libres et surjectifs. Il y a alors un isomorphisme canonique*

$$\big(\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n\big)^{an} \xrightarrow{\sim} \varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n^{an}$$

où si $\mathfrak{X}_n = Spf(A_n)$, I est un idéal de définition de A_0, $\varprojlim_{n \geq 0} \mathfrak{X}_n$ est le spectre formel du complété I-adique de $\bigcup_{n \geq 0} A_n$.

Démonstration. Les projections $\varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{X}_k$ lorsque k varie induisent des morphismes compatibles $(\varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n)^{an} \to \mathfrak{X}_k^{an}$ lorsque k varie et donc un morphisme naturel comme dans l'énoncé. Si $\mathcal{A}$ est une K-algèbre de Banach spectrale on a

$$\begin{aligned}\big(\varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n\big)^{an}(\mathcal{A}) &= (\varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n)(\mathcal{A}^0)\\ &= \varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n(\mathcal{A}^0)\\ &= \varprojlim_{n\geq 0} \mathfrak{X}_n^{an}(\mathcal{A}).\end{aligned}$$

Le morphisme précédent est donc un isomorphisme. □

Définition 4.6.22. — On note $K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\rangle\rangle$ la K-algèbre

$$\Big\{ \sum_{\alpha\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]^d} a_\alpha x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d} \mid a_\alpha \in K,\ \forall \rho<1 \lim_{|\alpha|\to+\infty} |a_\alpha|\rho^{|\alpha|} = 0\Big\}.$$

Pour une série $f = \sum_\alpha a_\alpha x_1^{\alpha_1}\dots x_d^{\alpha_d}$ dans cette algèbre et $\rho<1$ on pose

$$\|f\|_\rho = \sup\big\{|a_\alpha|\rho^{|\alpha|} \mid \alpha\in\mathbb{N}\big[\tfrac{1}{p}\big]^d\big\}.$$

On vérifie alors aisément la proposition qui suit.

Proposition 4.6.23. —

1. *La K-algèbre $K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\rangle\rangle$ munie de la famille de normes $(\|.\|_\rho)_{0<\rho<1}$ est spectrale.*
2. *On a*
$$Spf\big(\mathcal{O}_K\{\{x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\}\}\big)^{an} = \mathcal{M}\big(K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\rangle\rangle\big).$$
3. *On a*
$$\mathcal{M}\big(K\langle\langle x_1^{p^{-\infty}}, \dots, x_d^{p^{-\infty}}\rangle\rangle\big) = \varprojlim_{n\geq 0} \mathring{\mathbb{B}}^d$$
où $\mathring{\mathbb{B}}^d$ est la boule ouverte de dimension d spectrale et les morphismes de transition sont donnés sur les coordonnées de cette boule par $(x_1,\dots,x_d)\mapsto(x_1^p,\dots,x_d^p)$. Via cette identification, pour $0<\rho<1$ la norme $\|.\|_\rho$ est la norme sup sur le compact
$$\varprojlim_{n\geq 0} |\mathbb{B}^d(0,\rho^{p^{-n}})| \subset |\varprojlim_{n\geq 0} \mathring{\mathbb{B}}^d|$$
où $\mathbb{B}^d(0,\rho^{p^{-n}})$ désigne la boule spectrale fermée de dimension d et de rayon $\rho^{p^{-n}}$.

4.6.5.6. Lien avec les algèbres de Fréchet B^+. — L'anneau B^+ défini précédemment (1.10) admet la généralisation suivante.

Définition 4.6.24. — Soit R une $\mathbb{F}_q$-algèbre adique parfaite. Si J est un idéal ouvert de R notons

$$B_J^+ := \Big(W_{\mathcal{O}_E}(R)\big[\tfrac{[x]}{\pi}\big]_{x\in J}\Big)^{\widehat{}}\big[\tfrac{1}{\pi}\big],$$

une E-algèbre de Banach où la complétion est pour la topologique π-adique. Si I est un idéal de définition de R on pose alors

$$B_R^+ := \varprojlim_{k\geq 1} B_{I^k}^+$$

comme E-algèbre de Fréchet.

Bien sûr la définition de B^+ précédente ne dépend pas du choix de l'idéal de définition I choisit. On vérifie que le Frobenius des vecteurs de Witt s'étend en un Frobenius bijectif φ sur B^+. L'anneau noté B^+ précédemment n'est rien d'autre que $B^+_{\mathcal{O}_F}$.

On vérifie aussitôt la proposition suivante en utilisant le lemme 4.6.5.

Proposition 4.6.25. — *Il y a un isomorphisme canonique d'algèbres de Fréchet*

$$B^+_{k\{\{x_1^{p^{-\infty}},\ldots,x_d^{p^{-\infty}}\}\}} \simeq W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}}\langle\langle x_1^{p^{-\infty}},\ldots,x_d^{p^{-\infty}}\rangle\rangle.$$

4.6.6. Espaces de Banach spectraux associés aux espaces vectoriels formels. — Soit $K|E$ une extension valuée complète et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Notons k_K le corps résiduel de $\mathcal{O}_K$ et $\mathcal{G}_{k_K}$ la réduction de $\mathcal{G}$ sur ce corps résiduel. On suppose que k_K est parfait et on fixe une section $k_K \to \mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K$ de la projection $\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \twoheadrightarrow k_K$. Comme précédemment on fait l'hypothèse que l'identité de $\mathcal{G}_{k_K}$ se relèvre en une quasi-isogénie

$$\rho : \mathcal{G}_{k_K}\otimes\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K \longrightarrow \mathcal{G}\otimes\mathcal{O}_K/\pi\mathcal{O}_K.$$

Notons

$$G = (\mathcal{G}^{rig})^{an} = \mathcal{G}^{an}$$

le groupe spectral associé à la fibre générique $\mathcal{G}^{rig}$ de $\mathcal{G}$.

Définition 4.6.26. — On note

$$X(G) = \varprojlim_{\mathbb{N}} G$$

dans la catégorie des K-espaces spectraux où les applications de transition dans la limite projective sont $G \xrightarrow{\times\pi} G$.

Bien sûr $X(G)$ est un groupe dans la catégorie des espaces spectraux et même un E-espace vectoriel dans cette même catégorie. Le plongement $X(G)(K) \subset |X(G)|$ et la topologie de $|X(G)|$ munissent $X(G)(K)$ d'une structure d'espace topologique dont on vérifie qu'il s'agit d'une structure de E-espace de Banach. Plus précisément, si $U \subset \mathcal{G}^{rig}$ est un sous-groupe affinoïde du groupe rigide $\mathcal{G}^{rig}$ alors

$$\varprojlim_{n\in\mathbb{N}} (p^{-n}U)^{an} \subset X(G)$$

est un sous-$\mathcal{O}_E$-module spectral borné compact du E-espace vectoriel spectral $X(G)$ dont les K-points forment un réseaux définissant la topologie de Banach de $X(G)(K)$.

Proposition 4.6.27. — *Soit $\widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})$ le relèvement canonique sur $W_{\mathcal{O}}(k_K)$ de l'espace vectoriel formel $X(\mathcal{G}_{k_K})$. Il y a un isomorphisme canonique d'espaces vectoriels spectraux*

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an}\hat{\otimes}K \simeq X(G).$$

En particulier, $X(G)$ **ne dépend que de la fibre spéciale $\mathcal{G}_{k_K}$ de $\mathcal{G}$.**

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 4.6.21 et du corollaire 4.6.9. □

On vérifie également que cet isomorphisme induit un homéomorphisme d'espaces de Banach

$$X(\mathcal{G}_{k_K})(\mathcal{R}(\mathcal{O}_K)) \simeq X(G)(K).$$

4.6.7. Interprétation géométrique de l'application des périodes. —

4.6.7.1. Morphismes de Banach spectraux associés aux quasi-logarithmes. — Soit $K|E$ une extension valuée complète et $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_K$. Notons $G = \mathcal{G}^{an}$ comme $\mathcal{O}$-module spectral. Soit $f : \mathcal{G}^{rig} \to \mathbf{G}_a^{rig}$ un quasi-morphisme (def. 4.3.5). Soit $U \subset \mathcal{G}^{rig}$ un sous-$\mathcal{O}_E$-module affinoïde et U^{an} le groupe spectral compact associé. Notons

$$X(U) = \varprojlim_{\mathbb{N}} (p^{-n}U)^{an} = \mathcal{M}(\mathcal{A}_U).$$

Pour tout enier n la fonction rigide

$$p^{-n}U \xrightarrow{f_{p^{-n}U}} \mathbf{G}_a^{rig}$$

définit par composition avec la projection

$$X(U) \longrightarrow (p^{-n}U)^{an}$$

une fonction $f_{U,n} \in \mathcal{A}_U$.

Lemme 4.6.28. — *La suite $(p^n f_{U,n})_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente dans l'algèbre de Banach spectrale $\mathcal{A}_U$. Si f est un quasi-morphisme borné cette suite tend vers* 0.

Démonstration. La démonstration est identique à celle du lemme 4.5.5. □

Notons

$$g_U = \lim_{n\to+\infty} f_{U,n} \in \mathcal{A}_U.$$

Faisant varier U on obtient un élément

$$g \in \varprojlim_U \mathcal{A}_U.$$

Cependant,

$$X(G) = \varinjlim_U X(U) = \mathcal{M}(\varprojlim_U \mathcal{A}_U)$$

et donc g définit un morphisme

$$X(G) \longrightarrow \mathbf{G}_a^{an}$$

dont on vérifie aisément qu'il s'agit d'un morphisme de E-espace vectoriels spectraux.

On a donc défini un morphisme de K-espaces vectoriels

$$\mathrm{QuasiHom}(\mathcal{G}^{rig}, \mathbf{G}_a^{rig})/\sim \longrightarrow \mathrm{Hom}_{E\text{-e.v. spectraux}}(X(G), \mathbf{G}_a^{an}).$$

Exemple 4.6.29. — Reprenons l'exemple 4.6.10, c'est à dire le cas du groupe multipicatif formel. L'isomorphisme $\mathrm{Spf}(\mathbb{Z}_p\{\{T^{p^{-\infty}}\}\}) \xrightarrow{\sim} X(\widehat{\mathbb{G}}_m)$, c'est à dire la loi de $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel formel de l'exemple 4.6.10, induit un isomorphisme d'espaces spectraux $sp(\mathbb{Q}_p\langle\langle T^{p^{-\infty}}\rangle\rangle) \xrightarrow{\sim} X(\widehat{\mathbb{G}}_m^{rig})$, ou encore une loi de groupe spectral en une variable. Dans ces coordonnées, le logarithme

$$\log : X(\widehat{\mathbb{G}}_m^{an}) \longrightarrow \mathbf{G}_a^{rig}$$

est donné par la série

$$\sum_{\substack{\alpha\in\mathbb{N}[\frac{1}{p}]\\ \alpha>0}} \epsilon(\alpha)\frac{T^\alpha}{\alpha} \in \mathbb{Q}_p\langle\langle T^{p^{-\infty}}\rangle\rangle$$

où $\epsilon(\alpha) \in \{\pm 1\}$ est égal à 1 si $p = 2$ et $(-1)^{\alpha \bmod 2}$ sinon.

4.6.7.2. Interprétation géométrique de l'application des périodes et géométrisation des espaces de Banach-Colmez. — Soit $\mathcal{G}$ un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible sur $\mathcal{O}_K$ comme précédemment. Il y a une suite exacte pour la topologie étale de $\mathcal{O}$-modules rigides analytiques

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{rig}[\pi^\infty] \longrightarrow \mathcal{G}^{rig} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{rig} \longrightarrow 0.$$

Elle induit une suite de $\mathcal{O}$-modules spectraux

$$0 \longrightarrow \mathcal{G}^{rig}[\pi^\infty]^{an} \longrightarrow \mathcal{G}^{an} \xrightarrow{\log_{\mathcal{G}}} \mathrm{Lie}\,\mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

Appliquant le foncteur $\varprojlim_{\mathbb{N}} (-)$ à cette suite, où les morphismes de transition sont donnés par $(-) \xrightarrow{\times\pi} (-)$, on obtient une suite de E-espaces vectoriels spectraux

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G})^{\text{ét}} \longrightarrow \widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an}\hat{\otimes}K \longrightarrow \operatorname{Lie}\mathcal{G} \otimes \mathbf{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

Cette suite est exacte au sens suivant. Dans la catégorie des groupes spectraux, $V_\pi(\mathcal{G})^{\text{ét}}$ est le noyau du morphisme de droite. De plus, si $C|K$ est une extension valuée complète algébriquement close alors le morphisme induit

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}_{k_K})^{an}(C) \longrightarrow \operatorname{Lie}\mathcal{G} \otimes C$$

est surjectif. On vérifie en fait que si $K = C$ est algébriquement clos et $\mathcal{A}$ une C-algèbre de Banach sympathique au sens de [**12**] alors la suite associée d'espaces de Banach

$$0 \longrightarrow V_\pi(\mathcal{G}) \longrightarrow \big(\widetilde{X}(\mathcal{G}_k)^{an}\hat{\otimes}C\big)(\mathcal{A}) \longrightarrow \operatorname{Lie} G \otimes \mathcal{A} \longrightarrow 0$$

est excate. La suite précédente est donc une suite exacte d'espaces de Banach de dimension finie au sens de Colmez ([**12**]). Le point supplémentaire que l'on a gagné par rapport à [**12**] est que les espaces de Banach-Colmez précédents ne sont pas seulement définis comme foncteurs abstraits sur des C-algèbres sympathiques mais possèdent un faisceau structural. Ainsi, si $X(\mathcal{G}_k) = \operatorname{Spf}(R)$ alors

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}_k)^{an}\hat{\otimes}C = \mathcal{M}(B_R^+\hat{\otimes}C).$$

CHAPITRE 5

COURBES

Introduction

Dans ce chapitre on développe la notion de courbe en un sens généralisé dont nous aurons besoin dans la suite. On y explique également dans ce cadre là le formalisme des filtrations de Harder-Narasimhan que nous utiliserons dans le théorème de classification des fibrés. On a essayé de mettre systématiquement en avant la différence entre la courbe que l'on va étudier dans la suite et la droite projective. Donnons quelques exemples si X est la courbe que nous définirons et étudierons dans les chapitres qui suivent :

— Si $\infty \in |X|$ est un point fermé alors l'anneau $\Gamma(X \backslash \{\infty\}, \mathcal{O}_X)$ muni de la fonction degré $-\mathrm{ord}_\infty$ est principal « presque-eulcidien » non-euclidien contrairement au cas de $\mathbb{A}^1 = \mathbb{P}^1 \setminus \{\infty\}$.

— Il y a un fibré en droite tautologique $\mathcal{O}_X(1)$ sur X. Il est tel que $H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$ lorsque $d \geq 0$ comme $\mathbb{P}^1$ tandis que $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$ contrairement à $\mathbb{P}^1$.

— Il y a des fibrés semi-stables de pente non-entière sur X contrairement à $\mathbb{P}^1$.

De nombreux rappels faits sur les filtrations de Harder-Narasimhan et les courbes dans divers contextes sembleront évident aux spécialistes de géométrie algébrique, nous les avons inclus pour les arithméticiens (et réciproquement de nombreux rappels des chapitres précédents concernant les divers anneaux en théorie de Hodge p-adique ont dû sembler évidents aux arithméticiens). Le résultat original principal du chapitre est le théorème 5.6.29 qui va nous permettre dans la suite de ramener le théorème de classification des fibrés à des résultats connus concernant les périodes de groupes p-divisibles. Ce dévissage du théorème de classification repose lui-même sur le dévissage intermédiaire qui est le théorème 5.6.26 fortement inspiré des travaux de Kedlaya ([**43**] par exemple) et Hartl-Pink ([**34**]).

5.1. Généralités

Nous adopterons la définition suivante dans ce texte.

Définition 5.1.1. — Une courbe est un couple formé de la donnée d'un schéma noethérien régulier X connexe de dimension 1 séparé sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ et pour tout point fermé $x \in X$ d'un entier $\deg(x) \geq 1$.

Les courbes sont donc les schémas connexes séparés sur $\mathrm{Spec}(\mathbb{Z})$ obtenus par recollement d'un nombre fini de spectres d'anneaux de Dedekind munis d'une fonction degré sur leurs idéaux maximaux. Si X est une courbe nous noterons $|X|$ l'ensemble de ses points fermés, η son point générique et $E(X) = \mathcal{O}_{X,\eta}$ son « corps des fonctions rationnelles ». On vérifie que si X est une courbe alors les ouverts non-vides de X sont exactement les complémentaires des ensembles finis de points fermés de X. Tout $x \in |X|$ définit une valuation

$$\mathrm{ord}_x : E(X) \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$$

normalisée de telle manière à ce que la fonction ord_x soit surjective. Si U est un ouvert non vide de X,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f \in E(X) \mid \forall x \in |U|,\ v_x(f) \geq 0\}.$$

Définition 5.1.2. — Si X est une courbe on note $\mathrm{Div}(X)$ le groupe abélien libre sur $|X|$. Pour $D = \sum_{x \in |X|} m_x[x] \in \mathrm{Div}(X)$ on note

$$\deg(D) = \sum_{x \in |X|} m_x \deg(x).$$

Comme d'habitude, $\mathrm{Div}(X)$, le groupe des diviseurs de Weil, s'identifie aux classes d'isomorphismes de couples $(\mathscr{L}, s)$ où $\mathscr{L}$ est un fibré en droites sur X et $s \in \mathscr{L}_\eta \setminus \{0\}$ une section rationnelle de $\mathscr{L}$ génériquement non nulle, le groupe des diviseurs de Cartier. La loi de groupe sur les diviseurs de Cartier est donnée par $(\mathscr{L}, s).(\mathscr{L}', s') = (\mathscr{L} \otimes \mathscr{L}', s \otimes s')$. Le diviseur de Weil associé au couple $(\mathscr{L}, s)$ est $\mathrm{div}(\mathscr{L}, s) = \sum_x m_x[x]$ où m_x est l'ordre d'annulation ou l'opposé de l'ordre du pôle de la section s en x. Si $D \in \mathrm{Div}(X)$ on note $\mathcal{O}_X(D)$ le fibré en droite tel que pour tout ouvert U,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X(D)) = \{f \in E(X)^\times \mid \mathrm{div}(f_{|U}) + D_U \geq 0\} \cup \{0\}$$

où si $D = \sum_x m_x[x]$, $D_U = \sum_{x \in U} m_x[x] \in \mathrm{Div}(U)$. Il est muni de la section rationnelle donnée par $1 \in F(X)$ et définit donc un diviseur de Cartier. L'application $D \mapsto (\mathcal{O}_X(D), 1)$ définit un inverse à l'application $(\mathscr{L}, s) \mapsto \mathrm{div}(\mathscr{L}, s)$.

Si $f \in F(X)^\times$ on pose

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(\mathcal{O}_X.f, 1) = \sum_{x \in |X|} \mathrm{ord}_x(f) \in \mathrm{Div}(X).$$

Cela définit un morphisme de groupes

$$\mathrm{div} : E(X)^\times \longrightarrow \mathrm{Div}(X).$$

On dispose alors de la suite exacte usuelle

$$\begin{array}{rcl} 0 \longrightarrow \Gamma(X, \mathcal{O}_X)^\times \longrightarrow E(X)^\times \xrightarrow{\mathrm{div}} \mathrm{Div}(X) & \longmapsto & \mathrm{Pic}(X) \longrightarrow 0 \\ D & \longmapsto & [\mathcal{O}_X(D)]. \end{array}$$

Définition 5.1.3. — Une courbe complète est une courbe X telle que

$$\forall f \in E(X)^\times,\ \deg(\mathrm{div}(f)) = 0.$$

Exemple 5.1.4. — Si k est un corps et X est une courbe projective lisse connexe sur k au sens usuel, posant $\forall x \in |X|,\ \deg(x) = [k(x) : k]$, cela définit une courbe complète au sens précédent.

Si X est une courbe complète la fonction degré d'un diviseur définit une fonction degré, $\deg : \mathrm{Pic}(X) \to \mathbb{Z}$.

Lemme 5.1.5. — *Si X est une courbe complète, $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$ est un sous-corps de $E(X)$ algébriquement fermé dans $E(X)$.*

Démonstration. — Pour $f \in E(X)^\times$, puisque $\deg(\mathrm{div}(f)) = 0$

$$f \in \Gamma(X, \mathcal{O}_X) \Leftrightarrow \mathrm{div}(f) \geq 0 \Leftrightarrow \mathrm{div}(f) = 0.$$

On en déduit que $\Gamma(X, O_X)$ est un corps E. Pour tout $x \in |X|$, puisque la valuation ord_x est triviale sur E elle est triviale sur $\overline{E}^{E(X)}$. Il en résulte que $E = \overline{E}^{E(X)}$. □

Définition 5.1.6. — Si X est une courbe complète on appelle corps de définition de X le corps $\Gamma(X, \mathcal{O}_X)$.

Exemple 5.1.7. — Reprenons l'exemple 5.1.4. Le corps de définition de X au sens précédent est la clôture algébrique de k dans $k(X)$.

5.2. Construction de courbes

5.2.1. Anneaux presque euclidiens. — Rappelons qu'un stathme euclidien sur un anneau B est une fonction $\deg : B \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ vérifiant :

1. $\deg(a) = -\infty$ si et seulement si $a = 0$,
2. si $a \in B \setminus \{0\}, b \in B \setminus \{0\}$ alors $\deg(a) \leq \deg(ab)$.

Rappelons également qu'un anneau euclidien est un anneau intègre B muni d'un stathme euclidien vérifiant : $\forall x, y \in B$ avec $y \neq 0$, il existe $a, b \in B$ tels que

$$x = ay + b \quad \text{et} \quad \deg(b) < deg(y).$$

Remarquons que dans un anneau euclidien les éléments de degré 0 sont inversibles.

Définition 5.2.1. — Un anneau presque euclidien est un anneau intègre B muni d'un stathme euclidien deg vérifiant :

1. tout élément de degré 0 dans B est inversible,
2. $\forall x, y \in B$ avec $\deg(y) \geq 1$, il existe $a, b \in B$ tels que $x = ay + b$ et $\deg(b) \leq \deg(y)$.

Bien sûr, tout anneau euclidien est presque euclidien. Notons la proposition suivante que nous n'utiliserons pas dans la suite.

Proposition 5.2.2. — *Soit* $(B, \deg)$ *un anneau presque euclidien dont le stathme est multiplicatif,* $\deg(ab) = \deg(a) + \deg(b)$. *L'anneau* B *est principal si et seulement si pour tout* $x, y \in B \setminus \{0\}$ *de même degré, il existe* $a, b \in B$ *vérifiant*

- *soit* $-\infty \neq \deg(ax + by) < \deg(x)$,
- *ou bien* $ax + by = 0$ *et* $b \in B^\times$.

Démonstration. Supposons B principal. Soient $x, y \in B$ non nuls de même degré. Si $(x) = (y)$ il existe $b \in B^\times$ tel que $x = by$ est le résultat est clair. Sinon, écrivons $x = \delta x'$ et $y = \delta y'$ avec x' et y' premiers entre eux. Si l'on avait $\deg(\delta) = \deg(x)$, cela impliquerait que $\deg(x') = deg(y') = 0$ et donc $x', y' \in B^\times$. Cela est impossible puisque l'on suppose $(x) \neq (y)$. On a donc $\deg(\delta) < \deg(x)$. Si $a, b \in B$ sont tels que $ax' + by' = 1$ on obtient alors $ax + by = \delta$.

Montrons la réciproque. Soit I un idéal non nul de B. Soit $x \in I$ de degré minimal parmi les éléments de $I \setminus \{0\}$. Montrons que $I = (x)$. Si $y \in I \setminus \{0\}$, écrivant $y = ax + b$ avec $\deg(b) \leq \deg(x)$, quitte à remplacer y par b si b est non nul on est ramené au cas où $\deg(y) = \deg(x)$. Par minimalité de $\deg(x)$, il n'existe pas $a, b \in B$ tels que $ax + by \neq 0$ et $\deg(ax + by) < \deg(x)$. Il existe donc $a \in B$ et $b \in B^\times$ tels que $ax + by = 0$ et donc $y \in (x)$. □

Exemple 5.2.3. — Avec les notations des chapitres précédents, supposons F algébriquement clos. Soit $t \in B_{F,E}^{\varphi=\pi}$ et $y \in |Y_F|$ tel que $t(y) = 0$. Nous montrerons dans le chapitre 6 que l'anneau $\left(B_{F,E}[\frac{1}{t}]\right)^{\varphi=Id} \subset B_{dR,y}$ muni du stathme $-\mathrm{ord}_y$ est presque euclidien principal.

5.2.2. Construction de courbes affines. — Soit B un anneau intègre de corps des fractions K.

Lemme 5.2.4. — *Les données suivantes sont équivalentes :*

— *Un sous-anneau de valuation discrète* $A \subset K$ *tel que* $A \cap B$ *soit un corps.*

— *Une valuation* $ord_\infty : K \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ *vérifiant* $ord_\infty(K^\times) = \mathbb{Z}$, $\forall b \in B \setminus \{0\}$, $ord_\infty(b) \leq 0$ *et* $ord_\infty(b) = 0$ *implique* $b \in B^\times$.

Démonstration. — Si □

Soit donc une donnée telle que dans le lemme précédent. Notons F le corps $B \cap A$. Remarquons que $B^\times = F^\times$. Posons

$$\deg = -\mathrm{ord}_{\infty|B} : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

qui est un stathme euclidien. Notons $(\mathrm{Fil}_i B)_{i\in\mathbb{Z}}$ la filtration croissante

$$\mathrm{Fil}_i B = \{b \in B \mid \deg(b) \leq i\}.$$

Ainsi, $\mathrm{Fil}_0 B = F$ et $\mathrm{Fil}_i B = 0$ lorsque $i < 0$. Faisons l'hypothèse suivante : pour $i \geq 1$, l'application

$$\mathrm{Fil}_i B/\mathrm{Fil}_{i-1} B \longrightarrow \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$$

est surjective où $\mathfrak{m}_A$ désigne l'idéal maximal de A.

Proposition 5.2.5. — *Sous l'hypothèses précédente* $(B, \deg)$ *est presque euclidien.*

Démonstration. Il suffit de montrer qu'étant donnés $x, y \in B$ avec $\deg(x) \geq \deg(y) \geq 1$, il existe $a, b \in B$ tels que $x = ay + b$ et $\deg(b) \leq deg(y)$. On procède pour cela par récurrence sur $\deg(x) - \deg(y)$, le cas où $\deg(x) = \deg(y)$ étant évident. Soient $i = \deg(x)$ et $j = \deg(y)$. Notons $\bar{x} \in \mathfrak{m}_A^{-i}/\mathfrak{m}_A^{-i+1}$ et $\bar{y} \in \mathfrak{m}_A^{-j}/\mathfrak{m}_A^{-j+1}$. Puisque $(A, \mathfrak{m}_A)$ est un anneau de valuation discrète, il existe $c \in \mathfrak{m}_A^{-(i-j)}/\mathfrak{m}_A^{-(i-j+1)}$ tel que $\bar{x} = c\bar{y}$. D'après l'hypothèse faite, il existe $\alpha \in \mathrm{Fil}_{i-j} B$ tel que $\bar{a} = c$. Posons $\beta = x - \alpha y$. On a donc $\deg(\beta) < \deg(x)$. Si $\deg(\beta) \leq \deg(y)$ on a terminé. Sinon, il suffit d'appliquer l'hypothèse de récurrence au couple (β, y) pour conclure. □

Supposons maintenant B principal et notons $X = \mathrm{Spec}(B)$. Posons pour $x \in X$ un point fermé, $\deg(x) = \deg(f)$ si $f \in B$ est un élément irréductible associé à x. On a donc défini une courbe que l'on aimerait compactifier en une courbe complète en ajoutant la valuation v_∞ et en posant $\deg(\infty) = 1$. Dans la section qui suit on va voir un procédé permettant de construire naturellement une telle compactification.

Exemple 5.2.6. — Soit K un corps valué complet, de valuation discrète à corps résiduel parfait, extension de $\mathbb{Q}_p$. Soit $\overline{K}$ une clôture algébrique de K. Notons $C = \widehat{\overline{K}}$. Soit B_{cris}^+ l'anneau des périodes cristallines associé et $B_{cris} = B_{cris}^+\left[\frac{1}{t}\right]$ ([**25**]). Notons $B_e = B_{cris}^{\varphi=Id}$. Considérons l'anneau de valuation discrète B_{dR} d'uniformisante t. Le plongement $B_e \subset B_{cris} \subset B_{dR}$ composé avec la valuation de B_{dR} définit une valuation v_∞ sur B_e. La filtration par le degré sur B_e induite par v_∞ est alors $\mathrm{Fil}_i B_e = B_e \cap \mathrm{Fil}^{-i} B_{cris}$. Il résulte alors de la suite exacte fondamentale ([**25**], th. 5.3.7) que $\mathrm{Fil}_0 B_e = \mathbb{Q}_p$ pour tout $i \geq 1$,

$$\mathrm{Fil}_i B_e/\mathrm{Fil}_{i-1} B_e \xrightarrow{\sim} t^{-i} B_{dR}^+/t^{-i+1} B_{dR}^+ = C(-i).$$

Le couple $(B_e, \deg)$ est donc presque euclidien. On verra plus tard qu'en fait B_e est principal et que de plus ses éléments irréductibles sont les éléments de degré 1.

5.2.3. Construction de courbes complètes. — Supposons nous donné un anneau gradué intègre

$$P = \bigoplus_{i \geq 0} P_i$$

tel que P_0 soit un corps que nous noterons également F. On suppose que $\dim_F P_1 \geq 2$. Posons maintenant

$$X = \mathrm{Proj}(P),$$

un F-schéma.

Théorème 5.2.7. — *Faisons les hypothèses suivantes :*

1. *Le monoïde multiplicatif*

$$\Big(\bigcup_{d \geq 1} P_d \setminus \{0\}\Big)/F^\times$$

est libre sur les éléments de $P_1/F^\times$.

2. *Pour tout* $t \in P_1 \setminus \{0\}$, *il existe un corps* C *extension de* F *tel que*

$$P/Pt \simeq \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$$

comme F*-algèbres graduées.*

On a alors les propriétés suivantes :

a) Pour tout $t \in P_1 \setminus \{0\}$, *le lieu d'annulation de la « section hyperplane* t *»,* $V^+(t)$, *est constitué d'un seul point* $\{\infty_t\}$.

b) Si $|X|$ *désigne les points fermés de* X, *l'application* $t \mapsto \infty_t$ *induit une bijection*

$$(P_1 \setminus \{0\})/F^\times \xrightarrow{\sim} |X|$$

c) Posons pour tout point fermé x *de* X, $\deg(x) = 1$. *Alors, munie de cette fonction degré,* X *est une courbe complète.*

d) Pour tout point fermé $\infty \in X$, $X \setminus \{\infty\}$ *est un ouvert affine Spec*(B) *avec* B *principal, i.e.* $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$, *et l'anneau* $(B, -v_\infty)$ *est presque euclidien.*

Démonstration. Soit $t \in P_1 \setminus \{0\}$ et $C|F$ tel que

$$P/Pt \simeq \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}.$$

Notons D l'algèbre de droite dans l'isomorphisme précédent. On a alors

$$V^+(t) = \mathrm{Proj}(P/Pt) \simeq \mathrm{Proj}(D)$$

qui d'après le lemme 5.2.8 qui suit est réduit à un seul point, l'idéal premier homogène nul de D. Notons $V^+(t) = \{\infty\}$. Soit maintenant $B = P\big[\frac{1}{t}\big]_0$, $X \setminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(B)$. On vérifie immédiatement que B est un anneau factoriel d'éléments irréductibles les $\dfrac{x}{t}$ lorsque x parcourt $P_1 \setminus F.t$. Pour un tel x il y a une identification

$$B/B.\frac{x}{t} = (P/Px)[\tfrac{1}{t}]_0$$

où $\bar{t} \in P/Px$ désigne la réduction de t. Mais si

$$P/Px \simeq \{f \in C'[T] \mid f(0) \in F\}$$

où C' est un corps extension de F, on vérifie que pour tout élément homogène de degré 1 non nul y dans l'algèbre graduée $D' = \{f \in C'[T] \mid f(0) \in F\}$,

$$D'[\tfrac{1}{y}]_0 \simeq C'.$$

L'idéal engendré par $\dfrac{x}{t}$ dans B est donc maximal. L'anneau B est factoriel, les idéaux engendrés par les éléments irréductibles sont maximaux ; il est donc principal.

Montrons maintenant que l'anneau B satisfait aux hypothèses de la section 5.2.2 et que donc, d'après la proposition 5.2.5, il est presque euclidien. Il est muni de la filtration $(\mathrm{Fil}_i B)_{i\geq 0}$ où

$$\mathrm{Fil}_i B = \left\{\frac{x}{t^i} \mid x \in P_i\right\}.$$

En particulier, $\mathrm{Fil}_0 B = F$. Soit

$$\deg : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$$

la fonction degré associée à cette filtration. On vérifie que $v_\infty = -\deg$ est une valuation.

Notons K le corps des fractions de B. Soit S la partie multiplicative de P/tP formée des éléments homogènes non-nuls. Pour tout entier $i \in \mathbb{Z}$ graduons le P/tP-module $t^i P/t^{i+1}P$ en posant que $t^i P_j/t^{i+1}P_{j-1}$ est de degré $i+j$. Cela munit $t^i P/t^{i+1}P$ d'une structure de P/tP-module gradué sur l'anneau gradué P/tP. Il y a alors un isomorphisme naturel d'anneaux gradués

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \mathfrak{m}^i_{K,v_\infty}/\mathfrak{m}^{i+1}_{K,v_\infty} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} \left[S^{-1}(t^i P/t^{i+1}P)\right]_0.$$

Celui-ci se décrit de la façon suivante. Un élément de $\mathfrak{m}^i_{K,\infty}$ s'écrit sous la forme

$$t^i \frac{x}{y}$$

avec $x, y \in P$ homogènes, $x \in P_a$ et $y \in P_{a+i} \setminus tP_{a+i-1}$ pour un entier a. On associe alors à un tel élément

$$y^{-1}.\overline{t^i x} \in S^{-1}(t^i P/t^{i+1}P).$$

De plus, via cet isomorphisme l'application naturelle

$$\mathrm{Fil}_i B \longrightarrow \mathfrak{m}^{-i}_{K,v_\infty}/\mathfrak{m}^{-i+1}_{K,v_\infty}$$

est donnée par, si $x \in P_i$,

$$\frac{x}{t^i} \longmapsto \overline{t^{-i}x} \in [t^{-i}P/t^{-i+1}P]_0 \text{ placé en degré } -i.$$

Pour vérifier que la condition de la section 5.2.2 est vérifiée il suffit donc de vérifier que pour $i > 0$, l'application naturelle

$$P_i/tP_{i-1} \longmapsto [S^{-1}(P_i/tP_{i-1})]_0$$

est surjective. Par un calcul explicite on vérifie que c'est le cas pour l'algèbre graduée $\{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$. □

Lemme 5.2.8. — *Soit $C|F$ une extension de corps et $D = \{f \in C[T] \mid f(0) \in F\}$, une F-algèbe graduée. Alors,* $\mathrm{Proj}(D)$ *est réduit à un seul point, l'idéal premier homogène nul.*

Démonstration. Soit $D^+ = TC[T]$ l'idéal d'augmentation de D et $\mathfrak{p}$ un idéal premier homogène non nul de D. Soit $aT^i \in \mathfrak{p} \setminus \{0\}$. Si $i = 0$, $a \in F^\times$ et donc $\mathfrak{p} = D$. Sinon, la relation $a.T^i \in \mathfrak{p}$ couplée à la primalité de $\mathfrak{p}$ implique que soit $a \in \mathfrak{p}$ auquel cas $a \in F^\times$ et donc $\mathfrak{p} = D$, soit $a \notin \mathfrak{p}$ auquel cas $a \in C \setminus F$. Supposons donc $a \in C \setminus F$. La relation $aT.T^{i-1} \in \mathfrak{p}$ implique alors que soit $aT \in \mathfrak{p}$, soit $T \in \mathfrak{p}$. Dans les deux cas, on a immédiatement que $T^2C[T] \subset \mathfrak{p}$. On a donc que $\forall \lambda \in C$, $(\lambda T)^2 \in \mathfrak{p}$ duquel on déduit que $\lambda T \in \mathfrak{p}$. On obtient donc au final que $D^+ \subset \mathfrak{p}$. □

Exemple 5.2.9. — Reprenons les notations de l'exemple 5.2.6. Soit $h \geq 1$ un entier. Nous montrerons plus loin que l'algèbre graduée $\bigoplus_{d\geq 0}(B^+_{cris})^{\varphi^h = p^d}$ satisfait aux hypothèses du théorème précédent.

5.3. Fibrés vectoriels sur les courbes

Soit X une courbe de corps de définition F et de corps de fonctions rationnelles K. On note Fib_X la catégorie des faisceaux de $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini sur X que l'on appelle encore fibrés vectoriels.

5.3.1. Classification par recollement. — Soit $U \subsetneq X$ un ouvert non vide et $X \setminus U = \{x_1, \ldots, x_r\}$. Considérons les catégories suivantes. Tout d'abord,

$$\mathcal{C} = \big\{(\mathscr{E}, (M_i)_{1\leq i\leq r}, (u_i)_{1\leq i\leq r})\big\}$$

où $\mathscr{E} \in Fib_U$, pour $1 \leq i \leq r$, M_i est un $\mathcal{O}_{X,x_i}$-module libre de rang fini et

$$u_i : M_i \otimes_{\mathcal{O}_{X,x_i}} K \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\eta.$$

Puis,

$$\widehat{\mathcal{C}} = \big\{(\mathscr{E}, (M_i)_{1\leq i\leq r}, (u_i)_{1\leq i\leq r})\big\}$$

où $\mathscr{E} \in Fib_U$, pour $1 \leq i \leq r$, M_i est un $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$-module libre de rang fini et

$$u_i : M_i \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}} \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\eta \otimes_K \widehat{K}_{x_i}.$$

La catégorie $\widehat{\mathcal{C}}$ consiste en la donnée d'un fibré sur U, de fibrés sur les « disques formels » $(\mathrm{Spec}(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}))_{1\leq i\leq r}$ et de données de recollement sur les « disques formels épointés » $(\mathrm{Spec}(\widehat{K}_{x_i}))_{1\leq i\leq r}$. La proposition qui suit ne pose pas de problème (on renvoie à [**3**] pour un énoncé beaucoup plus général).

Proposition 5.3.1. — *Les foncteurs*

$$\begin{array}{rcl} Fib_X & \longrightarrow & \mathcal{C} \\ \mathscr{E} & \longmapsto & \big(\mathscr{E}_{|U}, (\mathscr{E}_{x_i})_{1\leq i\leq r}, (\mathrm{can}_i)_{1\leq i\leq r}\big) \end{array}$$

et

$$\begin{array}{rcl} Fib_X & \longrightarrow & \widehat{\mathcal{C}} \\ \mathscr{E} & \longmapsto & \big(\mathscr{E}_{|U}, (\widehat{\mathscr{E}}_{x_i})_{1\leq i\leq r}, (\mathrm{can}_i)_{1\leq i\leq r}\big) \end{array}$$

sont des équivalences de catégories.

Corollaire 5.3.2. — *Supposons U affine et* $\mathrm{Pic}(U)$ *trivial. Soit $B = \Gamma(U, \mathcal{O}_X)$. La catégorie des fibrés vectoriels sur X est équivalente à celle des triplets*

$$(M, N, (u_i)_{1\leq i\leq r})$$

où :

— *M est un B-module libre de rang fini,*
— *N est un $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$-module libre de rang fini,*
— *$u_i : M \otimes_B \widehat{K}_{x_i} \xrightarrow{\sim} N \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{x_i}} \widehat{K}_{x_i}$.*

Il en est de même en remplaçant $\widehat{K}_{x_i}$ par K et $\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$ par $\mathcal{O}_{X,x_i}$.

En particulier, les classes d'isomorphismes de fibrés vectoriels de rang n sur X s'identifient à l'ensemble

$$GL_n(B)\backslash\Big(\prod_{i=1}^{r} GL_n\big(\widehat{K}_{x_i}\big)/GL_n\big(\widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}\big)\Big).$$

5.3.2. Opérations sur les fibrés en termes de données de recollement. — Supposons maintenant que U soit affine, $\mathrm{Pic}(U) = 0$ et $X \setminus U = \{\infty\}$. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X et (M, N, u), resp. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$, la donnée correspondante comme dans le corollaire 5.3.2, c'est à dire

$$M = \Gamma(U, \mathscr{E}),\ N = \mathscr{E}_\infty \text{ et } \widehat{N} = \widehat{\mathscr{E}}_\infty.$$

On vérifie aisément la proposition suivante.

Proposition 5.3.3. — *Il y a des identifications canoniques*

$$\begin{aligned} H^0(X, \mathscr{E}) &= u(M) \cap N = \widehat{u}(M) \cap \widehat{N}, \\ H^1(X, \mathscr{E}) &= N \otimes K/u(M) + N = N \otimes \widehat{K}_\infty/\widehat{u}(M) + \widehat{N}. \end{aligned}$$

Plus généralement, $R\Gamma(X, \mathscr{E})$ est isomorphe au complexe

$$\begin{array}{rcl} M \oplus N & \longrightarrow & N \otimes K \\ (x, y) & \longmapsto & u(x) - y \end{array}$$

ou encore au même complexe obtenu en remplaçant N par $\widehat{N}$, K par $\widehat{K}_\infty$ et u par $\widehat{u}$.

On a également :

Proposition 5.3.4. — *Pour $k \in \mathbb{Z}$, si t_∞ désigne une uniformisante de $\mathcal{O}_{X,\infty}$, si le fibré $\mathscr{E}$ correspond aux données (M, N, u), resp. $(M, \widehat{N}, \widehat{u})$, alors le fibré tordu $\mathscr{E}(k\infty)$ correspond aux données*

$$(M, t_\infty^{-k} N, u), \text{ resp. } (M, t_\infty^{-k}\widehat{N}, \widehat{u}).$$

5.4. Sur quelques courbes particulières

Bien que facile à démontrer la proposition qui va suivre est importante pour comprendre la différence entre la courbe que nous allons étudier en théorie de Hodge p-adique et la droite projective usuelle sur un corps. Plaçons nous dans la situation suivante. Soit X une courbe complète possédant un point $\infty \in X$ tel que

- $\deg(\infty) = 1$
- $X \setminus \{\infty\}$ est affine.

On vérifie aussitôt le lemme qui suit.

Lemme 5.4.1. — *Sont équivalents :*

— $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$

— *la fonction degré induit un isomorphisme* $\deg : \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$.

Nous supposerons dans la suite que X vérifie les hypothèses équivalentes du lemme précédent. Pour $k \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{O}_X(k) = \mathcal{O}_X(k.\infty)$. Soit $X \setminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(B)$ où l'anneau B est donc principal. On note

$$\deg = -\mathrm{ord}_\infty : B \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{-\infty\}.$$

Puisque associé au diviseur de Weil $[\infty]$, le fibré en droites $\mathcal{O}_X(1)$ est canoniquement muni d'une section génériquement non nulle. Le produit avec cette section fournit des injections

$$F = H^0(\mathcal{O}_X) \subset H^0(\mathcal{O}_X(1)) \subset \cdots \subset H^0(\mathcal{O}_X(k)) \subset H^0(\mathcal{O}_X(k+1)) \subset \cdots$$

qui correspondent à la filtration par le degré sur B,

$$F = B^{\deg \leq 0} \subset B^{\deg \leq 1} \subset \cdots \subset B^{\leq \deg k} \subset B^{\leq \deg k+1} \subset \ldots.$$

On a de plus bien sûr que $H^0(\mathcal{O}_X(k)) = 0$ si $k < 0$.

Pour $k \in \mathbb{Z}$ le cup-produit avec cette section de $\mathcal{O}_X(1)$ induit une surjection

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) \twoheadrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(k+1)).$$

Si $A = \mathcal{O}_{X,\infty}$ d'uniformisante t, $K = F(X)$, cette surjection s'identifie à la surjection canonique

$$K/(B + t^{-k}A) \longrightarrow K/(B + t^{-k-1}A).$$

Ainsi, si $H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = 0$, alors pour tout $k \geq d$, $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$. Notons $i : \{\infty\} \hookrightarrow X$. Pour tout $k \in \mathbb{Z}$ il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(k-1) \longrightarrow \mathcal{O}_X(k) \longrightarrow i_*(\mathfrak{m}_A^{-k}/\mathfrak{m}_A^{-k+1}) \longrightarrow 0.$$

De celle-ci on déduit que si $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ alors pour tout $k \geq 1$, l'application

$$B^{\deg \geq k}/B^{\deg \geq k-1} \to \mathfrak{m}_A^{-k}/\mathfrak{m}_A^{-k+1}$$

est surjective i.e. la condition (1) de la section 5.2.2 est vérifiée.

Lorsque $X = \mathrm{Proj}(P)$ comme dans le théorème 5.2.7, $t \in P_1$ est distingué et $V^+(t) = \{\infty\}$ il y a des identifications pour $k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{array}{rcl} P_k & = & B^{\deg \leq k} = H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) \\ b & \longmapsto & \dfrac{b}{t^k}. \end{array}$$

On a donc

$$X = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d \in \mathbb{N}} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))\Big)$$

et la suite d'inclusions précédentes est donnée par le produit par $t \in H^0(\mathcal{O}_X(1))$,

$$P_0 \xrightarrow{\times t} P_1 \xrightarrow{\times t} \dots \xrightarrow{\times t} P_k \xrightarrow{\times t} P_{k+1} \xrightarrow{\times t} \dots.$$

On remarquera de plus que pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}_X(d) \simeq \widetilde{P[d]}$.

Revenons aux hypothèses précédentes, avant les digressions sur le cas $X = \mathrm{Proj}(P)$.

Proposition 5.4.2. —

1. *Sont équivalents :*
   — $(B, \deg)$ *est euclidien*
   — $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$.
   Si c'est le cas alors, $\forall k \geq -1,\ H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.
2. *Sont équivalents :*
   — $(B, \deg)$ *est presque euclidien*
   — $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$
   Si c'est le cas alors, $\forall k \geq 0,\ H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$.

Démonstration. Notons $A = \mathcal{O}_{X,\infty}$ d'uniformisante t et $K = F(X)$. On a

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = K/(B + tA), \quad H^1(X, \mathcal{O}_X) = K/(B + A),$$

égalités desquelles on déduit facilement la proposition. □

Exemple 5.4.3. — Avec les notations de l'exemple 5.2.9, on montrera plus tard que

$$X = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d \geq 0} (B_{cris}^+)^{\varphi^h = p^d}\Big)$$

satisfait aux hypothèses du point (2) de la proposition précédente mais pas du point (1).

5.5. Filtrations de Harder-Narasimhan

5.5.1. Formalisme général. — Rappelons le formalisme suivant des filtrations de Harder-Narasimhan utilisé dans [**19**], formalisme qui se déduit lui-même du formalisme plus général de [**2**].

Supposons que l'on dispose d'une catégorie exacte $\mathcal{C}$ munie de deux « fonctions » degré et rang sur les classes d'isomorphisme d'objets de $\mathcal{C}$

$$\begin{aligned} \deg &: \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R}, \\ \operatorname{rg} &: \operatorname{Ob}\mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{N}, \end{aligned}$$

additives sur les suites exactes de $\mathcal{C}$. On fait l'hypothèse qu'il existe une catégorie abélienne $\mathcal{A}$ ainsi qu'un foncteur « fibre générique »

$$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{A}$$

vérifiant :

- F est exact et fidèle,
- il induit une bijection

$$F : \{\text{sous-objets stricts de } X\} \xrightarrow{\sim} \{\text{sous-objets de } F(X)\}.$$

  où par sous-objet strict on entend ceux pouvant s'insérer dans une suite exacte. On aime à penser à l'inverse de la bijection précédente comme une opération « d'adhérence schématique ». Ce sera le cas dans les exemples que nous avons en vue.

On suppose également que la fonction rang sur $\mathcal{C}$ provient par composition avec F d'une fonction additive $\operatorname{rg} : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{N}$ vérifiant

$$\operatorname{rg}(X) = 0 \Leftrightarrow X = 0.$$

Enfin, on fait l'hypothèse cruciale suivante : *si $u : X \to X'$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $F(u)$ soit un isomorphisme alors* $\deg(X) \leq \deg(X')$ *avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.*

Une telle catégorie est quasi-abélienne au sens de André ([**2**]) ; tout morphisme possède un noyau et un conoyau. Plus précisément, si $u : X \to Y$, $\ker u$ est l'unique sous-objet strict X' de X tel que $F(X') = \ker(F(u))$, $\operatorname{Im} u$ est l'unique sous-objet strict X'' de X tel que $F(X'') = \operatorname{Im}(F(u))$ et $\operatorname{coker} u = X/\operatorname{Im}(u)$. Néanmoins elle n'est pas abélienne en général, il peut exister des morphismes dans $\mathcal{C}$ de noyaux et conoyaux triviaux qui ne sont pas des isomorphismes. On remarquera que le morphisme

$$X/\ker u \longrightarrow \operatorname{Im} u,$$

bien que n'étant pas en général un isomorphisme, en est un « en fibre générique » i.e. après application du foncteur F. Ainsi, c'est un isomorphisme si et seulement si

$\deg(X/\ker u) = \deg(\mathrm{Im} u)$.

Pour $X \in \mathcal{C}$, $X \neq 0$, on pose

$$\mu(X) = \frac{\deg(X)}{\mathrm{rg}(X)} \in \mathbb{R}.$$

Définition 5.5.1. — Un objet non nul X de $\mathcal{C}$ est semi-stable si pour tout sous-objet strict non nul X' de X

$$\mu(X') \leq \mu(X).$$

On a alors le théorème suivant dont la preuve consiste à suivre celle de Harder-Narasimhan pour les fibrés vectoriels ([**33**]). On renvoie à [**2**] pour plus de détails.

Théorème 5.5.2. — *Sous les hypothèses précédentes tout objet X de $\mathcal{C}$ possède une unique filtration dans la catégorie exacte $\mathcal{C}$*

$$0 = X_0 \subsetneq X_1 \subsetneq \cdots \subsetneq X_r = X$$

telle que :

- *pour $1 \leq i \leq r$, X_i/X_{i-1} est semi-stable,*
- *la suite des pentes $\big(\mu(X_i/X_{i-1})\big)_{1\leq i\leq r}$ est strictement décroissante.*

Pour X comme dans l'énoncé précédent on note $\mathrm{HN}(X)$ l'unique polygone concave d'origine $(0,0)$ et ayant pour pentes $\big(\mu(X_i/X_{i-1})\big)_{1\leq i\leq r}$ avec multiplicités respectives $\big(\mathrm{rg}(X_i/X_{i-1})\big)_{1\leq i\leq r}$.

Théorème 5.5.3. — *Si $X' \subset X$ est un sous-objet strict, le point $\big(\deg(X'), \mathrm{rg}(X')\big)$ est situé en dessous du polygone $\mathrm{HN}(X)$.*

On obtient donc que $\mathrm{HN}(X)$ est l'enveloppe concave des points $\big(\deg(X'), \mathrm{rg}(X')\big)$ lorsque X' parcourt les sous-objets de X.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Considérons les catégories suivantes.

- Soit $\mathcal{C}^{\leq\lambda}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets dont la plus grande pente de leur polygone de Harder-Narasimhan est inférieure ou égale à λ. On a donc pour $X \in \mathcal{C}$, $X \in \mathcal{C}^{\leq\lambda}$ si et seulement si pour tout sous-objet strict non nul Y de X, $\mu(Y) \leq \lambda$.
- Soit $\mathcal{C}_{\geq\lambda}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets de $\mathcal{C}$ dont la plus petite pente de leur polygone de Harder-Narasimhan est supérieure ou égale à λ. Un objet X de $\mathcal{C}$ appartient à $\mathcal{C}_{\geq\lambda}$ si et seulement si pour tout épimorphisme strict $X \twoheadrightarrow Y$ tel que $Y \neq 0$, on a $\mu(Y) \geq \lambda$.
- Soit $\mathcal{C}^{ss}_{\lambda} = \mathcal{C}^{\leq\lambda} \cap \mathcal{C}_{\geq\lambda}$ la sous-catégorie pleine de $\mathcal{C}$ formée des objets semi-stables de pente λ à laquelle on ajoute l'objet nul.

Théorème 5.5.4. — *Les assertions suivantes sont vérifiées.*

1. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les catégories $\mathcal{C}^{\leq\lambda}$ et $\mathcal{C}_{\geq\lambda}$ sont des sous-catégories exactes stables par extensions dans $\mathcal{C}$.*
2. *Lorsque $\lambda > \mu$, $Hom(\mathcal{C}_{\geq\lambda}, \mathcal{C}^{\leq\mu}) = 0$. En particulier, si X est semi-stable de pente λ et Y semi-stable de pente μ avec $\lambda > \mu$, $Hom(X, Y) = 0$.*
3. *Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, $\mathcal{C}^{ss}_\lambda = \mathcal{C}^{\leq\lambda} \cap \mathcal{C}_{\geq\lambda}$ est une catégorie abélienne stable par extensions dans $\mathcal{C}$.*

Les filtrations de Harder-Narasimhan fournissent donc un dévissage canonique de la catégorie exacte $\mathcal{C}$ par la famille de catégories abéliennes $(\mathcal{C}^{ss}_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{R}}$. On peut aller plus loin dans la structure des catégories abéliennes $(\mathcal{C}^{ss}_\lambda)_\lambda$.

Définition 5.5.5. — Un objet $X \in \mathcal{C}$ est stable si pour tout sous-objet strict non nul X' de X, $\mu(X') < \mu(X)$.

On a alors la proposition suivante qui ne pose pas de problème.

Proposition 5.5.6. — *Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Tout objet de la catégorie abélienne $\mathcal{C}^{ss}_\lambda$ est de longueur finie. Les objets simples de $\mathcal{C}^{ss}_\lambda$ sont les objets stables de pente λ.*

5.5.2. Exemples. —

5.5.2.1. Fibrés vectoriels. — Soit X une courbe complète définie sur F et $\mathcal{C}$ la catégorie des $\mathcal{O}_X$-modules localement libres de rang fini sur X. Il y a deux fonctions additives rang et degré sur X. Soit de plus $\mathcal{A}$ la catégorie abélienne des $F(X)$-espaces vectoriels de dimension finie. Il y a un foncteur fibre générique évident $\mathcal{C} \to \mathcal{A}$. On vérifie qu'il possède les propriétés demandées précédemment. Par exemple, si $u : \mathscr{E} \to \mathscr{E}'$ est un morphisme qui est un isomorphisme en fibre générique alors,

$$\deg(\mathscr{E}') = \deg(\mathscr{E}) + \deg(\mathscr{E}'/u(\mathscr{E}))$$

où le degré du faisceau cohérent de torsion $\mathscr{F} = \mathscr{E}'/u(\mathscr{E})$ est défini par

$$\deg(\mathscr{F}) = \sum_{x\in|X|} \deg(x).\mathrm{long}_{\mathcal{O}_{X,x}}(\mathscr{F}_x).$$

On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathcal{C}$.

5.5.2.2. Espaces vectoriels filtrés. — Soit $L|K$ une extension de corps et $\mathrm{VectFil}_{L/K}$ la catégorie exacte formée des couples $(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L)$ consistant en un K-espace vectoriel de dimension finie V ainsi qu'une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^\bullet V_L$ de $V \otimes_K L$ telle que $\mathrm{Fil}^i V_L = 0$ pour $i \gg 0$ et $\mathrm{Fil}^i V_L = V_L$ lorsque $i \ll 0$. Posons

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) &= \dim_K V, \\ \deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} i.\dim_L \mathrm{gr}^i V_L. \end{aligned}$$

Soit Vect_K la catégorie des K-espace vectoriels de dimension finie. Le foncteur

$$\begin{array}{rcl} F : \mathrm{VectFil}_{L/K} & \longrightarrow & \mathrm{Vect}_K \\ (V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) & \longmapsto & V \end{array}$$

satisfait aux propriétés demandées précédemment. Cela résulte de la formule

$$\deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) = n \dim \mathrm{Fil}^n V_L + \sum_{i>n} \dim \mathrm{Fil}^i V_L$$

pour $n \ll 0$, formule de laquelle il résulte que si

$$u : (V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) \longrightarrow (V', \mathrm{Fil}^\bullet V'_L)$$

induit un isomorphisme $V \xrightarrow{\sim} V'$ alors

$$\deg(V', \mathrm{Fil}^\bullet V'_L) = \deg(V, \mathrm{Fil}^\bullet V_L) + \sum_{i \in \mathbb{Z}} \dim \mathrm{Fil}^i V'_L / u(\mathrm{Fil}^i V_L).$$

On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans cette catégorie. Le théorème 5.5.4 dit dans ce cas là que tout morphisme entre objets semi-stables de même pente est strictement compatible aux filtrations.

5.5.2.3. Isocristaux. — Soit k un corps parfait de caractéristique p, $K_0 = W(k)\left[\frac{1}{p}\right]$. Notons σ le Frobenius de K_0. Soit φ-Mod_{K_0} la catégorie abélienne $\mathbb{Q}_p$-linéaire des k-isocristaux, c'est à dire la catégorie des couples (D, φ) où D est un K_0-espace vectoriel de dimension finie et $\varphi : D \xrightarrow{\sim} D$ un isomorphisme σ-linéaire. Il y a deux fonctions additives hauteur et point terminal du polygone de Newton

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{ht} & : & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{N} \\ t_N & : & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{array}$$

où $\mathrm{ht}(D, \varphi) = \dim_{K_0} N$ et $t_N(D, \varphi) = d$ si $\det(D, \varphi) = K_0.e$ avec $\varphi(e) = a.e$ et $v_p(a) = d$. Prenant pour fonction rang la fonction ht et fonction degré la fonction t_N, les hypothèses précédentes sont facilement vérifiées (la catégorie est déjà abélienne) et on a donc des filtrations de Harder-Narasimhan dans φ-Mod_{K_0}. On vérifie aisément que la filtration de Harder-Narasimhan associée est la filtration de Dieudonné-Manin et le polygone de Harder-Narasimhan, qui est concave, est obtenu à partir du polygone de Newton, qui est convexe, en renversant l'ordre des pentes. Il se trouve que cette filtration est canoniquement scindée (décomposition de Dieudonné-Manin). En fait, comme on le vérifie immédiatement, il y a également une filtration de Harder-Narasimhan associée aux fonctions rang et degré $(\mathrm{ht}, -t_N)$. Cette filtration est une filtration opposée à la filtration précédente et fournit le scindage de la filtration précédente. La décomposition de Dieudonné-Manin est donc donnée par le couple de ces deux filtrations de Harder-Narasimhan opposées.

5.5.2.4. φ-modules filtrés. — Voici un exemple qui est formé à partir d'une combinaison des deux exemples précédents. On reprend les notations de l'exemple 5.5.2.2 précédent. Soit de plus $K|K_0$ une extension de corps. Soit $\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$ la catégorie formée des triplets $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ où $(D, \varphi)\varphi\text{-Mod}_{K_0}$ et $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ est une filtration décroissante de $D \otimes_{K_0} K$ vérifiant $\mathrm{Fil}^i D_K = 0$ pour $i \gg 0$ et $\mathrm{Fil}^i D_K = D_K$ lorsque $i \ll 0$. Il s'agit d'une catégorie exacte, les suites exactes étant les suites exactes d'isocristaux strictement compatibles aux filtrations. Soit la fonction additive point terminal du polygone de Hodge

$$\begin{array}{rcl} t_H : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} & \longrightarrow & \mathrm{VectFil}_{K/K_0} \xrightarrow{\deg} \mathbb{Z} \\ (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & (D, \mathrm{Fil}^\bullet D_K). \end{array}$$

Prenons pour fonction rang la fonction $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K) \mapsto \mathrm{ht}(D, \varphi)$ et pour fonction degré la fonction $t_H - t_N$. On vérifie que le foncteur d'oubli de la filtration

$$\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathrm{Mod}_{K_0}^{\varphi}$$

vérifie les propriétés précédentes i.e. est un foncteur « fibre générique ». On a donc des filtrations de Harder-Narasimhan associées. La catégorie abélienne des objets semi-stables de pente 0 est alors celle des φ-modules filtrés faiblement admissibles ([**?**]).

On peut pousser l'exemple précédent encore plus loin. Soit la fonction degré

$$(t_H - t_N, -t_N) : \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}^2.$$

Munissons $\mathbb{Z}^2$ de l'ordre lexicographique. Prenons pour fonction rang la fonction hauteur précédente. Il se trouve que le formalisme évoqué précédemment s'étend aux cas où la fonction degré prend ses valeurs dans un groupe abélien totalement ordonné. On obtient alors des bi-filtrations de Harder-Narasimhan étudiées dans [**23**].

5.5.2.5. φ-modules sur l'anneau de Robba. — Soit $\mathcal{R}$ un anneau de Bezout, c'est à dire un anneau intègre dans lequel tout idéal de type fini est principal. Supposons que l'on dispose d'un sous-corps $\mathscr{E} \subset \mathcal{R}$, muni d'une valuation non triviale $v : \mathscr{E} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ et tel que

$$\mathscr{E}^\times = \mathcal{R}^\times.$$

Supposons donné un endomorphisme σ de $\mathcal{R}$ stabilisant $\mathscr{E}$ et tel que $\forall x \in \mathscr{E},\ v(\sigma(x)) = v(x)$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie exacte formée des couples (M, φ) où M est un $\mathcal{R}$-module libre de rang fini et φ un endomorphisme σ-linéaire $\varphi : M \to M$ tel que le morphisme $\mathcal{R}$-linéaire induit

$$\Phi : \sigma^* M \longrightarrow M$$

soit un isomorphisme. Les objets inversibles dans la catégorie tensorielle $\mathcal{C}$ sont les couples (M, φ) avec M de rang 1. Il y a alors une identification des classes d'isomorphisme de tels objets

$$\mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \simeq H^1(\sigma^{\mathbb{Z}}, \mathcal{E}^{\times}).$$

À la classe du cocyle c_σ on associe la classe d'isomorphisme de l'objet $(\mathcal{R}, \varphi)$ où $\forall x \in \mathcal{R},\ \varphi(x) = c_\sigma \sigma(x)$. Puisque la valuation v est invariant sous σ elle induit une fonction additive degré

$$\deg : \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

normalisée de telle manière qu'avec l'identification précédente, ce soit la fonction $[c_\sigma] \mapsto -v(c_\sigma)$ sur les classes de cocyles. Pour $(M, \varphi) \in \mathcal{C}$ posons

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{rg}(M, \varphi) & = & \dim_{\mathcal{R}} M \\ \deg(M, \varphi) & = & \deg\big(\det(M, \varphi)\big). \end{array}$$

Ce sont deux fonctions additives. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie abélienne formée des couples (V, φ) où V est un $\mathrm{Frac}(\mathcal{R})$-espace vectoriel de dimension finie et φ un endomorphisme σ-linéaire. Le foncteur

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{C} & \longrightarrow & \mathcal{A} \\ (M, \varphi) & \longmapsto & (M \otimes \mathrm{Frac}(\mathcal{R}), \varphi \otimes 1) \end{array}$$

est un foncteur « fibre générique » au sens précédent. Cela résulte de ce que si M est un $\mathcal{R}$-module libre alors les sous-$\mathcal{R}$-modules libres facteurs directs dans M sont en bijection avec les sous-$\mathrm{Frac}(\mathcal{R})$-espaces vectoriels de dimension fini de $M \otimes \mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ via les correspondances $N \mapsto N \otimes \mathrm{Frac}(\mathcal{R})$ et $V \mapsto V \cap M$ (cette propriété est vérifiée pour tout anneau de Bezout). De plus si

$$u : (M, \varphi) \longrightarrow (M', \varphi')$$

est un morphisme dans $\mathcal{C}$ qui est un isomorphisme « en fibre générique »,

$$\det u : \det(M, \varphi) \longrightarrow \det(M', \varphi')$$

en est également un. Faisons maintenant l'hypothèse supplémentaire suivante : si $\lambda \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ vérifie $\lambda^{\sigma-1} \in \mathscr{E}$ alors $v(\lambda^{\sigma-1}) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $\lambda \in \mathscr{E}$. De cela on déduit aisément que

$$\deg(M, \varphi) \leq \deg(M', \varphi')$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme.

Le formalisme précédent s'applique et on dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathcal{C}$. Lorsque $\mathcal{R}$ est l'anneau de Robba et $\mathscr{E}$ le sous-anneau des fonctions bornées, on retrouve les filtrations étudiées dans [**43**] (cependant la convention de signe dans [**43**] est opposée à la notre).

5.5.2.6. Modules de Breuil-Kisin. — Soit X un schéma noethérien irréductible de dimension 1 muni d'un morphisme fini et plat $\sigma : X \to X$ de degré $\deg(\sigma) > 1$. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie formée des couples $(\mathscr{E}, \varphi)$ où $\mathscr{E}$ est un faisceau cohérent sur X sans composantes immergées (i.e. si $j : \eta \to X$ désigne le point générique de X, $\mathscr{E} \hookrightarrow j_* j^* \mathscr{E}$) et $\varphi : \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est un morphisme σ-linéaire tel que le morphisme linéaire associé

$$\Phi : \sigma^* \mathscr{E} \to \mathscr{E}$$

soit un isomorphisme au point générique de X. Il s'agit d'une catégorie exacte ; c'est une sous-catégorie stable par extensions dans la catégorie abélienne formée des couples $(\mathscr{E}, \varphi)$ où $\mathscr{E}$ est un faiceau cohérent sur X muni d'un morphisme σ-linéaire. Posons pour $(\mathscr{E}, \varphi) \in \mathcal{C}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(\mathscr{E}, \varphi) &= \mathrm{long}_{\mathcal{O}_{X,\eta}}(\mathscr{E}_\eta) \\ \deg(\mathscr{E}, \varphi) &= \mathrm{long}(\mathrm{coker}(\Phi)). \end{aligned}$$

où le faisceau cohérent $\mathrm{coker}\Phi$ est supporté en un nombre fini de points et on peut donc définir sa longueur. Ces deux fonctions sont additives. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie abélienne formée des couples (N, φ) où N est un $\mathcal{O}_{X,\eta}$-module de type fini et φ un morphisme σ-linéaire de N dans lui-même. Alors, le foncteur fibre générique

$$(\mathscr{E}, \varphi) \longmapsto (\mathscr{E}_\eta, \varphi_\eta)$$

satisfait les hypothèses précédentes. De plus, si

$$u : (\mathscr{E}, \varphi) \longrightarrow (\mathscr{E}', \varphi')$$

est un morphisme dans $\mathcal{C}$ qui est un isomorphisme générique, alors

$$\deg(\mathscr{E}', \varphi') = \deg(\mathscr{E}, \varphi) + (\deg(\sigma) - 1)\,\mathrm{long}(\mathrm{coker}(u)) \geq \deg(\mathscr{E}, \varphi)$$

avec égalité si et seulement si u est un isomorphisme. On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathcal{C}$.

Soit maintenant R un anneau local régulier de dimension 2 et $\mathfrak{p}$ un idéal premier de hauteur 1 dans R. Supposons R muni d'un endomorphisme $\sigma : R \to R$ fini et plat de degré > 1. On fait également l'hypothèse que $\sigma(\mathfrak{p}) = \mathfrak{p}$. Soit un entier $n \geq 1$. Posons $X_n = \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{p}^n)$ et $\sigma : X_n \to X_n$ le morphisme induit par σ sur R. Soit $\mathcal{C}_n$ la catégorie de Harder-Narasimhan précédente précédente associée à (X_n, σ) et « $\mathcal{C} = \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{C}_n$ » qui est également une catégorie de Harder-Narasimhan. D'après la formule d'Auslander-Buchsbaum, un R-module annulé par une puissance de $\mathfrak{p}$ est sans composantes immergées si et seulement si il est de dimension projective 1. La catégorie $\mathcal{C}$ s'identifie donc à celle des couples (M, φ) où M est un R-module annulé par une puissance de $\mathfrak{p}$ de dimension projective 1 et $\varphi : M \to M$ un morphisme σ-linéaire qui est un isomorphisme σ-linéaire au point générique de $\mathrm{Spec}(R/\mathfrak{p})$. Si $u \in \mathfrak{m}_R \setminus \mathfrak{p}$, on peut reformuler les conditions précédentes en disant que M est un

R-module annulé par une puissance de $\mathfrak{p}$, sans u-torsion, et $\varphi : M \to M$ est un morphisme σ-linéaire tel que $\varphi \otimes \sigma : M[\frac{1}{u}] \to M[\frac{1}{u}]$ soit un isomorphisme σ-linéaire. Munie des fonctions

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(M,\varphi) &= \mathrm{long}_{R[\frac{1}{u}]} M\big[\frac{1}{u}\big] \\ \deg(M,\varphi) &= \mathrm{long}_R M/R.\varphi(M), \end{aligned}$$

la catégorie $\mathcal{C}$ est de Harder-Narasimhan.

Lorsque $R = W[\![u]\!]$ où W désigne les vecteurs de Witt d'un corps parfait de caractéristique $p > 0$, σ est l'endomorphisme continu de R tel que $\sigma(u) = u^p$ et $\sigma_{|W}$ est le Frobenius de W, $\mathfrak{p} = pR$, on retrouve les catégories d'objets étudiées dans [**10**] et [**46**].

5.5.2.7. Schémas en groupes finis et plats. — Les catégories exactes considérées dans les exemples précédents sont toutes des catégories tensorielles. De plus, la fonction degré sur ces catégories est obtenue par composition d'un morphisme degré

$$\deg : \mathrm{Pic}(\mathcal{C}) \longrightarrow \mathbb{Z},$$

où $\mathrm{Pic}(\mathcal{C})$ désigne le groupe formé des classes d'isomorphisme d'objets de rang 1, et d'une application déterminant

$$\det : \mathcal{C} \longrightarrow \mathrm{Pic}(\mathcal{C})$$

additive sur les suites exactes de $\mathcal{C}$.

Soit maintenant K un corps valué complet pour une valuation non triviale à valeurs dans $\mathbb{R}$. Notons p la caractéristique du corps résiduel de K. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie des schémas en groupes commutatifs finis et plats sur $\mathcal{O}_K$, d'ordre une puissance de p et étales en fibre générique. Elle est munie de deux fonctions additives hauteur et degré ([**19**]) où

$$\mathrm{ht}(G) = \log_p |G|$$

et

$$\deg(G) = \sum_i v(a_i) \ \text{ si } \ \omega_G \simeq \oplus_i \mathcal{O}_K/a_i\mathcal{O}_K.$$

Soit $\mathcal{A}$ la catégorie abélienne des schémas en groupes commutatifs étales sur K. Il y a un foncteur fibre générique

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ G &\longmapsto G \otimes K. \end{aligned}$$

Il est démontré dans [**19**] que les axiomes précédents sont satisfaits et que l'on dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan pour les objets de $\mathcal{C}$ relativement à la fonction pente $\frac{\deg}{\mathrm{ht}}$.

Supposons K de valuation discrète, de caractéristique p et à corps résiduel k parfait, $K \simeq k((u))$. On peut alors montrer que la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à celle des

couples (M, φ) où M est un $W(k)[\![u]\!]$-module annulé par une puissance de p sans u-torsion et φ un endomorphisme σ-linéaire de M induisant un isomorphisme σ-linéaire après inversion de u (on a déjà rencontré cette catégorie dans la section 5.5.2.6). Via cette équivalence de catégories les filtrations de Harder-Narasimhan se correspondent. Cette catégorie est munie d'un produit tensoriel. La fonction degré est définie via une application degré sur les objets de hauteur 1 et une application déterminant.

Supposons K de valuation discrète, de caractéristique 0 et à corps résiduel k parfait. On a donc $K \simeq K_0[\![u]\!]/(E(u))$ où $K_0 = W(k)\left[\frac{1}{p}\right]$ et $E \in \mathcal{O}_{K_0}[\![u]\!]$ est un polynôme unitaire d'Eisenstein. D'après [**46**] la catégorie $\mathcal{C}$ est équivalente à celle des couples (M, φ) où M est un $W(k)[\![u]\!]$-module annulé par une puissance de p sans u-torsion et φ un endomorphisme σ-linéaire de M tel que $M/W(k)[\![u]\!].\varphi(M)$ soit annulé par $E(u)$. Ce n'est donc pas une catégorie tensorielle, on ne peut définir une application déterminant sur celle-ci. Néanmoins, on dispose d'une telle application sur la catégorie formée des couples (M, φ) comme dans la section précédente. On peut donc définir le déterminant, $\det G$ pour $G \in \mathcal{C}$, comme objet de la catégorie précédente mais pas de $\mathcal{C}$. Les filtrations de Harder-Narasimhan dans $\mathcal{C}$ sont alors un cas particulier des filtrations dans la catégorie précédente (via l'équivalence de [**46**]).

Supposons que la valuation de K ne soit pas discrète ou bien le corps résiduel non parfait. La fonction degré précédente ne provient pas alors à priori d'une fonction degré sur des objets de rang 1 composée avec une application déterminant.

5.6. Classification de fibrés

5.6.1. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann. — Avant de nous lancer dans la classification des fibrés sur les courbes qui nous intéresse, on revisite le théorème de classification des fibrés sur la droite projective de Grothendieck.

Définition 5.6.1. — Une sphère de Riemann est une courbe complète X possèdant un point $\infty \in X$ de degré 1, tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine, vérifiant $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ et telle que

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(-\infty)) = 0.$$

Une telle courbe satisfait aux hypothèses de la section 5.4. On a donc deg : $\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}$. On notera pour tout entier k, $\mathcal{O}_X(k) = \mathcal{O}_X(k.\infty)$ pour un point de degré 1, ∞. Remarquons que si $k \in \mathbb{Z}$ et $\mathscr{E}$ est un fibré sur X,

$$\mu(\mathscr{E}(k)) = \mu(\mathscr{E}) + k$$

et que $\mathscr{E}$ est semi-stable si et seulement si $\mathscr{E}(k)$ l'est. Enfin, pour une telle courbe, $H^0(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ lorsque $k < 0$ et $H^1(X, \mathcal{O}_X(k)) = 0$ lorsque $k \geq -1$. En particulier, $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ et on peut penser à X comme une « courbe de genre nul ».

Dans la suite on appellera sous-fibré un sous-fibré localement facteur direct i.e. les sous-objets stricts de la catégorie exacte des fibrés. Si $u : \mathscr{E} \to \mathscr{F}$ est un morphisme de fibrés on notera $\mathrm{Im}(u)$, un sous-fibré de $\mathscr{F}$, l'image de u dans la catégorie des fibrés i.e. l'adhérence schématique de l'image de u en fibre générique.

Voici la réinterprétation du théorème de Grothendieck de classification des fibrés sur $\mathbb{P}^1$ ([**30**]).

Théorème 5.6.2. — *Soit X une sphère de Riemann.*

1. *Les fibrés semi-stables sur X sont les fibrés isomorphes à un fibré de la forme $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus a}$ pour des entiers $d \in \mathbb{Z}$ et $a \geq 0$.*
2. *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.*
3. *Pour tout entier n, l'application*

$$\begin{array}{rcl} \{(d_1, \ldots, d_n) \in \mathbb{Z}^n \mid d_1 \geq \cdots \geq d_n\} & \longrightarrow & \{\textit{fibrés de rang } n \textit{ sur } X\}/\sim \\ (d_1, \ldots, d_n) & \longmapsto & \Big[\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(d_i)\Big] \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. — Commençons par remarquer que le point (1) entraine le reste du théorème. En effet, pour des entiers $d_1, d_2 \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{Ext}^1\big(\mathcal{O}_X(d_2), \mathcal{O}_X(d_1)\big) \simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(d_1 - d_2))$$

qui est nul si $d_1 > d_2$. Cela entraine facilement l'assertion (2) à partir de (1). La dernière assertion s'en déduit aussitôt.

Montrons le point (1). Tout d'abord constatons que si $a \in \mathbb{N}$ et $d \in \mathbb{Z}$, le fibré $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus a}$ est semi-stable puisque somme directe de fibrés semi-stables de même pentes (cf. théorème 5.5.4). On montre maintenant l'assertion suivante par récurrence sur l'entier n : tout fibré semi-stable de rang inférieur ou égal à n est isomorphe à un fibré de la forme $\mathcal{O}_X(d)^{\oplus m}$ pour des entiers $d \in \mathbb{Z}$, $1 \leq m \leq n$. Supposons l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n. Soit $\mathscr{E}$ un fibré semi-stable de rang $n+1$. Soit $\mathscr{L} \subset \mathscr{E}$ un sous-fibré en droites de degré maximal. On a donc

$$\deg \mathscr{L} \leq \mu(\mathscr{E}).$$

Posons

$$\mathscr{E}' = \mathscr{E}/\mathscr{L}.$$

La première pente du polygone de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}'$ est supérieure ou égale à $\mu(\mathscr{E}')$. D'après l'hypothèse de récurrence appliquée au premier cran de la filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}'$, il existe un sous-fibré en droites $\mathscr{L}' \subset \mathscr{E}'$ vérifiant

$$\deg(\mathscr{L}') \geq \mu(\mathscr{E}').$$

On a, par semi-stabilité de $\mathscr{E}$, $\mu(\mathscr{E}') \geq \mu(\mathscr{E})$. On obtient finalement que

$$\deg(\mathscr{L}) \leq \mu(\mathscr{E}) \leq \deg(\mathscr{L}').$$

Soit $\mathscr{E}''$ le sous-fibré de $\mathscr{E}$ image réciproque de $\mathscr{L}'$ par la projection $\mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{E}'$. On dispose d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E}'' \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow 0.$$

Soient $d = \deg \mathscr{L}$ et $d' = \deg \mathscr{L}'$. On a donc $\mathscr{L} \simeq \mathcal{O}_X(d)$ et $\mathscr{L}' \simeq \mathcal{O}_X(d')$. Distinguons maintenant deux cas.

- Supposons $d \geq d'$, c'est à dire $d = d' = \mu(\mathscr{E})$. Alors, $\mathscr{L}$ et $\mathscr{E}$ étant semi-stables de même pente, $\mathscr{E}'$ est semi-stable de pente $\mu(\mathscr{E})$. L'hypothèse de récurrene entraine donc que $\mathscr{E}' \simeq \mathcal{O}_X(d)^n$. Mais, puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d)^n, \mathcal{O}_X(d)) = H^1(X, \mathcal{O}_X)^n = 0$, la suite

$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow 0$$

  est scindée et donc $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(d)^{n+1}$. On a donc conclu dans ce cas là.
- Supposons $d \leq d' - 1$. Appliquons $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), -)$ à la suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E}'' \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow 0.$$

  On obtient une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \quad &\longrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathscr{L})}_{\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(-1))=0} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathscr{E}'') \longrightarrow \underbrace{\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathscr{L}')}_{\simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(d'-d-1))} \\ &\longrightarrow \quad \underbrace{\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d+1), \mathscr{L}')}_{\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))=0} \end{aligned}$$

  et donc

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d+1), \mathscr{E}'') \simeq H^0(X, \mathcal{O}_X(d' - d - 1)) \neq 0.$$

  Si $u : \mathcal{O}_X(d+1) \to \mathscr{E}''$ est un morphisme non nul, $\mathrm{Im}(u)$ est un sous-fibré en droites de $\mathscr{E}''$, et donc de $\mathscr{E}$, de degré

$$\deg(\mathrm{Im}(u)) \geq \deg(\mathcal{O}_X(d+1)) = d + 1.$$

  Cela contredit le fait que $\mathscr{L}$ soit un sous-fibré en droites de degré maximal dans $\mathscr{E}$. Ce cas là est donc impossible.

□

5.6.2. Une remarque sur les fibrés de rang 2. — Dans cette section on explique différentes formulations équivalentes du point de divergence entre les courbes qui nous intéressent et $\mathbb{P}^1$ de trois point de vue :

1. en termes de semi-stabilité,
2. du point de vue cohomologique,
3. du point de vue presque-euclidien/euclidien.

Soit X une courbe complète possédant un point $\infty \in X$ de degré 1 tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine et $\mathrm{Pic}(X \setminus \{\infty\}) = 0$ (cf. section 5.4).

Proposition 5.6.3. — *Supposons que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. Sont équivalents :*

1. *Il existe un fibré semi-stable de rang 2 sur X qui n'est pas somme directe de deux fibrés en droites.*
2. *$H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$.*
3. *Pour $\infty \in X$ un point de degré 1 tel que $X \setminus \{\infty\}$ soit affine égal à Spec(B), l'anneau principal $(B, -v_\infty)$ n'est pas euclidien.*

Démonstration. L'équivalence entre les deux derniers points résulte de la proposition 5.4.2. Soit maintenant $\mathscr{E}$ un fibré semi-stable de rang 2 ne pouvant s'écrire comme somme directe de deux fibrés en droites. Soit $\mathscr{L}$ un sous-fibré en droites de $\mathscr{E}$ de degré maximal et $\mathscr{L}' = \mathscr{E}/\mathscr{L}$. Notons $d_1 = \deg(\mathscr{L})$ et $d_2 = \deg(\mathscr{L}')$. Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X(d_1) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(d_2) \longrightarrow 0.$$

La semi-stabilité de $\mathscr{E}$ induit les inégalités

$$d_1 \leq \mu(\mathscr{E}) \leq d_2.$$

Par hypothèse cette suite exacte n'est pas scindée. Or, on a l'égalité $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(d_2), \mathcal{O}_X(d_1)) = H^1(X, \mathcal{O}_X(d_1 - d_2))$. Donc, puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$,

$$d_1 < d_2.$$

Appliquons $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), -)$ à la suite exacte précédente. On obtient une suite

$$0 \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), \mathscr{E}) \longrightarrow H^0(X, \mathcal{O}_X(d_2 - d_1 - 1)) \longrightarrow H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))$$

Si l'on avait $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) = 0$ on aurait donc

$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(d_1 + 1), \mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} H^0(X, \mathcal{O}_X(d_1 - d_1 - 1)) \neq 0.$$

On disposerait donc d'un morphisme $u : \mathcal{O}_X(d_1 + 1) \to \mathscr{E}$ non nul. Son image $\mathrm{Im}(u)$ serait un fibré en droites de degré supérieur ou égal à $d_1 + 1$. Cela est impossible grâce au choix fait de $\mathscr{L}$. On a donc $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$.

Supposons réciproquement que $H^1(X, \mathcal{O}_X(-1)) \neq 0$. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow 0$$

une extension associée à une classe non nulle dans $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(1), \mathcal{O}_X) = H^1(X, \mathcal{O}_X(-1))$. Montrons que $\mathscr{E}$ est semi-stable et ne peut s'écrire comme somme directe de deux fibrés en droites. Soit $\mathscr{L}$ un sous-fibré en droites de $\mathscr{E}$. Si $\mathscr{L} = \mathcal{O}_X$, $\deg(\mathscr{L}) = 0 \leq \frac{1}{2} = \mu(\mathscr{E})$. Si $\mathscr{L} \neq \mathcal{O}_X$, le morphisme composé

$$\mathscr{L} \hookrightarrow \mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_X(1)$$

est un isomorphisme en fibre générique. On a donc

$$\deg(\mathscr{L}) \leq 1.$$

Si $\deg(\mathscr{L}) = 1$, le morphisme $\mathscr{L} \to \mathcal{O}_X(1)$ est un isomorphisme et la suite exacte précédente est scindée, ce qui n'est pas le cas par hypothèse. On a donc $\deg(\mathscr{L}) \leq 0 \leq \mu(\mathscr{E})$. Le fibré $\mathscr{E}$ est donc semi-stable. Montrons maintenant que $\mathscr{E}$ n'est pas somme directe de deux fibrés en droites. Supposons donc par l'absurde que $\mathscr{E} = \mathscr{L}_1 \oplus \mathscr{L}_2$. Soient $d_1 = \deg \mathscr{L}_1$ et $d_2 = \deg \mathscr{L}_2$. Par semi-stabilité de $\mathscr{E}$, étant donné que $\mu(\mathscr{E}) = \frac{1}{2}$, $d_1 \leq 0$ et $d_2 \leq 0$. Mais cela est impossible car $d_1 + d_2 = \deg(\mathscr{E}) = 1$. □

Exemple 5.6.4. — Pour la courbe X de l'exemple 5.4.3 avec $h = 1$, on verra plus tard que l'on peut naturellement associer à tout isocristal un fibré vectoriel sur X dont les pentes d'Harder-Narasimhan sont les pentes de Dieudonné-Manin de l'isocristal. Il existe donc naturellement des fibrés semi-stables de rang 2 et de pente 1/2 sur X et les hypothèses de 5.6.3 sont vérifiées. La simple existence de ces fibrés de pente non-entière associés aux isocristaux traduit donc la divergence entre X et $\mathbb{P}^1$ et le fait que $(B_e, \deg)$ ne soit pas euclidien.

5.6.3. Opérations sur les fibrés. — Avant d'aller plus loin nous avons besoin de propriétés supplémentaires concernant les opérations sur les fibrés.

5.6.3.1. Image directe et réciproque par un morphisme étale fini. —

Définition 5.6.5. — Un morphisme étale fini de courbes est un morphisme étale fini des schémas sous-jacents aux courbes, $f : X \to Y$, tel que pour tout $x \in X$,

$$\deg(x) = [k(x) : k(f(x))] \,.\, \deg(f(x)).$$

Définition 5.6.6. — Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini de courbes. Pour $D = \sum_{x \in |X|} m_x[x] \in \mathrm{Div}(X)$ on pose

$$f_* D = \sum_{x \in |X|} m_x.[k(x) : k(f(x))].[f(x)].$$

Pour $D = \sum_{y \in |Y|} m_y.[y] \in \mathrm{Div}(Y)$ on pose

$$f^* D = \sum_{x \in |X|} m_{f(x)}.[x].$$

Pour un tel morphisme étale de courbes on a donc deux morphismes

$$\mathrm{Div}(X) \underset{f^*}{\overset{f_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Div}(Y)$$

vérifiant

$$f_* f^* = \deg(f).\mathrm{Id}.$$

On a de plus les formules

$$\begin{aligned} \deg(f_* D) &= \deg(D) \\ \deg(f^* D) &= \deg(f).\deg(D). \end{aligned}$$

Le lemme qui suit ne pose pas de problème.

Lemme 5.6.7. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini de courbes. Les diagramme suivants sont commutatifs*

$$\begin{tikzcd} F(X)^\times \arrow[r, "\mathrm{div}"] \arrow[d, "N_{F(X)/F(Y)}"'] & \mathrm{Div}(X) \arrow[d, "f_*"] \\ F(Y)^\times \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Div}(Y) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X)^\times \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Div}(X) \arrow[r] & \mathrm{Pic}(X) \\ F(Y)^\times \arrow[u, hook] \arrow[r, "\mathrm{div}"] & \mathrm{Div}(Y) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r] & \mathrm{Pic}(Y). \arrow[u, "f^*"] \end{tikzcd}$$

Proposition 5.6.8. — *Étant donné un morphisme étale fini de schémas $f : X \to Y$ il y a un isomorphisme canonique de fibrés en droites*

$$\det(f_*\mathcal{O}_X)^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y.$$

Démonstration. On peut supposer f de degré constant d. La donnée de f est alors équivalente à celle du $\mathfrak{S}_d$-torseur étale sur Y, $E = \mathrm{Isom}_Y(\{1, \ldots, d\}, X)$ (« on numérote les éléments de la fibre du revêtement » en un point de X). Soit $\epsilon : \mathfrak{S}_d \to \mu_2$ la signature. Le μ_2-torseur $\epsilon_* E$ définit via $\mu_2 \to \mathbb{G}_m$ un fibré en droites $\mathcal{N}$ de carré trivial. Montrons que $\det(f_*\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{N}$. Soit pour cela $\pi : E \to Y$ le morphisme structural de notre torseur. Il y a alors un isomorphisme

$$\pi^*(f_*\mathcal{O}_X) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{\sigma \in \mathfrak{S}_s} \mathcal{O}_E$$

qui induit un isomorphisme

$$\pi^*(\det(f_*\mathcal{O}_X)) = \det(\pi^*(f_*\mathcal{O}_X)) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_E.$$

Cet isomorphisme est un isomorphisme de fibrés en droites sur E munis d'une donnée de descente relativement à l'action de $\mathfrak{S}_d$ sur E. On vérifie alors que la donnée de descente sur le membre de droite du dernier isomorphisme est donnée par la signature d'une permutation. □

Remarque 5.6.9. — En général, on n'a pas $\det(f_*\mathcal{O}_X) \simeq \mathcal{O}_Y$. Considérons par exemple le cas où 2 est inversible sur Y et $\mathrm{Pic}(Y)$ possède de la 2-torsion non-triviale. Soit $\mathscr{L}$ un fibré en droites non-trivial muni d'un isomorphisme $\mathscr{L}^{\otimes 2} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_Y$ et $f : X \to Y$ le μ_2-torseur associé. Alors, $f_*\mathcal{O}_X = \mathcal{O}_Y \oplus \mathscr{L}$ qui est donc de déterminant non-trivial.

Remarque 5.6.10. — Une autre preuve de la proposition 5.6.8 consiste à regarder la forme quadratique trace : $f_*\mathcal{O}_X \times f_*\mathcal{O}_X \to \mathcal{O}_Y$ dont le discriminant fournit l'isomorphisme cherché.

Lemme 5.6.11. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale de courbe et $D \in \mathrm{Div}(X)$. Il y a alors un isomorphisme de fibrés en droites*

$$\det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \simeq \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_Y(f_*D).$$

Démonstration. On peut supposer f de degré constant d. Soit $D' \in \mathrm{Div}(Y)$ et supposons le l'assertion vérifiée pour le diviseur $D + f^*D'$. La formule de projection donne

$$\det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \otimes \mathcal{O}_Y(dD') \simeq \det(f_*\mathcal{O}_X(D + f^*D')).$$

Par hypothèse on a

$$\begin{aligned} \det(f_*\mathcal{O}_X(D + f^*D')) &\simeq \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_Y(f_*(D + f^*D')) \\ &= \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_Y(f_*D + dD') \\ &= \det(f_*\mathcal{O}_X) \otimes \mathcal{O}_Y(f_*D) \otimes \mathcal{O}_Y(dD') \end{aligned}$$

et on en déduit donc le résultat pour le diviseur D.

Quitte à remplacer D par $D + f^*D'$ on peut donc supposer que $D \geq 0$ et donc, si $D = \sum_{x \in |X|} a_x[x]$, on a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \bigoplus_{x \in |X|} i_{x*}\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^{a_x} \longrightarrow 0.$$

Pour tout $x \in |X|$, puisque $\mathcal{O}_{X,x}$ est plat non-ramifié sur $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$, le choix d'un relèvement dans $\mathcal{O}_{X,x}$ d'une base de $k(x)$ comme $k(f(x))$-espace vectoriel induit des isomorphismes de $\mathcal{O}_{Y,f(x)}$-modules

$$\mathcal{O}_{X,x}/\mathfrak{m}_x^k \simeq (\mathcal{O}_{Y,f(x)}/\mathfrak{m}_{f(x)})^{[k(x):k(f(x))]}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Prenant l'image directe de la suite exacte précédent on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X \longrightarrow f_*\mathcal{O}_X(D) \longrightarrow \bigoplus_{y \in |Y|} i_{y*}\Big(\bigoplus_{x \in f^{-1}(y)} (\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^{a_x})^{[k(x):k(y)]}\Big) \longrightarrow 0.$$

On a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \det(f_*\mathcal{O}_X) \longrightarrow \det(f_*\mathcal{O}_X(D)) \longrightarrow \bigoplus_{y \in |Y|} i_{y*}\mathcal{O}_{Y,y}/\mathfrak{m}_y^{b_y} \longrightarrow 0$$

où $b_y = \sum_{x \in f^{-1}(y)} [k(x) : k(y)]a_x$. Le résultat s'en déduit. □

Proposition 5.6.12. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini de courbes. Notons $\mathrm{Div}(X)/\sim$ les classes d'équivalences rationnelles de diviseurs et considérons l'isomorphisme $Pic(X) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Div}(X)/\sim$ envoyant la classe d'isomorphisme de $\mathcal{O}_X(D)$ sur la classe d'équivalence de D. Alors le diagramme suivant est commutatif*

$$\begin{tikzcd} Pic(X) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \arrow[r] \arrow[d, "\det \circ f_*"'] & (\mathrm{Div}(X)/\sim) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \arrow[d, "f_*"] \\ Pic(Y) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \arrow[r] & (\mathrm{Div}(Y)/\sim) \otimes \mathbb{Z}[\frac{1}{2}] \end{tikzcd}$$

Remarque 5.6.13. — La proposition précédente ne dit rien d'autre que le fait qu'on dispose d'un théorème de Riemann-Roch-Grothendieck modulo la 2-torsion pour les

morphismes étales finis. La remarque 5.6.9 fournit quant-à elle le contre exemple le plus simple qui soit à l'existence d'un tel théorème à coefficients entiers.

Lemme 5.6.14. — *Soient $f : X \to Y$ un morphisme fini localement libre de schémas et $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X. Il y a un isomorphisme*

$$\det(f_*\mathscr{E}) \simeq \det(f_* \det \mathscr{E}).$$

Démonstration. Soit un entier $n \geq 1$. Notons $\mathrm{Res}_{X/Y}$ la restriction des scalaires à la Weil et $N_{X/Y} : \mathrm{Res}_{X/Y}\mathbb{G}_m \longrightarrow \mathbb{G}_m$ la norme. D'après le lemme 1, A.3.112, de [**9**], il y a un diagramme commutatif de Y-schémas en groupes

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Res}_{X/Y}\mathrm{GL}_n \arrow[r, "\mathrm{Res}_{X/Y}\det"] \arrow[d, hook] & \mathrm{Res}_{X/Y}\mathbb{G}_m \arrow[r, "N_{X/Y}"] & \mathbb{G}_m \arrow[d, equal] \\
\mathrm{GL}(f_*\mathcal{O}_X) \arrow[r, "\det"] & \mathrm{GL}(\det(f_*\mathcal{O}_X)) \arrow[r, equal] & \mathbb{G}_m.
\end{tikzcd}$$

Si $\mathscr{E}$ est localement libre de rang n, le lemme en résulte par application du diagramme précédent au GL_n-torseur associé à $\mathscr{E}$. □

De ce lemme et de la proposition 5.6.12 on déduit la proposition suivante.

Proposition 5.6.15. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini de courbes complètes et $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X. Alors,*

$$\deg(f_*\mathscr{E}) = \deg(\mathscr{E}).$$

Résumons les résultats précédents dans la proposition qui suit.

Proposition 5.6.16. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini de courbes. Supposons Y complète. Alors, X est complète. Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur X,*

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f_*\mathscr{E}) &= \deg(f).\mathrm{rg}(\mathscr{E}) \\
\deg(f_*\mathscr{E}) &= \deg(\mathscr{E}) \\
\mu(f_*\mathscr{E}) &= \tfrac{1}{\deg(f)}\mu(\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

Si $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel sur Y,

$$\begin{aligned}
\mathrm{rg}(f^*\mathscr{E}) &= \mathrm{rg}(\mathscr{E}) \\
\deg(f^*\mathscr{E}) &= \deg(f).\deg(\mathscr{E}) \\
\mu(f^*\mathscr{E}) &= \deg(f)\mu(\mathscr{E}).
\end{aligned}$$

5.6.3.2. Fibrés équivariants. — Puisque nous l'utiliserons maintes fois, rappelons le lemme qui suit.

Lemme 5.6.17. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme de courbes étale fini galoisien de groupe Γ. Alors, les foncteurs $\mathscr{E} \mapsto f^*\mathscr{E}$ et $\mathscr{F} \mapsto (f_*\mathscr{F})^\Gamma$ induisent des équivalences inverses entre la catégorie des fibrés sur Y et celle des fibrés Γ-équivariants sur X.*

Exemple 5.6.18. — Avec les hypothèses du lemme précédent, si $\mathscr{E}$ est un fibré sur X, $f^*f_*\mathscr{E} \simeq \oplus_{\sigma\in\Gamma}\sigma^*\mathscr{E}$. Ainsi, le fibré $f_*\mathscr{E}$ sur Y correspond au fibré équivariant induit $\mathrm{Ind}_{\{1\}}^{\Gamma}\mathscr{E}$.

Le lemme suivant sera crucial dans la suite.

Lemme 5.6.19. — *Soit $f : X \to Y$ un morphisme étale fini galoisien de courbes complètes. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur Y. Soit*

$$0 = \mathscr{E}_0 \subsetneq \mathscr{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \mathscr{E}_r = \mathscr{E}$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Alors,

$$0 = f^*\mathscr{E}_0 \subsetneq f^*\mathscr{E}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq f^*\mathscr{E}_r = f^*\mathscr{E}$$

est la filtration de Harder-Narasimhan de $f^*\mathscr{E}$. En particulier, $\mathscr{E}$ est semi-stable si et seulement si $f^*\mathscr{E}$ l'est.

Démonstration. Soit le groupe fini $\Gamma = \mathrm{Aut}(X/Y)$. Remarquons que si $\mathscr{F}$ est un fibré sur X alors pour tout $\sigma \in \Gamma$,

$$\mu(\mathscr{F}^\sigma) = \mu(\mathscr{F}).$$

Afin de démontrer l'assertion du lemme il suffit de montrer que si $\mathscr{E}$ est semi-stable alors $f^*\mathscr{E}$ l'est. Mais par unicité de la filtration d'Harder-Narasimhan de $f^*\mathscr{E}$ et la propriété précédente d'invariance de la fonction μ sous Γ, cette filtration est Γ-invariante. Ainsi si $\mathscr{E}$ est semi-stable sur Y, la filtration de Harder-Narasimhan de $f^*\mathscr{E}$ descend à Y et est donc triviale. □

Soit X un schéma muni d'une action d'un groupe Γ. Un fibré équivariant sur X est un couple $(\mathscr{E}, (c_\sigma)_{\sigma\in\Gamma})$ où $\mathscr{E}$ est un fibré sur X et pour tout $\sigma \in \Gamma$,

$$c_\sigma : \sigma^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$$

vérifiant

$$\forall \sigma, \tau \in \Gamma, \quad c_\tau \circ \tau^* c_\sigma = c_{\sigma\tau}.$$

Pour un tel fibré équivariant le groupe $\mathrm{Aut}(\mathscr{E})$ est mune d'une action de Γ, $\Gamma \to \mathrm{Aut}(\mathscr{E})$, en posant

$$\forall f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{E}), \quad f^\sigma = c_\sigma \circ \sigma^* f \circ c_\sigma^{-1}.$$

Maintenant, si $(c'_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est une autre structure de fibré équivariant sur $\mathscr{E}$, posons pour $\sigma \in \Gamma$

$$d_\sigma = c_\sigma \circ {c'}_\sigma^{-1} \in \mathrm{Aut}(\mathscr{E}).$$

On vérifie que $(d_\sigma)_{\sigma\in\Gamma}$ est un 1-cocyle, élément de $Z^1(\Gamma, \mathrm{Aut}(\mathscr{E}))$. Réciproquement, la donnée d'un tel cocyle définit une nouvelle structure de fibré équivariant sur $\mathscr{E}$. On vérifie de plus que $(\mathscr{E}, (c'_\sigma)_\sigma) \simeq (\mathscr{E}, (c''_\sigma)_\sigma)$ si et seulement si les cocyles précédents sont cohomologues. On déduit de cela la proposition qui suit.

Proposition 5.6.20. — *Soit $\mathscr{E}$ un fibré muni d'une structure de fibré Γ-équivariant et $\Gamma \to Aut(\mathscr{E})$ l'action associée de Γ.*

1. *L'ensemble des structures de fibré Γ-équivariant sur $\mathscr{E}$ est en bijection avec l'ensemble des 1-cocyles dans $Z^1(\Gamma, Aut(\mathscr{E}))$, au 1-cocycle c est associé un fibré Γ-équivariant tordu $\mathscr{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c$.*
2. *Les fibrés Γ-équivariants $\mathscr{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c_1$ et $\mathscr{E} \overset{\Gamma}{\wedge} c_2$ sont isomorphes si et seulement si les cocycles c_1 et c_2 différent d'un cobord*
3. *Les classes d'isomorphisme de fibrés équivariants dont le fibré sous-jacent est isomorphe à $\mathscr{E}$ est en bijection avec l'ensemble*

$$H^1(\Gamma, Aut(\mathscr{E})).$$

5.6.4. Classification des fibrés sur les sphères de Riemann généralisées. —

5.6.4.1. Sphères de Riemann généralisées. —

Définition 5.6.21. — Une sphère de Riemann généralisée est un couple (X, E_∞) où

— X est une courbe complète de corps de définition E,

— $E_\infty|E$ est une extension algébrique de corps galoisienne de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$,

satisfaisant :

1. Pour tout $x \in |X|$, l'extension $E_\infty|E$ se plonge dans $k(x)|E$.
2. Il existe un point fermé de degré 1, $\infty \in |X|$ tel que pour toute extension de degré fini $E'|E$ contenue dans E_∞ il existe un point fermé de $X \otimes_E E'$ au dessus de ∞ dont le complémentaire est le spectre d'un anneau principal.
3. On a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

Soit donc (X, E_∞) une sphère de Riemann généralisée. On note alors

$$E_h = E_\infty^{h\widehat{\mathbb{Z}}}$$

une extension cyclique de degré h de E, $E_\infty = \cup_h E_h$. On note

$$X_h := X \otimes_E E_h.$$

et

$$\pi_h : X_h \longrightarrow X.$$

Plus généralement, lorsque $h|h'$ on note

$$\pi_{h',h} : X_{h'} \longrightarrow X_h.$$

Le schéma X_h est noethérien régulier de dimension 1. Puisque E est intégralement fermé dans $E(X)$ (5.1.5) X_h est intègre. Étant donné que E_∞ se plonge dans le corps résiduel de tous les points fermés de X, pour tout $x \in |X|$, $\pi_h^{-1}(x)$ est formé de h-points fermés distincts de même corps résiduel que x i.e. *le morphisme étale π_h est totalement décomposé en tout point de $|X|$*. On munit X_h d'une fonction degré en posant pour $x \in |X_h|$

$$\deg(x) = \deg(\pi_h(x)).$$

On vérifie alors que cela muni X_h d'une structure de courbe complète de corps de définition E_h. Les morphismes $\pi_{h',h}$ sont étales finis au sens de la définition 5.6.5. On obtient donc une tour de revêtements de courbes complètes

$$\begin{tikzcd}
\vdots \arrow[d] \\
X_{h'} \arrow[d] \arrow[dd, bend right=60, "\mathbb{Z}/h'\mathbb{Z}"'] \\
X_h \arrow[d] \arrow[dd, bend left=60, "\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}"] \\
\vdots \arrow[d] \\
X_1 = X
\end{tikzcd}$$

On vérifie aussitôt que pour tout h, (X_h, E_∞) est encore une sphère de Riemann généralisée.

Les courbes $(X_h)_h$ satisfont aux hypothèses de la section 5.4. On fixe désormais un système compatible de points de degré 1, $(\infty_h)_h \in \varprojlim_{h\geq 1} |X_h|$ et on note pour tout entier $k \geq 1$,

$$\mathcal{O}_{X_h}(k) = \mathcal{O}_X\Big(\sum_{i=0}^{k-1}[\sigma^i(\infty_h)]\Big)$$

où $\sigma = \bar{1} \in \mathbb{Z}/h\mathbb{Z} = \mathrm{Aut}(X_h/X)$. Pour $k \leq 0$ on pose $\mathcal{O}_{X_h}(k) = \mathcal{O}_{X_h}(-k)^{-1}$.

On a donc

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{Z} \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{Pic}(X_h) \arrow[l, bend right, "\deg"'] \\
d \arrow[r, mapsto] & {[\mathcal{O}_{X_h}(d)]}.
\end{tikzcd}$$

En particulier $\mathcal{O}_{X_h}(d) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(1)^{\otimes d}$. Néanmoins, il est préférable de prendre la définition précédente pour $\mathcal{O}_{X_h}(d)$. Elle fournit en effet une identification canonique $\pi_{nh,h}^*\mathcal{O}_{X_h}(d) = \mathcal{O}_{X_{nh}}(nd)$ qui fait apparaître plus clairement la structure de fibré $\mathrm{Gal}(E_{nh}|E_h)$-équivariant sur $\mathcal{O}_{X_{nh}}(n)$.

Définition 5.6.22. — Soient $d \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}_{>0}$. On note

$$\mathcal{O}_X(d,h) = \pi_{h*}\big(\mathcal{O}_{X_h}(d)\big)$$

comme fibré vectoriel sur X. Si $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d,h) = 1$ et $h > 0$, on note

$$\mathcal{O}_X(\lambda) = \mathcal{O}_X(d,h).$$

Pour un entier n, on utilise les même notations pour la sphère de Riemann généralisée $(X_h)_{n|h}$ i.e. $\mathcal{O}_{X_n}(d,h) = \pi_{nh,n*}\big(\mathcal{O}_{X_{nh}}(d)\big)$.

Proposition 5.6.23. — *Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ notons $m(\lambda)$ l'ordre de λ mod $\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Soient $d \in \mathbb{Z}$, $h \in \mathbb{N}_{>0}$. On a les propriétés suivantes :*

1. *Si $\delta = (d,h)$,*
$$\mathcal{O}_X(d,h) \simeq \mathcal{O}_X\Big(\frac{d}{h}\Big)^{\oplus\delta}.$$
2. *Pour $n \in \mathbb{N}_{>0}$,*
$$\begin{aligned}\pi_n^*\big(\mathcal{O}_X(d,h)\big) &\simeq \mathcal{O}_{X_n}(nd,h)\\ \pi_{n*}\big(\mathcal{O}_{X_n}(d,h)\big) &\simeq \mathcal{O}_X(d,nh).\end{aligned}$$
et donc
$$\begin{aligned}\pi_n^*\big(\mathcal{O}_X(\lambda)\big) &\simeq \mathcal{O}_{X_n}(n\lambda)^{\oplus\frac{m(\lambda)}{m(n\lambda)}}\\ \pi_{n*}\big(\mathcal{O}_{X_n}(\lambda)\big) &\simeq \mathcal{O}_X\Big(\frac{\lambda}{n}\Big)^{\frac{nm(\lambda)}{m(\lambda/n)}}.\end{aligned}$$
3. *Le fibré $\mathcal{O}_X(d,h)$ est semi-stable de pente $\frac{d}{h}$. Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$, le fibré $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est semi-stable de pente λ.*
4. *Il y a des isomorphismes*
$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(d_1,h_1)\otimes\mathcal{O}_X(d_2,h_2) &\simeq \mathcal{O}_X(d_1h_2+d_2h_1,h_1h_2)\\ \mathcal{O}_X(d,h)^\vee &\simeq \mathcal{O}_X(-d,h).\end{aligned}$$
En particulier,
$$\begin{aligned}\mathcal{O}_X(\lambda_1)\otimes\mathcal{O}_X(\lambda_2) &\simeq \mathcal{O}_X(\lambda_1+\lambda_2)^{\oplus\frac{m(\lambda_1)m(\lambda_2)}{m(\lambda_1+\lambda_2)}}\\ \mathcal{O}_X(\lambda)^\vee &\simeq \mathcal{O}_X(-\lambda).\end{aligned}$$
5. *Pour $\lambda > \mu$,*
$$Hom(\mathcal{O}_X(\lambda),\mathcal{O}_X(\mu)) = 0.$$
Pour $\lambda \leq \mu$,
$$Ext^1(\mathcal{O}_X(\lambda),\mathcal{O}_X(\mu)) = 0.$$

Démonstration. Point (1) : Décomposons π_h en le composé

$$\pi_h : X_h \xrightarrow{\pi_{h,h/\delta}} X_{h/\delta} \xrightarrow{\pi_{h/\delta}} X.$$

On a donc

$$\mathcal{O}_X(d,h) = \pi_{h/\delta *}\Big(\pi_{h,h/\delta *}\big(\mathcal{O}_{X_h}(d)\big)\Big).$$

De plus,

$$\mathcal{O}_{X_h}(d) \simeq \pi^*_{h,h/\delta}\big(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)\big).$$

D'après la formule de projection,

$$\pi_{h,h/\delta *}\pi^*_{h,h/\delta}\big(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)\big) \simeq \big(\pi_{h,h/\delta *}\mathcal{O}_{X_h}\big) \otimes \mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(h/\delta).$$

Puisque $\pi_{h,h/\delta *}\mathcal{O}_{X_h} \simeq \mathcal{O}^{\oplus\delta}_{X_{h/\delta}}$ on obtient

$$\pi_{h,h/\delta *}\pi^*_{h,h/\delta}\big(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(d/\delta)\big) \simeq \big(\mathcal{O}_{X_{h/\delta}}(h/\delta)\big)^{\oplus\delta}.$$

On conclut quant au point (1).

Point (2) : Le second isomorphisme du point (2) est immédiat. Considérons le premier. Si $(n,h)=1$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} X_{nh} \arrow[r, "\pi_{nh,h}"] \arrow[d, "\pi_{nh,n}"'] & X_h \arrow[d, "\pi_h"] \\ X_n \arrow[r, "\pi_n"] & X \end{tikzcd}$$

est cartésien. On en déduit que

$$\begin{aligned} \pi^*_n\big(\mathcal{O}_X(d,h)\big) &= \pi^*_n\pi_{h*}\big(\mathcal{O}_{X_h}(d)\big) \\ &\simeq \pi_{nh,n*}\pi^*_{nh,n}\big(\mathcal{O}_{X_h}(d)\big) \\ &\simeq \pi_{nh,n*}\big(\mathcal{O}_{X_{nh}}(nd)\big) \\ &= \mathcal{O}_{X_n}(nd,h). \end{aligned}$$

En général, si $\delta=(n,h)$, d'après le cas précédent et l'exemple 5.6.18,

$$\begin{aligned} \pi^*_n\mathcal{O}_X(d,h) &= \pi^*_{n,n/\delta}\pi^*_{n/\delta}\big(\mathcal{O}_X(d,h)\big) \\ &\simeq \pi^*_{n,n/\delta}\big(\mathcal{O}_{X_{n/\delta}}\big(\tfrac{n}{\delta}d,h\big)\big) \\ &= \pi^*_{n,n/\delta}\pi_{n,n/\delta *}\big(\mathcal{O}_{X_n}\big(\tfrac{n}{\delta}d,\tfrac{h}{\delta}\big)\big) \\ &\simeq \mathcal{O}_{X_n}\big(\tfrac{n}{\delta}d,\tfrac{h}{\delta}\big)^{\oplus\delta}. \end{aligned}$$

D'après le point (1) démontré précédemment, ce dernier fibré s'identifie à $\mathcal{O}_{X_n}\big(d,h\big)$.

Point (3) : D'après le point (2) précédent, $\pi^*_h\mathcal{O}_X(d,h) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus h}$ qui est semi-stable comme somme directe de fibrés semi-stables de même pente (cf. théorème 5.5.4). Le lemme 5.6.19 permet de conclure.

Point (4) : La seconde égalité du point (4) est immédiate. Considérons la première. Supposons d'abord que $(h_1, h_2) = 1$. Le diagramme

$$\begin{tikzcd} & X_{h_1h_2} \arrow[dl] \arrow[dr] & \\ X_{h_1} \arrow[dr] & & X_{h_2} \arrow[dl] \\ & X & \end{tikzcd}$$

est alors cartésien. La formule de Künneth donne alors

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \otimes \mathcal{O}_X(d_2, h_2) &= \pi_{h_1*}\big(\mathcal{O}_{X_{h_1}}(d_1)\big) \otimes \pi_{h_2*}\big(\mathcal{O}_{X_{h_2}}(d_2)\big) \\ &\simeq \pi_{h_1h_2*}\Big(\pi^*_{h_1h_2,h_1}\big(\mathcal{O}_{X_{h_1}}(d_1)\big) \otimes \pi^*_{h_1h_2,h_2}\big(\mathcal{O}_{X_{h_2}}(d_2)\big)\Big) \\ &\simeq \pi_{h_1h_2*}\big(\mathcal{O}_{X_{h_1h_2}}(h_2d_1) \otimes \mathcal{O}_{X_{h_1h_2}}(h_1d_2)\big) \\ &\simeq \pi_{h_1h_2*}\big(\mathcal{O}_{X_{h_1h_2}}(h_2d_1 + h_1d_2)\big) \\ &= \mathcal{O}_X(h_2d_1 + h_1d_2, h_1h_2). \end{aligned}$$

En général, soit $\delta = (h_1, h_2)$. Alors, utilisant le cas précédent ainsi que le point (2),

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \otimes \mathcal{O}_X(d_2, h_2) &= \pi_{\delta*}\Big(\mathcal{O}_{X_\delta}\big(d_1, \frac{h_1}{\delta}\big)\Big) \otimes \mathcal{O}_X(d_1, h_2) \\ &\simeq \pi_{\delta*}\Big(\mathcal{O}_{X_\delta}\big(d_1, \frac{h_1}{\delta}\big) \otimes \pi^*_\delta \mathcal{O}_X(d_1, h_2)\Big) \\ &\simeq \pi_{\delta*}\Big(\mathcal{O}_{X_\delta}\big(d_1, \frac{h_1}{\delta}\big) \otimes \mathcal{O}_{X_\delta}(\delta d_1, h_2)\Big) \\ &\simeq \pi_{\delta*}\Big(\mathcal{O}_{X_\delta}\big(d_1h_2 + d_1h_1, \frac{h_1}{\delta}h_2\big)\Big) \\ &\simeq \mathcal{O}_X(d_1h_2 + d_2h_1, h_1h_2). \end{aligned}$$

Point (5) : La première égalité résulte de ce que $\mathcal{O}_X(\lambda)$ est semi-stable de pente λ, $\mathcal{O}_X(\mu)$ est semi-stable de pente μ et $\lambda > \mu$ (cf. théorème 5.5.4). On a, si $m = \frac{m(\lambda)m(\mu)}{m(\mu-\lambda)}$,

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathcal{O}_X(\mu)) &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(-\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(\mu)) \\ &\simeq H^1(X, \mathcal{O}_X(\mu - \lambda))^{\oplus m} \end{aligned}$$

De plus, si $\mathcal{O}_X(\mu - \lambda) = \mathcal{O}_X(d, h)$,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(\mu - \lambda)) = H^1(X_h, \mathcal{O}_X(d)) = 0$$

d'après la condition (4) de la définition 5.6.21, car $d \geq 0$. □

Définition 5.6.24. — Un fibré $\mathscr{E}$ sur X est pur s'il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ et $a \in \mathbb{N}$ tels que $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(\lambda)^{\oplus a}$. Pour un entier h, on définit de même un fibré pur sur X_h.

D'après la proposition 5.6.23, $\mathscr{E}$ est pur si et seulement si

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(\deg \mathscr{E}, \mathrm{rg}\mathscr{E}).$$

Proposition 5.6.25. — *Soit $\mathscr{E}$ un fibré sur X et h un entier. Alors, $\mathscr{E}$ est pur si et seulement si $\pi_h^*\mathscr{E}$ l'est.*

Démonstration. Il résulte de la proposition 5.6.23 que si $\mathscr{E}$ est pur alors $\pi_h^*\mathscr{E}$ l'est. Réciproquement, supposons $\pi_h^*\mathscr{E}$ pur. Quitte à agrandir h on peut supposer que $\pi_h^*\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a}$ pour un $d \in \mathbb{Z}$ et $a \in \mathbb{N}$. Alors,

$$\det(\pi_h^*\mathscr{E}) = \pi_h^* \det(\mathscr{E}) \simeq \mathcal{O}_{X_h}(ad)$$

et donc, en considérant le degré des fibrés en droites précédents, $h|ad$. D'après la proposition 5.6.23

$$\mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(ad, a) \simeq \pi_h^*\mathcal{O}_X\Big(\frac{ad}{h}, a\Big).$$

Il y a donc un isomorphisme

$$\pi_h^*\mathscr{E} \simeq \pi_h^*\mathcal{O}_X\Big(\frac{ad}{h}, a\Big).$$

La proposition 5.6.20 implique que les classes d'isomorphisme de fibrés $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}$-équivariants de fibré sous-jacent isomorphe à $\mathscr{F} = \pi_h^*\mathcal{O}_X\big(\frac{ad}{h}, a\big)$ sont en bijection avec

$$H^1(\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}, \mathrm{Aut}(\mathscr{F})).$$

Or, $\mathrm{Aut}(\mathscr{F}) \simeq \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X_h}(d)^{\oplus a}) \simeq \mathrm{GL}_a(F_h)$. On vérifie de plus que via cet isomorphisme l'action de $\mathbb{Z}/h\mathbb{Z} = \mathrm{Gal}(F_h|F)$ sur $\mathrm{Aut}(\mathscr{F})$ est l'action canonique sur $\mathrm{GL}_a(F_h)$. La proposition résulte donc du théorème de Hilbert 90,

$$H^1(\mathrm{Gal}(F_h|F), \mathrm{GL}_a(F_h)) = \{*\}.$$

□

5.6.4.2. Classification des fibrés. — La preuve du théorème suivant s'inspire fortement de [**43**].

Théorème 5.6.26. — *Soit $(X_h)_{h\geq 1}$, $X = X_1$, une sphère de Riemann généralisée. Supposons que pour tout h et tout $n \geq 1$, si*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}\big(-\tfrac{1}{n}\big) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \longrightarrow 0$$

est une suite exacte de fibrés alors $H^0(X_h, \mathscr{E}) \neq 0$. Les propriétés suivantes sont alors vérifiées.

1. *Les fibrés semi-stables sur X sont les fibrés purs.*
2. *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.*

3. L'application

$$\begin{array}{rcl} \big\{(\lambda_i)_{1\leq i\leq n} \in \mathbb{Q}^n \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\big\} & \longrightarrow & \big\{\textit{Fibrés sur } X\big\}/\sim \\ (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) & \longmapsto & \displaystyle\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_X(\lambda_i) \end{array}$$

est une bijection.

Démonstration. L'assertion (1) entraîne le reste du théorème. En effet, une fois montré que tous les fibrés semi-stables sont purs, l'assertion (2) résulte du point (5) de la proposition 5.6.23. Considérons donc l'assertion (1). Le fait que tout fibré pur soit semi-stable est le point (3) de la proposition 5.6.23.

Montrons maintenant par récurrence sur l'entier $n \geq 1$ que tout fibré semi-stable de rang inférieur ou égal à n est pur. Remarquons que l'hypothèse de récurrence au rang n implique d'après le raisonnement précédent (le point (1) du théorème entraîne les autres points) que tout fibré de rang inférieur ou égal à n est somme directe de fibrés purs.

Supposons donc l'hypothèse de récurrence vérifiée au rang n et soit $\mathscr{E}$ un fibré semi-stable de rang $n+1$. D'après la proposition 5.6.25, pour tout entier $h \geq 1$,

$$\mathscr{E} \text{ est pur } \iff \pi_h^*\mathscr{E} \text{ est pur.}$$

De plus d'après le lemme 5.6.19, pour tout entier $h \geq 1$,

$$\mathscr{E} \text{ est semi-stable } \iff \pi_h^*\mathscr{E} \text{ est semi-stable.}$$

On peut donc, quitte à remplacer $\mathscr{E}$ par $\pi_h^*\mathscr{E}$ et X par X_h avec h grand, supposer que $\mu(\mathscr{E}) \in \mathbb{Z}$. De plus, pour tout entier $k \in \mathbb{Z}$,

$$\mathscr{E} \text{ est semi-stable } \iff \mathscr{E}(k) \text{ est semi-stable}$$

et d'après le point (4) de la proposition 5.6.23,

$$\mathscr{E} \text{ est pur } \iff \mathscr{E}(k) \text{ est pur.}$$

On peut donc supposer que

$$\mu(\mathscr{E}) = 0.$$

Considérons maintenant le fibré $\pi_n^*\mathscr{E}$ sur X_n. Soit $\mathscr{L} \subset \pi_n^*\mathscr{E}$ un sous-fibré en droites de rang 1 de degré d maximal. On a donc $\mathscr{L} \simeq \mathcal{O}_{X_n}(d)$. Posons $\mathscr{E}' = \pi_n^*\mathscr{E}/\mathscr{L}$,

$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \pi_n^*\mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow 0. \tag{1}$$

Puisque $\pi_n^*\mathscr{E}$ est semi-stable de pente 0,

$$d \leq 0 \leq \mu(\mathscr{E}').$$

Distinguons maintenant plusieurs cas.

- Supposons $d = 0$. Alors, $\mathscr{L}$ est semi-stable de pente 0. Donc, $\mathscr{E}'$ est semi-stable de pente 0 (cf. point (3) du théorème 5.5.4). D'après l'hypothèse de récurrence, on a donc $\mathscr{E}' \simeq \mathcal{O}_{X_n}^n$. Puisque $\mathrm{Ext}^1(\mathcal{O}_{X_n}^n, \mathcal{O}_{X_n}) = 0$, cela entraîne que $\pi_n^*\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_{X_n}^{n+1}$ et donc que $\pi_n^*\mathscr{E}$ est pur. On déduit alors de la proposition 5.6.25 que $\mathscr{E}$ est pur.
- Supposons que $d \leq -2$. Puisque $\mu(\mathscr{E}') \geq 0$, la première pente du polygone de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}'$ est positive. L'hypothèse de récurrence entraîne donc qu'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\mathcal{O}_{X_n}(\lambda) \subset \mathscr{E}'$ comme sous-fibré. Puisque $\lambda \geq 0$, $H^0(X_n, \mathcal{O}_{X_n}(\lambda)) \neq 0$ et donc
$$\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X_n}(d+2), \mathcal{O}_{X_n}(\lambda)) \neq 0.$$
Il existe donc un morphisme non nul
$$u : \mathcal{O}_{X_n}(d+2) \longrightarrow \mathscr{E}'.$$
Tirant en arrière la suite exacte (1) précédente via u on obtient une suite exacte
$$0 \longrightarrow \mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E}'' \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}(d+2) \longrightarrow 0$$
et donc une suite exacte
$$0 \longrightarrow \mathscr{L}(-d-1) \longrightarrow \mathscr{E}''(-d-1) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_n}(1) \longrightarrow 0.$$
D'après l'hypothèse du théorème appliquée avec $n = 1$ (attention, il ne s'agit pas du même entier n intervenant dans cette démonstration),
$$H^0(X_n, \mathscr{E}''(-d-1)) \neq 0.$$
Il existe donc un morphisme non nul
$$\mathcal{O}_{X_n}(d+1) \longrightarrow \mathscr{E}''.$$
Le morphisme $\mathscr{E}'' \to \pi_n^*\mathscr{E}$ est un monomorphisme (i.e. c'est une inclusion en fibre générique, mais $\mathcal{O}_{X_n}(d+1)$ n'est pas forcément localement facteur direct dans $\mathscr{E}''$). On en déduit l'existence d'un morphisme non nul
$$v : \mathcal{O}_{X_n}(d+1) \longrightarrow \pi_n^*\mathscr{E}.$$
Alors, $\mathrm{Im}(v)$ est un sous-fibré en droites de $\pi_n^*\mathscr{E}$ vérifiant $\deg(\mathrm{Im}(v)) \geq d+1$ ce qui est en contradiction avec la maximalité de d. Le cas $d \leq -2$ est donc impossible.
- Supposons $d = -1$. Puisque le morphisme π_n est étale fini, $\pi_n^* = \pi_n^!$ et
$$\mathrm{Hom}(\mathscr{L}, \pi_n^*\mathscr{E}) \simeq \mathrm{Hom}(\pi_{n*}\mathscr{L}, \mathscr{E}).$$
Le morphisme non nul $\mathscr{L} \to \pi_n^*\mathscr{E}$ est donc associé par adjonction à un morphisme non nul
$$u : \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big) \simeq \pi_{n*}\mathscr{L} \longrightarrow \mathscr{E}.$$

Considérons le sous-fibré $\mathrm{Im}(u)$ de $\mathscr{E}$. Puisque $\mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big)$ est semi-stable de pente $-\frac{1}{n}$ et que le morphisme

$$u : \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big)/\ker(u) \longrightarrow \mathrm{Im}(u)$$

est un isomorphisme en fibre générique,

$$\mu\big(\mathrm{Im}(u)\big) \geq -\frac{1}{n}.$$

On a donc

$$-\frac{1}{n} \leq \mu\big(\mathrm{Im}(u)\big) \leq 0.$$

Le nombre $\mu(\mathrm{Im}(u))$ est de la forme $\frac{d}{\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u))}$ pour un $d \in \mathbb{Z}$. Mais puisque $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u)) \leq n$, l'inégalité précédente entraîne que

$$\mu\big(\mathrm{Im}(u)\big) = -\frac{1}{n} \quad \text{ou bien} \quad \mu\big(\mathrm{Im}(u)\big) = 0.$$

Distinguons ces deux cas.

— Si $\mu(\mathrm{Im}(u)) = 0$ alors $\mathrm{Im}(u)$ est semi-stable de pente 0. Le fibré $\mathscr{E}/\mathrm{Im}(u)$ l'est donc également. D'après l'hypothèse de récurrence, $\mathrm{Im}(u) \simeq \mathcal{O}_X^{\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u)}$ et $\mathscr{E}/\mathrm{Im}(u) \simeq \mathcal{O}_X^{n+1-\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u))}$. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$ on conclut que $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$.

— Si $\mu(\mathrm{Im}(u)) \neq 0$, nécessairement $\mathrm{rg}(\mathrm{Im}(u)) = n$. Le morphisme

$$u : \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big) \longrightarrow \mathrm{Im}(u)$$

est donc un isomorphisme en fibre générique. Étant donné que

$$\deg\big(\mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big)\big) = \deg(\mathrm{Im}(u))$$

c'est un isomorphisme. Il y a donc une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X\big(-\frac{1}{n}\big) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{L}' \longrightarrow 0$$

où $\mathscr{L}'$ est un fibré en droites de degré 1. Par hypothèse on a $H^0(X, \mathscr{E}) \neq 0$. Mais si $h : \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}$ est un morphisme non nul, $\mathrm{Im}(h)$ est un sous-fibré en droites de $\mathscr{E}$ de degré positif (car supérieur à celui de $\mathcal{O}_X$) et négatif (car $\mathscr{E}$ est semi-stable de pente 0) donc nul. Le morphisme h est donc un isomorphisme. Dès lors, $\mathscr{E}/\mathrm{Im}(h)$ est semi-stable de pente 0 donc isomorphe à $\mathcal{O}_X^n$ d'après l'hypothèse de récurrence. On conclut que $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X^{n+1}$ en utilisant une fois de plus que $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.

□

Remarque 5.6.27. — Dans le théorème précédent, l'hypothèse disant que si $0 \to \mathcal{O}_{X_h}(-\frac{1}{n}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \to 0$ est exacte alors $H^0(X, \mathscr{E}) \neq 0$ est indispensable si l'on veut que le théorème de classification des fibrés soit vérifié. En effet, si on

suppose les conclusions du théorème vérifiées, un tel $\mathscr{E}$ étant de degré 0, il possède nécessairement un facteur direct de la forme $\mathcal{O}_X(\lambda)$ avec $\lambda \geq 0$ et donc $H^0(X, \mathscr{E}) \neq 0$.

Corollaire 5.6.28. — *Pour tout $\lambda \in \mathbb{Q}$ la catégorie abélienne formée des fibrés semi-stables de pente λ sur X est semi-simple, d'unique objet simple à isomorphisme près $\mathcal{O}_X(\lambda)$. L'algèbre End$(\mathcal{O}_X(\lambda))$ est une algèbre à division. Le foncteur*

$$\mathscr{E} \longmapsto Hom(\mathcal{O}_X(\lambda), \mathscr{E})$$

induit une équivalence entre cette catégorie et la catégorie des End$(\mathcal{O}_X(\lambda))^{opp}$-espaces vectoriels de dimension finie.

On va maintenant donner un critère de vérification des hypothèses du théorème 5.6.26 *en termes de modifications de fibrés*. C'est ce critère que nous allons utiliser dans la suite. Par définition, une modification du fibré $\mathscr{E}$ sur X est un fibré $\mathscr{E}'$ muni d'un isomorphisme en fibre générique $\mathscr{E}'_\eta \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_\eta$ c'est à dire un isomorphisme

$$\mathscr{E}'_{|X \smallsetminus S} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{|X \smallsetminus S}$$

pour $S \subset |X|$ fini.

Supposons que les conclusions du théorème 5.6.26 sont vérifiées c'est à dire que tout fibré sur X est isomorphe à une somme directe de $\mathcal{O}_X(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Soit $n \geq 1$ et une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

où $\mathscr{F}$ est cohérent de torsion de degré 1. Si $\mathscr{E} \simeq \oplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)$, pour tout indice i, puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X(\lambda_i), \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})) \neq 0$,

$$\lambda_i \leq \frac{1}{n}.$$

Mais de plus, si $\lambda_i = \frac{d_i}{h_i}$ avec $(d_i, h_i) = 1$, puisque $\mathcal{O}_X(\lambda_i) \subset \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$,

$$h_i \leq n.$$

On déduit de cela que si pour un indice i, $\lambda_i > 0$ alors $\lambda_i = \frac{1}{n}$. Or, cela est impossible puisqu'alors le monomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules $\mathcal{O}_X(\lambda_i) \hookrightarrow \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$ serait un isomorphisme (les deux fibrés ont même rang et même degré) ce qui contredirait le fait que $\mathscr{F} \neq 0$. On déduit de cela que pour tout i, $\lambda_i \leq 0$. Mais puisque

$$\deg(\mathscr{E}) = 0$$

cela implique nécessairement que pour tout i, $\lambda_i = 0$ et donc

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X^n.$$

Dans « l'autre sens », soit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

avec $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel et $\mathscr{F}$ cohérent de torsion de degré 1. Si $\mathscr{E} \simeq \oplus_i \mathcal{O}_X(\lambda_i)$, pour tout i,

$$\lambda_i \geq 0.$$

En effet, s'il existait un indice i tel que $\lambda_i < 0$, puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_X^n, \mathcal{O}_X(\lambda_i)) = 0$ on aurait $\mathcal{O}_X^n \subset \oplus_{j \neq i} \mathcal{O}_X(\lambda_j)$ ce qui est impossible puisque $\mathcal{O}_X^n$ et $\mathscr{E}$ ont même rang. De la positivité des pentes λ_i et du fait que $\deg(\mathscr{E}) = 1$ on tire alors que nécessairement il existe un entier $m \in \{1, \cdots, n\}$ tel que

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{m}) \oplus \mathcal{O}_X^{n-m}.$$

On a la réciproque suivante.

Théorème 5.6.29. — *Soit (X, E_∞) une sphère de Riemann généralisée. Supposons que pour tout $h \geq 1$:*

1. *Si $n \geq 1$ et on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(\tfrac{1}{n}) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

avec $\mathscr{F}$ de torsion de degré 1 alors

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}^n.$$

2. *Si $n \geq 1$ et on a une suite exacte*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}^n \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

où $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel et $\mathscr{F}$ est de torsion de degré 1 alors pour un $m \in \{1, \cdots, n\}$ on a

$$\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_{X_h}(\tfrac{1}{m}) \oplus \mathcal{O}_{X_h}^{n-m}.$$

Alors les hypothèses et donc les conclusions du théorème de classification 5.6.26 sont vérifiées.

Avant d'attaquer la preuve de ce théorème introduisons la notion suivante.

Définition 5.6.30. — Un fibré $\mathscr{E}$ sur X est élémentaire s'il est non nul et possède une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0$$

où $n \in \mathbb{N}$ et pour tout i, $h_i \geq 1$.

La proposition suivante va nous permettre de démontrer le théorème 5.6.29.

Proposition 5.6.31. — *Supposons que les hypothèses du théorème 5.6.29 sont vérifiées. Soit $\mathscr{E}$ un fibré élémentaire sur X et*

$$u : \mathscr{E} \twoheadrightarrow \mathscr{F}$$

un épimorphisme avec $\mathscr{F}$ cohérent de torsion de degré 1.

1. *Si $\deg(\mathscr{E}) = 1$ alors $H^0(X, \ker u) \neq 0$.*

2. *Si* $\deg(\mathscr{E}) > 1$ *il existe un fibré élémentaire* $\mathscr{E}'$ *de degré* $\deg(\mathscr{E}) - 1$ *et un monomorphisme de* $\mathcal{O}_X$*-modules*

$$\mathscr{E}' \hookrightarrow \ker u.$$

Démonstration. — Si $\deg(\mathscr{E}) = 1$ on a alors une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0.$$

Puisque $\mathscr{E}$ est un fibré vectoriel non nul remarquons que nécessairement

$$n < h$$

(si ce n'était pas le cas alors le monomorphisme $\mathcal{O}_X^n \to \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$ serait surjectif au point générique de X et donc $\mathscr{E}$ serait de torsion c'est à dire nul). Considérons l'épimorphisme composé

$$v : \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h}) \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{u} \mathscr{F}.$$

D'après l'hypothèse (1) de 5.6.29

$$\ker v \simeq \mathcal{O}_X^h.$$

On a alors une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \ker v \longrightarrow \ker u \longrightarrow 0.$$

Soit E le corps de définition de X. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X^n) = 0$ on en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow E^n \longrightarrow E^h \longrightarrow H^0(X, \ker u) \longrightarrow 0$$

et donc, puisque $n < h$, $H^0(X, \ker u) \neq 0$.

Supposons maintenant que $\deg(\mathscr{E}) > 1$. Fixons une présentation

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^n \longrightarrow \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow 0.$$

Notons

$$v : \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathscr{E} \xrightarrow{u} \mathscr{F},$$

$v = \sum_{i \in I} v_i$ avec

$$v_i : \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathscr{F}.$$

Posons

$$I_0 = \{i \in I \mid v_i \neq 0\}$$

et notons $\{x\} = \operatorname{supp}(\mathscr{F})$, $\mathscr{F} \simeq i_{x*}k(x)$. Soit $W \subset k(x)^{I_0}$ le noyau de

$$\begin{array}{ccc} k(x)^{I_0} & \longrightarrow & k(x) \\ (x_i)_{i \in I_0} & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \in I_0} x_i. \end{array}$$

Soit $W = \bigoplus_{j\in J} D_j$ une décomposition en somme de droites. Considérons le morphisme

$$\alpha = \oplus_{i\in I_0} v_i : \bigoplus_{i\in I_0} \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{h_i}) \longrightarrow \mathscr{F}^{I_0}.$$

D'après l'hypothèse (1) de 5.6.29, $\ker\alpha$ est un fibré trivial. Il y a de plus une extension pour tout $j \in J$

$$0 \longrightarrow \ker\alpha \longrightarrow \alpha^{-1}\big(\mathscr{F}\otimes D_j\big) \xrightarrow{\alpha} \mathscr{F}\otimes D_j \longrightarrow 0.$$

L'hypothèse (2) de 5.6.29 nous dit alors qu'il existe des entiers $a_j \geq 1$ et $b_j \geq 0$ tels que

$$\alpha^{-1}\big(\mathscr{F}\otimes D_j\big) \simeq \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{a_j}\big) \oplus \mathcal{O}_X^{b_j}.$$

Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \ker\Big(\big(\ker\alpha\big)^J \xrightarrow{\sum_{j\in J}} \ker\alpha\Big) \longrightarrow \bigoplus_{j\in J} \alpha^{-1}\big(\mathscr{F}\otimes D_j\big) \longrightarrow \alpha^{-1}(\mathscr{F}\otimes W) \longrightarrow 0.$$

Puisque

$$\ker(v) = \bigoplus_{i\in I\setminus I_0} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h_i}\big) \oplus \alpha^{-1}(\mathscr{F}\otimes W)$$

on en déduit l'existence d'un épimorphisme

$$\bigoplus_{i\in I\setminus I_0} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h_i}\big) \oplus \bigoplus_{j\in J} \big(\mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{a_j}\big) \oplus \mathcal{O}_X^{b_j}\big) \longrightarrow \ker v$$

de noyau un fibré trivial.

Il existe donc une suite exacte de la forme

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^r \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I'} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h'_i}\big)\Big) \oplus \mathcal{O}_X^s \longrightarrow \ker v \longrightarrow 0.$$

On a $\mathcal{O}_X^n \subset \ker v$ et son image réciproque dans le terme du milieu de la suite exacte précédente est une extension de $\mathcal{O}_X^n$ par $\mathcal{O}_X^r$ qui est donc un fibré trivial (puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$). Au final on dispose d'une résolution

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X^{n+r} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I'} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h'_i}\big)\Big) \oplus \mathcal{O}_X^s \longrightarrow \ker u \longrightarrow 0.$$

Le noyau $\mathscr{H}$ du morphisme composé

$$\mathcal{O}_X^{n+r} \longrightarrow \Big(\bigoplus_{i\in I'} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h'_i}\big)\Big) \oplus \mathcal{O}_X^s \xrightarrow{\text{proj}} \mathcal{O}_X^s$$

est un fibré trivial. Alors,

$$\bigoplus_{i\in I'} \mathcal{O}_X\big(\tfrac{1}{h'_i}\big)/\mathscr{H}$$

est un fibré élémentaire de degré $\deg(\mathscr{E}) - 1$ muni d'un monomorphisme de $\mathcal{O}_X$-modules vers $\ker(u)$. $\square$

Démonstration du théo. 5.6.29. — Soit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(-\tfrac{1}{n}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1) \longrightarrow 0.$$

Choisissons un plongement

$$\mathcal{O}_{X_h}(-\tfrac{1}{n}) \hookrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1)^n$$

de conoyau un faisceau cohérent de torsion noté $\mathscr{F}$. Le poussé en avant de la suite exacte par ce plongement définit une extension de $\mathcal{O}_{X_h}(1)$ par $\mathcal{O}_{X_h}(1)^n$ qui est scindée. On en déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_h}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

Choisissons maintenant un drapeau complet $(\mathrm{Fil}_i\mathscr{F})_{0\leq i\leq n+1}$, $\mathrm{Fil}_0\mathscr{F} = 0$ et $\mathrm{Fil}_{n+1}\mathscr{F} = \mathscr{F}$, de $\mathscr{F}$ dont les gradués sont des faisceaux de torsion de degré 1. On applique la proposition 5.6.31 avec « $X = X_h$ ». Le fibré $\mathcal{O}_{X_h}(1)^{n+1}$ est élémentaire. On en déduit que le noyau du morphisme composé

$$\mathcal{O}_{X_h}(1)^{n+1} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow \mathscr{F}/\mathrm{Fil}_n\mathscr{F}$$

possède un sous-fibré élémentaire $\mathscr{E}'$ de degré n. On peut alors regarder le noyau du morphisme

$$\mathscr{E}' \longrightarrow \mathrm{Fil}_n\mathscr{F}/\mathrm{Fil}_{n-1}\mathscr{F}$$

et lui réappliquer 5.6.31. En procédant ainsi par récurrence on vérifie que $\mathscr{E}$ s'exprime comme noyau d'un fibré elementaire de degré 1 vers un faisceau cohérent de torsion de degré 1 ce qui permet de conclure grâce au point (1) de 5.6.31. □

CHAPITRE 6

LA COURBE FONDAMENTALE LORSQUE F EST ALGÉBRIQUEMENT CLOS

Introduction

Dans ce chapitre on construit et démontre les propriétés de base de la courbe qui nous intéresse lorsque le corps F est algébriquement clos. Celle-ci est définie comme étant le « Proj » de l'algèbre graduée $P = \bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi=\pi^d}$. Le fait que ce schéma soit une courbe complète au sens du chapitre 5 résulte des deux résultats suivants :

— L'algèbre P est graduée-factorielle (théo. 6.2.1).

— L'existence de la suite exacte fondamentale en théorie de Hodge p-adique dont nous donnons une nouvelle démonstration (théo. 6.4.1) d'une version généralisée.

Ces deux résultats exploitent de façon fondamentale ceux du chapitre 2 concernant les diviseurs associés à une « fonction holomorphe de la variable π ».

Enfin, on donne des descriptions alternatives de la courbe dans les sections 6.6 et 6.7 qui ne font pas intervenir l'uniformisante π intervenant dans la définition de P.

6.1. L'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$: définition et généralités

6.1.1. Définition. — On reprend les notations de la section 1.1.

Définition 6.1.1. — On note

$$P = \bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi=\pi^d},$$

une E-algèbre graduée dont on note $P_d = B^{\varphi=\pi^d}$ les éléments homogènes de degré d. Lorsqu'on voudra spécifier la dépendance de P en E, F et π on la note $P_{F,E,\pi}$.

D'après la proposition 4.1.3

$$P = \bigoplus_{d\geq 0} (B^+)^{\varphi=\pi^d}.$$

L'application canonique $P \to B^+$ est injective et identifie P à une sous-E-algèbre de B^+. D'après la proposition 4.1.1 les éléments homogènes de degré 0 sont

$$P_0 = E.$$

6.1.2. Changement d'uniformisante. — Supposons que F contienne une clôture algébrique $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathbb{F}_q$ i.e. $\overline{\mathbb{F}_q}^F$ est algébriquement clos. Soit π' une autre uniformisante de E. Notons

$$L_{\pi,\pi'} = \{u \in W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}} \mid \varphi(u)\pi = u\pi'\},$$

un E-espace vectoriel de dimension 1. Il y a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$u_{\pi,\pi'} : \bigoplus_{d\geq 0} P_{\pi,d} \otimes_E L_{\pi,\pi'}^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} P_{\pi'}$$

donné par la recette de la section 4.1.4. De plus, si π'' est une troisième uniformisante, via l'isomorphisme canonique

$$L_{\pi,\pi'} \otimes_E L_{\pi',\pi''} \xrightarrow{\sim} L_{\pi,\pi''}$$

on a

$$u_{\pi,\pi''} = u_{\pi',\pi''} \circ u_{\pi,\pi'}.$$

6.1.3. Changement de corps E. — Supposons que F contienne une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$. Soit $E_h|E$ l'extension non-ramifiée de degré h de E, $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)^{\varphi^h = Id}$. On a alors

$$P_{E_h,\pi} = \bigoplus_{d\geq 0} (B_E^+)^{\varphi_E^h = \pi^d}.$$

D'après la proposition 4.1.7 on a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées

$$P_{E,\pi,\bullet} \otimes_E E_h \xrightarrow{\sim} P_{E_h,\pi,h\bullet}.$$

Soit maintenant $E'|E$ une extension totalement ramifiée et $\pi_{E'}$, π_E, des uniformisantes. Soit

$$L_{\pi_{E'},\pi_E} = \{x \in W_{\mathcal{O}_E}(k)_{\mathbb{Q}} \mid \varphi(u)\pi_E = u\pi_{E'}^{[E':E]}\},$$

un E-espace vectoriel de dimension 1. Il y a alors un isomorphisme canonique

$$\bigoplus_{d\geq 0} P_{E,\pi_E,d} \otimes_E L_{\pi_E,\pi_{E'}}^{\otimes d} \xrightarrow{\sim} P_{E',\pi_{E'},[E':E]\bullet}.$$

6.2. L'algèbre P est graduée factorielle

6.2.1. Énoncé du théorème. — Rappelons qu'un monoïde abélien est libre s'il est isomorphe à $\left(\mathbb{N}^{(I)}, +\right)$ pour un ensemble I. Contrairement au cas des groupes abéliens libres, tout monoïde abélien libre possède une base canonique formée de ses éléments irréductibles. Plus précisément, si M est un monoïde abélien, un élément m de M non nul est irréductible s'il ne peut s'écrire sous la forme $m = m' + m''$ avec $m', m'' \neq 0$. Si M est abélien libre d'éléments irréductibles I alors il y a un isomorphisme canonique $\mathbb{N}^{(I)} \xrightarrow{\sim} M$. Rappelons enfin que si M est un monoïde abélien et $U \subset M^\times$ un sous-groupe des éléments inversibles de M, on peut définir le monoïde quotient M/U.

Par définition, un anneau intègre A est factoriel si le monoïde abélien quotient

$$A \smallsetminus \{0\}/A^\times$$

est libre. Le but de cette section est de démontrer le résultat suivant.

Théorème 6.2.1. — *Supposons F algébriquement clos. Alors, l'algèbre P est graduée-factorielle d'éléments irréductibles de degré* 1 *au sens où le monoïde*

$$\bigcup_{d \geq 0} P_d \smallsetminus \{0\}/E^\times$$

est libre sur $P_1 \smallsetminus \{0\}/E^\times$. En particulier si $x \in B^{\varphi = \pi^d}$ avec $d \geq 1$, il existe $t_1, \ldots, t_d \in B^{\varphi = \pi}$ tels que

$$x = t_1 \cdots t_d.$$

Le reste de cette section est consacré à la démonstration de ce théorème.

6.2.2. Diviseurs sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$. — Nous allons maintenant formuler un énoncé qui va impliquer le théorème 6.2.1. Reprenons les notations de la section 2.7.2.

Définition 6.2.2. — On note $\mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ les diviseurs $D \in \mathrm{Div}^+(Y)$ vérifiant $\varphi^* D = D$.

Si $D \in \mathrm{Div}^+(Y)$ est un diviseur de support fini on vérifie que la somme infinie

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*} D \in \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

est bien définie. Cela résulte de la formule $\|.\| \circ \varphi = \|.\|^q$ où $\|.\| : |Y| \to]0, 1[$ « est la distance à l'origine dans le disque épointé » (cf. sect.2.7.2). Cela définit un morphisme de monoïdes

$$\mathrm{Div}^+(Y)_{\mathrm{finis}} \xrightarrow{\sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^{n*}} \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

dont on vérifie facilement qu'il est surjectif. En fait on a le lemme suivant dont la vérification est immédiate.

Lemme 6.2.3. — *Via l'injection*

$$\begin{array}{rcl} |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} & \hookrightarrow & \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) \\ y \ mod\ \varphi^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\varphi^n(y)\right], \end{array}$$

$\mathrm{Div}^+(Y/\mathbb{Z})$ *est le monoïde abélien libre sur* $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$.

De cela on déduit l'existence d'une fonction degré sur les diviseurs φ-invariants.

Définition 6.2.4. — Pour $D \in \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$,

$$D = \sum_{i\in I}\sum_{n\in\mathbb{Z}} \left[\varphi^n(y_i)\right],\ y_i \in |Y|$$

on note

$$\deg(D) = \sum_{i\in I} \deg(y_i).$$

On vérifie ausitôt le lemme suivant qui exprime le degré d'un diviseur φ-invariant comme le degré d'un diviseur fini après restriction à un domaine fondamental pour l'action de φ.

Lemme 6.2.5. — *Soit* $\rho \in]0,1[$ *et* $|Y_{]\rho^q,\rho]}| \subset |Y|$, *un domaine fondamental pour l'action de* φ *sur* $|Y|$. *Alors, pour tout diviseur* $D \in \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$,

$$\deg(D) = \deg\left(D_{\big|Y_{]\rho^q,\rho]}}\right).$$

Remarquons maintenant que si $x \in P_d$ est non-nul alors l'équation fonctionnelle $\varphi(x) = \pi^d x$ induit au niveau des diviseurs

$$\varphi^*\mathrm{div}(x) = \mathrm{div}(\varphi(x)) = \mathrm{div}(\pi^d x) = \mathrm{div}(\pi^d) + \mathrm{div}(x) = \mathrm{div}(x)$$

puisque π est un unité. L'application diviseur

$$\mathrm{div} : B \smallsetminus \{0\} \longrightarrow \mathrm{Div}^+(Y)$$

induit donc un morphisme de monoïdes

$$\mathrm{div} : \bigcup_{d\geq 0} P_d \smallsetminus \{0\}/E^\times \longrightarrow \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}).$$

Les deux monoïdes précédents sont munis d'une fonction degré, le degré d'un élément de $P_d \smallsetminus \{0\}$ étant d.

Proposition 6.2.6. — *Le morphisme de monoïdes précédents est compatible aux degrés.*

Démonstration. — Soit $x \in P_d$ non nul. Le polygone de Newton de $\varphi(x)$ est obtenu à partir de celui de x en appliquant la transformation du plan $(u,v) \mapsto (u,qv)$. Celui de $\pi^d x$ est obtenu en appliquant $(u,v) \mapsto (u+d,v)$. On en déduit que si $(\lambda_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ sont les pentes de $\mathcal{N}ewt(x)$ où λ_i est la pente sur $[i,i+1]$ alors pour $i,k \in \mathbb{Z}$

$$\lambda_{i+kd} = q^{-k}\lambda_i.$$

Si $\rho \in]0,1[$, $\rho = q^{-r}$, d'après le théorème 3.4.4, si

$$D = \mathrm{div}(f)_{\big|Y_{]\rho^q,\rho]}} \in \mathrm{Div}^+(Y_{]\rho^q,\rho]})$$

on a

$$\deg(D) = \big|\{i \in \mathbb{Z} \mid \lambda_i \in [r, qr[\ \}\big|.$$

On conclut facilement en appliquant le lemme 6.2.5. □

Le théorème suivant implique alors le théorème 6.2.1.

Théorème 6.2.7. — *Le morphisme de monoïdes*

$$\mathrm{div} : \bigcup_{d\geq 0} P_d \smallsetminus \{0\}/E^\times \longrightarrow \mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$$

est injectif. Si F est algébriquement clos c'est un isomorphisme.

Preuve de l'injectivité. — Soient $x \in P_d$ et $y \in P_{d'}$ non nuls satisfaisant

$$\mathrm{div}(x) = \mathrm{div}(y).$$

D'après le point (2) du théorème 3.5.5 il existe $u \in B^\times = (B^b)^\times$ (coro. 1.9.5) tel que

$$x = uy.$$

Mais alors

$$u \in (B^b)^{\varphi=\pi^{d-d'}} = \begin{cases} 0 \text{ si } d \neq d' \\ E \text{ si } d = d'. \end{cases}$$

On conclut aussitôt. □

Le reste de cette section est consacré à la preuve de la surjectivité dans le théorème précédent lorsque F est algébriquement clos.

6.2.3. Surjectivité de l'application diviseur : produits de Weierstraß. — Notons pour un entier positif d

$$\mathbb{M}_d = \big\{x \in \mathbf{A} \setminus \pi\mathbf{A} \mid x \equiv \pi^d \bmod W_{\mathcal{O}}(\mathfrak{m}_F)\big\} \subset \mathit{Prim}_d.$$

Modulo l'action de $\mathbf{A}^\times$, tout élément primitif de degré d peut être représenté par un élément de $\mathbb{M}_d$:

$$\mathbb{M}_d/\mathbb{M}_0 = \mathit{Prim}_d/\mathbf{A}^\times.$$

Par exemple, soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q(X) \equiv X^q \bmod \pi$ et $Q(X) \equiv \pi X \bmod X^2$. Soit $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ alors

$$u_\epsilon = \frac{\left[\epsilon\right]_Q}{\left[\epsilon^{1/q}\right]_Q} \in \mathbb{M}_1$$

(cf. déf. 2.3.6).

Soit $b \in \mathbb{M}_d$. On cherche $f \in P_d$ non nul tel que

$$\mathrm{div}(f) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^{n*}\mathrm{div}(b).$$

Le principe consiste à couper le diviseur en deux

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \varphi^{n*}\mathrm{div}(b) = \sum_{n\geq 0} \varphi^{n*}\mathrm{div}(b) + \sum_{n<0} \varphi^{n*}\mathrm{div}(b).$$

Pour $b \in \mathbb{M}_d$ on a

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d} = 1$$

dans B^+. Le produit infini

$$\Pi^+(b) = \prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d}$$

est donc convergeant dans B^+ de diviseur

$$\mathrm{div}(\Pi^+(b)) = \sum_{n\geq 0} \varphi^{n*}\mathrm{div}(b).$$

Exemple 6.2.8. — Si $b = \pi - [z]$ alors

$$\Pi^+(b) = \prod_{n\geq 0} \Big(1 - \frac{\left[z^{q^n}\right]}{\pi}\Big).$$

On aimerait maintenant associer à un tel b un élément « $\prod_{n\geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d} . \prod_{n<0} \varphi^n(b)$ » dans P_d. Malheureusement le produit « $\prod_{n<0} \varphi^n(b)$ » n'est pas convergent et on ne sait pas définir en toute généralité des éléments dans B^+ de diviseur fixé à l'avance (cf. 2.7.5), c'est à dire ici un élément de B^+ de diviseur $\sum_{n<0} \mathrm{div}(\varphi^n(b))$. On va voir que l'on peut tout de même le définir de façon détournée en remarquant qu'il doit satisfaire une équation fonctionnelle. Remarquons de plus que l'on connait à l'avance le polygone de Newton d'un tel élément. Un calcul montre que ce polygone doit être dans le quadrant $\mathbb{R}_+^2$ et que donc l'élément doit appartenir à $\mathbf{A}$.

Remarque 6.2.9. — Notons $x = b \bmod \pi \in \mathcal{O}_F$. Bien que le produit $\prod_{n<0} \varphi^n(b)$ ne soit pas convergent, on peut donner un sens à sa réduction modulo π de la façon suivante : on a

$$\ll \prod_{n<0} x^{q^n} = x^{\sum_{n<0} q^n} = x^{\frac{1}{q-1}} \gg .$$

Bien sûr, aucune de ces expressions n'a de sens. Ceci dit, $x^{\frac{1}{q-1}}$ a bien un sens à multiplication par un élément de $\mathbb{F}_q^\times$-près. Si l'on essaie de construire ainsi $\prod_{n<0} \varphi^n(x)$ par approximations successives, après avoir construit sa réduction modulo π on est amené à construire $\prod_{n<0} \varphi^n(x)$ modulo $1 + \pi^{k+1}\mathbf{A}$, $k \geq 1$, lorsque $x \in 1 + \pi^k \mathbf{A}$. Via

$$1 + \pi^k \mathbf{A}/1 + \pi^{k+1}\mathbf{A} \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_F,$$

si x correspond à $a \in \mathcal{O}_F$ alors $\ll \prod_{n<0} \varphi^n(x) \gg$ correspond à

$$\sum_{n<0} a^{q^n}$$

qui n'a pas de sens mais dont on vérifie qu'il est formellement solution de l'équation d'Artin-Schreier $X^q = X + a$, ce qui donne une définition à translation près par un élément de $\mathbb{F}_q$. C'est grâce à ce type de « miracle » que l'on peut définir $\prod_{n<0} \varphi^n(b)$ à un $E^\times$-multiple près grâce à la proposition qui suit.

Proposition 6.2.10. — *Supposons F algébriquement clos. Pour tout $b \in B^b$ vérifiant $v_\pi(b) = 0$, le E-espace vectoriel*

$$\{x \in B_F^b \mid \varphi(x) = bx\}$$

est de dimension 1.

Démonstration. Si b_1, b_2 sont dans cet espace vectoriel et non-nuls, $b_1/b_2 \in \mathscr{E}$ vérifie $\varphi(b_1/b_2) = b_1/b_2$. Puisque $\mathscr{E}^{\varphi = Id} = E$ on en déduit que la dimension de l'espace vectoriel en question est inférieure ou égale à 1. Il faut maintenant montrer qu'il est non nul. Puisque F est algébriquement clos, tout élément de $F^\times$ s'écrit sous la forme x^{q-1}, $x \in F^\times$. Quitte à multiplier b par un Teichmüller on peut donc supposer que $b \in \mathbf{A} \setminus \pi\mathbf{A}$. Définissons par récurrence sur n une suite $(x_n)_{n\geq 1}$ d'éléments de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ telle que $x_{n+1} \equiv x_n \bmod \pi^n$, $x_1 \notin \pi\mathbf{A}$ et

$$\varphi(x_n) \equiv bx_n \bmod \pi^n.$$

Soit $b_0 \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ le terme constant de b, $b \equiv b_0 \bmod \pi$. On pose $x_1 = [a]$ où a est une solution de l'équation $X^{q-1} = b_0$. Supposons défini x_n. Soit $z \in \mathcal{O}_F$ tel que $\varphi(x_n) \equiv bx_n + \pi^n[z] \bmod \pi^{n+1}$. On cherche x_{n+1} sous la forme $x_n + \pi^n[u]$. On voit facilement qu'il suffit de prendre pour u une solution de l'équation d'Artin-Schreier $U^q - b_0 U - z = 0$. □

Définition 6.2.11. — Supposons F algébriquement clos. Pour $b \in \mathbb{M}_d$, on note

$$\Pi^+(b) = \prod_{n \geq 0} \frac{\varphi^n(b)}{\pi^d}$$

et $\Pi^-(b)$ n'importe quel élément non nul de $\mathbf{A}$ vérifiant $\varphi(\Pi^-(b)) = b\Pi^-(b)$. On pose alors $\Pi(b) = \Pi^+(b)\Pi^-(b)$.

Les éléments $\Pi^-(b)$ et $\Pi(b)$ ne sont donc définis qu'à multiplication par un élément de $E^\times$ près. Soit

$$\mathbb{M} = \bigcup_{d \geq 0} \mathbb{M}_d,$$

un monoïde pour la loi de multiplication. On vérifie immédiatement que pour $b_1, b_2 \in \mathbb{M}$,

$$\Pi(b_1 b_2) = \Pi(b_1)\Pi(b_2)$$

à un élément de $E^\times$ près. De plus pour $b \in \mathbb{M}_0$, on a $\Pi(b) \in E^\times$ et $\mathbb{M}_0$ est un sous-groupe de $\mathbf{A}^\times$,

$$\mathbb{M}_0 = \ker\big(W_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}_F)^\times \to W_{\mathcal{O}}(k_F)^\times\big).$$

L'application Π définit donc un morphisme de monoïdes

$$\Pi : \mathbb{M}/\mathbb{M}_0 \longrightarrow (P \setminus \{0\})/E^\times.$$

Lemme 6.2.12. — *Dans* $\mathrm{Div}^+(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ *on a*

$$\mathrm{div}(\Pi(b)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(\mathrm{div}(b)).$$

Démonstration. — Pour un diviseur $D = \sum_y m(y)[y]$ on note $\varphi(D) = \sum_y m(y)[\varphi(y)]$ (afin de ne pas de tromper sur ce qu'on noterait φ^* ou φ_*). Il suffit de montrer que

$$\mathrm{div}(\Pi^-(b)) = \sum_{n<0} \varphi^n(\mathrm{div}(b)).$$

Notons $D' = \mathrm{div}(b)$ qui est à support fini et $D = \mathrm{div}(\Pi^-(b))$. On a

$$D' + D = \varphi(D),$$

équation de laquelle on tire par récurrence que pour tout $n > 0$,

$$D = \varphi^{-1}(D') + \varphi^{-2}(D') + \cdots + \varphi^{-n}(D') + \varphi^{-n}(D).$$

Remarquons maintenant que puisque $\Pi^-(b) \in \mathbf{A}$, le support de D est contenu dans $|Y_{[\rho,1[}|$ pour un $\rho \in]0,1[$. Puisque $\|\varphi^{-1}(y)\| = \|y\|^{1/q}$ on en déduit que

$$\mathrm{supp}\big(\varphi^{-n}(D)\big) \subset |Y_{[\rho^{1/q^n},1[}|.$$

Il s'en suit que pour tout intervalle compact $I \subset]0,1[$, il existe $n \gg 0$ tel que

$$\begin{aligned} \varphi^{-n}(D)_{|Y_I} &= 0 \\ \varphi^{-n}(D')_{|Y_I} &= 0. \end{aligned}$$

Les deux diviseurs D et $\sum_{n<0} \varphi^n(D')$ ayant même restriction à « toute couronne compacte » on conclut. □

Cela montre la surjectivité du morphisme diviseur dans le théorème 6.2.7 et conclut donc la preuve du théorème 6.2.1.

Remarque 6.2.13. — Le fait que $\Pi(b)$ ne soit défini qu'à un $E^\times$-multiple près n'est pas anodin. En effet, si F n'est pas algébriquement clos, on peut définir $\Pi(b) \in P_{\widehat{\overline{F}}} \setminus \{0\}$. L'obstruction à descendre $\Pi(b)$ en un élément de P_F est alors donnée par un élément de $H^1(G_F, E^\times)$ dont on verra dans le chapitre 7 qu'il s'agit exactement du groupe $\mathrm{Pic}^0(X_F)$.

6.3. Produits de Weierstraß associés aux éléments de degré 1 et logarithme

On va maintenant relier les produits de Weierstrass précédents au logarithme d'un groupe de Lubin-Tate.

Soit $Q \in \mathcal{O}_E[X]$ tel que $Q \equiv X^q \bmod \pi$ et $Q \equiv \pi X \bmod X^2$. Soit $\mathcal{LT}_Q$ la loi de groupe formelle de Lubin-Tate telle que $[\pi]_{\mathcal{LT}_Q} = Q$. La proposition suivante est bien connue.

Proposition 6.3.1. — *Dans l'espace de Fréchet des fonctions rigides analytiques sur la boule ouverte de dimension* 1 *sur* E*, la suite*

$$\frac{[\pi^n]_{\mathcal{LT}_Q}}{\pi^n}$$

converge vers le logarithme de $\mathcal{LT}_Q$*.*

Démonstration. Rappelons que l'on note $Q_n = [\pi^n]_{\mathcal{LT}}$. Montrons d'abord que la suite de l'énoncé est convergente. Soit $r > 0$. Pour $f = \sum_{k\geq 0} a_k X^k$ notons $w_r(f) = \inf_{k\geq 0}\{v(a_k) + kr\}$. Il s'agit de montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} w_r(\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n) = +\infty.$$

Constatons que

$$\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n = \pi^{-(n+1)}.(Q(X) - \pi X) \circ Q_n.$$

Puisque $Q(X) - \pi X \in X^2\mathcal{O}_E[X]$, on a donc

$$w_r(\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n) \geq -(n+1) + 2w_r(Q_n).$$

Choisissons m un entier positif tel que $r > \frac{1}{q^m - q^{m-1}}$. Notons pour tout entier k, $\mathcal{LT}_Q[\pi^k]$ les points de π^k-torsion de la loi de groupe formel de Lubin-Tate $\mathcal{LT}_Q$ dans

une clôture algébrique fixée de E. Pour $n > m$ on a alors

$$\begin{aligned} w_r(Q_n) &\geq w_r(Q_n/Q_m) \\ &= \sum_{\zeta \in \mathcal{LT}_Q[\pi^n] \setminus \mathcal{LT}_Q[\pi^m]} w_r(X-\zeta) \\ &= \sum_{k=m}^{n-1} \sum_{\zeta \in \mathcal{LT}_Q[\pi^{k+1}] \setminus \mathcal{LT}_Q[\pi^k]} w_r(X-\zeta). \end{aligned}$$

Mais si $\zeta \in \mathcal{LT}_Q[\pi^{k+1}] \setminus \mathcal{LT}_Q[\pi^k]$, on a $v(\zeta) = \frac{1}{q^{k+1}-q^k}$ et donc si $k \geq m$

$$w_r(X-\zeta) = v(\zeta) = \frac{1}{q^{k+1}-q^k}.$$

On obtient alors que

$$w_r(Q_n) \geq n - m$$

ce qui implique que

$$w_r(\pi^{-(n+1)}Q_{n+1} - \pi^{-n}Q_n) \geq n - 1 - 2m \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

On a donc prouvé la convergence de la suite $(\pi^{-n}Q_n)_{n\geq 1}$. Notons f sa limite, une fonction rigide analytique sur le disque ouvert de rayon 1. Les zéros de f sont exactement les points de torsion de la loi de groupe formel $\mathcal{LT}_Q$ et coïncident donc avec ceux de son logarithme $\log_{\mathcal{LT}_Q}$. La fonction méromorphe $g = f/\log_{\mathcal{LT}_Q}$ est donc holomorphe sur le disque ouvert de rayon 1 et sans zéros. De plus, pour tout entier positif n

$$g \circ [\pi^n]_{\mathcal{LT}_Q} = g.$$

Or, pour un point $x \in \mathring{\mathbb{B}}(\overline{E})$, la boule ouverte de rayon 1,

$$\lim_{n\to+\infty} [\pi^n]_{\mathcal{LT}_Q}(x) = 0.$$

La fonction g est donc constante. Puisque $f'(0) = 1$ on conclut que $f = \log_{\mathcal{LT}_Q}$. $\square$

Remarque 6.3.2. — Supposons le polynôme Q unitaire. On aimerait développer le logarithme en produit de Weierstrass sous la forme

$$X \prod_{\zeta \in \mathcal{LT}_Q[\pi^\infty]} (1 - \frac{X}{\zeta}).$$

Malheureusement ce produit n'est pas convergent puisque dans l'expression précédente $|\zeta| \to 1$. La proposition précédente nous dit que quitte à regrouper les termes on peut former un tel produit convergent et obtenir un développement comme dans [**49**]

$$\log_{\mathcal{LT}_Q} = X \prod_{n\geq 0} \Big(\prod_{\zeta \in \mathcal{LT}_Q[\pi^{n+1}] \setminus \mathcal{LT}_Q[\pi^n]} (1 - \frac{X}{\zeta}) \Big).$$

Soit $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$ et $u_\epsilon = \frac{[\epsilon]_Q}{[\epsilon^{1/q}]_Q} \in \mathbb{M}_1$ (déf. 2.3.6). De la proposition précédente on conclut que

$$\Pi^+(u_\epsilon) = \log_{\mathcal{LT}_Q}([\epsilon]_Q).\frac{1}{\pi[\epsilon^{1/q}]_Q}.$$

Or on a

$$\Pi^-(u_\epsilon) = [\epsilon^{1/q}]_Q.$$

On en déduit donc que

$$\Pi(u_\epsilon) = \log_{\mathcal{LT}_Q}([\epsilon]_Q).$$

Il s'en suit que l'on dispose d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \arrow[r, two heads] \arrow[d, "\simeq"', "\mathscr{L}"] & (\mathfrak{m}_F \setminus \{0\})/\mathcal{O}_E^\times \arrow[r, "\sim"] & |Y| \arrow[r, two heads] & |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \arrow[r, "\sim"] & P_1 \setminus \{0\}/E^\times \\
(B^+)^{\varphi=\pi} \setminus \{0\} \arrow[urrrr, two heads] & & & &
\end{tikzcd}$$

où le morphisme horizontal $\mathfrak{m}_F \setminus \{0\} \to |Y|$ est donné par $\epsilon \mapsto (u_\epsilon)$, l'application $|Y| \to P_1 \setminus \{0\}/E^\times$ par l'application qui à l'idéal (a) avec $a \in \mathbb{M}_1$ associe $\Pi(a)E^\times$ et le morphisme vertical $\mathscr{L}$ est celui de la proposition 4.2.1.

6.4. La suite exacte fondamentale

Théorème 6.4.1. — *Supposons F algébriquement clos. Soient $y_1, \ldots, y_d \in |Y|$ de générateurs $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{M}_1$ tels que $y_i \in \varphi^{\mathbb{Z}}(y_j) \Rightarrow y_i = y_j$. Soit pour $1 \leq i \leq d$, $t_i = \Pi(a_i) \in B^{\varphi=\pi}$. Il y a alors une suite exacte d'espaces de Banach*

$$0 \longrightarrow E.\prod_{i=1}^d t_i \longrightarrow B^{\varphi=\pi^d} \longrightarrow B/\mathfrak{m}_{y_1} \ldots \mathfrak{m}_{y_d} B \to 0.$$

Démonstration. Soit $x \in B^{\varphi=\pi^d}$ non nul et d'image nulle dans $B/\mathfrak{m}_{y_1} \ldots \mathfrak{m}_{y_d} B$. On a donc

$$\operatorname{div}(x) \geq \sum_{i=1}^d [y_i].$$

Puisque $\operatorname{div}(x)$ est φ-invariant cela implique que

$$\operatorname{div}(x) \geq \sum_{i=1}^d \sum_{n \in \mathbb{Z}} \left[\varphi^n(y_i)\right] = \operatorname{div}\Big(\prod_{i=1}^d t_i\Big).$$

Puisque $x, \prod_{i=1}^d t_i \in P_d$, par application de l'injectivité dans le théorème 6.2.7 ils diffèrent d'un élément de $E^\times$. On a donc vérifié l'exactitude de la suite au milieu.

Pour tout i, le morphisme $B^{\varphi=\pi} \to B/\mathfrak{m}_{y_i} = C_{y_i}$ s'identifie à l'application logarithme d'un groupe de Lubin-Tate de hauteur h sur le corps C_{y_i} et est surjective (cf.

section 4.5). On montre alors facilement par récurrence sur d que le morphisme de gauche est surjectif. □

Exemple 6.4.2. — Si $E = \mathbb{Q}_p$, $\epsilon \in \mathfrak{m}_F \setminus \{0\}$, $Q(X) = (1+X)^p - 1$, $u_\epsilon = \frac{[1+\epsilon]-1}{[1+\epsilon^{1/p}]-1}$, $y = (u_\epsilon)$, $t_y = \log([1+\epsilon])$, il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathbb{Q}_p.t_y^d \longrightarrow \left(B^+\right)^{\varphi=p^d} \longrightarrow B^+_{dR,y}/\mathrm{Fil}^d B^+_{dR,y} \longrightarrow 0.$$

On retrouve donc la suite exacte fondamentale de [**25**].

Corollaire 6.4.3. — *Soit $t \in P_1$, $t \neq 0$ et $y \in |Y|$ tel que* $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\varphi^n(y)]$. *Il y a alors un isomorphisme canonique d'algèbres graduées*

$$P/tP \xrightarrow{\sim} \{f \in C_y[T] \mid f(0) \in E\}.$$

Démonstration. Soit $\theta_y : B^+ \to C_y$. Le morphisme d'algèbres graduées $P \to C_y[T]$ donné en degré d par $x \mapsto \theta_y(x)T^d$ induit un morphisme $P/tP \to C_y[T]$. Utilisant le théorème 6.4.1 on vérifie que c'est une injection d'image les polynômes à terme constant dans E. □

On peut également généraliser la proposition 5.1.3 de [**25**].

Théorème 6.4.4. — *Soient $y_1, \ldots, y_d \in Y$ de générateurs $a_1, \ldots, a_d \in \mathbb{M}_1$. Soient $\Pi^-(a_1), \ldots, \Pi^-(a_d) \in \mathbf{A}\backslash\pi\mathbf{A}$. L'idéal de $\mathbf{A}$ formé des $x \in \mathbf{A}$ tels que $\forall n \geq 0$, $\varphi^n(x) \in y_1 \ldots y_d$ est l'idéal engendré par $\Pi^-(a_1)\ldots\Pi^-(a_d)$.*

Démonstration. Dire que pour tout $n \geq 0$, $\varphi^n(x) \in y_1 \ldots y_d$ est équivalent à dire que

$$\mathrm{div}(x) \geq \sum_{i=1}^{d}\sum_{n\leq 0}\left[\varphi^n(y_i)\right].$$

Le théorème se déduit alors du point (1) du théorème 2.7.4. □

6.5. La courbe lorsque F est algébriquement clos

6.5.1. Définition et théorème principal. — On reprend les notations des sections précédentes. *On suppose désormais, et ce jusqu'à la fin de ce chapitre, que F et algébriquement clos.*

Définition 6.5.1. — On note

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}(P_{F,E,\pi}).$$

La notation précédente « $X_{F,E}$ » ne fait pas référence à l'uniformisante π pour une bonne raison ; bien que l'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$ dépende du choix de cette uniformisante, d'après l'isomorphisme noté $u_{\pi,\pi'}$ de la section 6.1.2 et [**32**] prop. 3.1.8, (iii) le schéma $X_{F,E}$ ne dépend pas canoniquement de ce choix. Notons enfin que $X_{F,E}$ est

un E-schéma. On note X pour $X_{F,E}$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté concernant F ou E.

Théorème 6.5.2. —

1. *Le schéma X est une courbe complète de corps de définition E dont tous les points fermés sont de degré* 1.
2. *Si $E'|E$ il y a un isomorphisme canonique $X_{E'} \xrightarrow{\sim} X_E \otimes_E E'$.*
3. *Pour tout $t \in P_1$ non nul, $V^+(t) = \{\infty_t\}$, le lieu d'annulation de la section hyperplane définie par t, est formé d'un seul point. De plus, le corps résiduel C_t de X en ∞_t est un corps valué complet algébriquement clos extensions de E. On a alors une identification canonique $C_t^\flat = F$.*
4. *L'application*
$$\begin{array}{rcl} \big(P_1 \setminus \{0\}\big)/E^\times & \longrightarrow & |X| \\ t.E^\times & \longmapsto & \infty_t \end{array}$$
est une bijection. Il y a de plus une bijection naturelle
$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$$
qui fait correspondre à y mod $\varphi^{\mathbb{Z}}$ le point ∞_t où t est tel que $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[\varphi^n(y)\big]$.
5. *Pout un tel t, l'anneau local $\mathcal{O}_{X,\infty_t}$ est un anneau de valuation discrète. Si $y \in |Y|$ est tel que* $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[\varphi^n(y)\big]$ *il y a alors un isomorphisme canonique*
$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty_t} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,y}$$
et t est une uniformisante de $B^+_{dR,y}$.
6. *Si $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée, soit $B^+_{cris}(C_t)$ l'anneau des périodes cristallines associé au corps résiduel en ∞_t. Il y a une identification canonique*
$$B^+_F = \bigcap_{n\geq 0} \varphi^n\big(B^+_{cris}(C_t)\big).$$
7. *Soit*
$$B_e = B^+[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id} = B[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id}$$
qui est égal à
$$B_{cris}(C_t)^{\varphi=Id}$$
lorsque $E|\mathbb{Q}_p$ est non-ramifiée. On a alors
$$D^+(t) = X \setminus \{\infty_t\} = Spec(B_e)$$
et B_e est un anneau principal. De plus, si ord_{∞_t} est la valuation sur B_e induite par le plongement $B_e \subset Frac\big(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty_t}\big)$, le couple $(B_e, -ord_{\infty_t})$ est presque euclidien (def. 5.2.1).

8. *Si $E'|E$, via le revêtement étale $X_{E'} \to X_E$ l'image réciproque d'un point fermé $x \in |X_E|$ est constituée de $[E' : E]$-points de même corps résiduel que celui de x.*
9. *L'application degré induit un isomorphisme*
$$\mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$
10. *On a $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$.*

Démonstration. D'après les théorèmes 6.2.1, 6.4.1 et son corollaire 6.4.3, les hypothèses du théorème 5.2.7 sont vérifiées. Utilisant également les résultats de la section 5.4, on en déduit facilement toutes les assertions du théorème, hormis les points (2), (5) et (7). Le point (2) se déduit de [**32**] 2.4.7 (i) et de la section 6.1.3 dont il résulte qu'il y a un isomorphisme d'algèbres graduées
$$P_{E,\pi_E,\bullet} \otimes_E E' \xrightarrow{\sim} P_{E,\pi_{E'},[E':E]\bullet}.$$
Concernant le point (5), l'anneau $\mathcal{O}_{X,\infty_t}$ se décrit comme étant le sous-anneau de $\mathrm{Frac}(P)$ formé des $\frac{x}{y}$ avec x et y homogènes de même degré et y premier à t dans l'algèbre graduée factorielle P c'est à dire $y \notin tP$. L'inclusion $P \subset B$ induit une extension de corps
$$E(X) \hookrightarrow B_{dR,y}.$$
La description précédente de $\mathcal{O}_{X,\infty_t}$ montre que via cette inclusion, $\mathcal{O}_{X,\infty_t} \subset B^+_{dR,y}$. On vérifie facilement que cette inclusion d'anneaux de valuation discrète induit un isomorphisme au niveau des corps résiduels et envoie une uniformisante sur une uniformisante. On a donc
$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty_t} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,y}.$$
Le point (8) résulte de ce que le le morphisme $X_{E'} \to X_E$ est étale fini de degré $[E' : E]$ et de ce que le corps résiduel en un point fermé de X_E est algébriquement clos. □

Corollaire 6.5.3. — *La tour de courbes $(X_{E_h})_{h\geq 1}$ est une sphère de Riemann généralisée au sens de la définition 5.6.21.*

6.6. Description en termes des fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

On sait que les courbes algébriques propres et lisses « usuelles » se décrivent en termes de corps de degré de transcendance 1 et de valuations sur ceux-ci. On va donner une interprétation de la courbe X en ces termes.

Soit $\mathcal{M}(Y)$ le corps des fonctions méromorphes sur Y (déf. 3.5.9).

Définition 6.6.1. — On note $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{M}(Y)^{\varphi = Id}$.

On a alors le résultat suivant.

Proposition 6.6.2. — *Le corps $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ s'identifie au corps des fonctions rationnelles $E(X)$.*

Démonstration. — On a

$$E(X) = \left\{ \tfrac{x}{y} \mid x, y \in P \text{ homogènes de même degré}, y \neq 0 \right\} \subset \mathrm{Frac}(P).$$

Puisque $P \subset B$, il y a une application

$$E(X) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(P) \hookrightarrow \mathrm{Frac}(B) = \mathcal{M}(Y)$$

dont on vérifie aussitôt qu'elle est à valeurs dans $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$. Soit maintenant $f \in \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})^{\times}$. Considérons son diviseur

$$\mathrm{div}(f) \in \mathrm{Div}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}).$$

On peut l'écrire comme différence de deux diviseurs dans $\mathrm{Div}^{+}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$. D'après le théorème 6.2.7 il existe $g, h \in P$ homogènes non nuls tels que

$$\mathrm{div}(f) = \mathrm{div}(g) - \mathrm{div}(h)$$

et donc (theo. 3.5.11)

$$f = u\frac{g}{h}$$

avec $u \in B^{\times} = (B^b)^{\times}$. Puisque f est φ-invariante on a

$$u \in (B^b)^{\varphi = \pi^{\deg h - \deg g}} = \begin{cases} 0 \text{ si } \deg g \neq \deg h \\ E \text{ sinon.} \end{cases}$$

On conclut que $\deg(g) = \deg(h)$ et $u \in E^{\times}$. □

On a maintenant la description suivante de X en termes du corps $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$. L'application

$$\begin{array}{rcl} |Y| & \longrightarrow & \left\{\text{valuations sur } \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})\right\} \\ y & \longmapsto & \mathrm{ord}_{y|\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})} \end{array}$$

induit un plongement

$$|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \hookrightarrow \left\{\text{valuations sur } \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})\right\}.$$

Via $E(X) \xrightarrow{\sim} \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$ et $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$ (theo. 6.5.2 point (4)) cela correspond à l'application $|X| \ni x \mapsto \mathrm{ord}_x$. Alors, les ouverts non-vides de X sont les complémentaires des sous-ensembles finis dans $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$ et pour un tel ouvert U,

$$\Gamma(U, \mathcal{O}_X) = \{f \in \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) \mid \forall [y] \in U,\ \mathrm{ord}_y(f) \geq 0\}.$$

6.7. La courbe comme quotient d'un ind-schéma

Considérons le ind-schéma

$$\varinjlim_I \operatorname{Spec}(B_I)$$

où I parcourt les intervalles compacts dans $]0,1[$. Il est muni d'une action de φ par automorphismes via

$$\varphi : \operatorname{Spec}(B_I) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Spec}(B_{\varphi^{-1}(I)})$$

où l'on pose $\varphi(\rho) = \rho^q$ pour $\rho \in]0,1[$.

Proposition 6.7.1. — *1. Il y a un morphisme φ-invariant de ind-schémas*

$$\varinjlim_I \operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

qui fait de X un quotient catégorique de $\varinjlim_I \operatorname{Spec}(B_I)$ par $\varphi^{\mathbb{Z}}$ au sens où ce morphisme est universel pour les morphisme φ-invariants de $\varinjlim_I \operatorname{Spec}(B_I)$ vers un schéma.

2. Pour tout I le morphisme

$$\operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

est plat. Il est fidèlement plat si $I = [\rho_1, \rho_2]$ avec $\rho_1 \leq \rho_2^q$.

Démonstration. — Pour tout $I \subset]0,1[$ compact l'inclusion $P \subset B \subset B_I$ induit un morphisme

$$\operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow \operatorname{Spec}(P).$$

Puisque $P \subset B_I$, l'image du point générique de $\operatorname{Spec}(B_I)$ est le point générique de $\operatorname{Spec}(P)$. Rappelons que B_I est un anneau principal (theo. 2.5.1) d'idéaux maximaux en bijection avec $|Y_I|$. Or, si $y \in |Y_I|$, il existe $t \in P_1$ tel que $t(y) \neq 0$ et donc l'image de l'idéal maximal $B_I\mathfrak{m}_y$ dans $\operatorname{Spec}(P)$ est dans l'ouvert principal $D(t)$. Il s'en suit que

$$\operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow \operatorname{Spec}(P) \setminus V(P_+) \longrightarrow \big(\operatorname{Spec}(P) \smallsetminus V(P_+)\big)/\mathbb{G}_m = \operatorname{Proj}(P) = X.$$

Lorsque I varie cela induit un morphisme φ-invariant de ind-schémas. On vérifie que via les identifications $\operatorname{Spm}(B_I) = |Y_I|$ et $|X| = |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}$ cette application est au niveau des points fermés

$$|Y_I| \longrightarrow |Y|/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

Les assertions concernant la platitude et la fidèle platitude en découlent.

Soit maintenant

$$f : \varinjlim_I \operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow Z$$

un morphisme φ-invariant où Z est un schéma. Notons pour tout I, $f_I : \mathrm{Spec}(B_I) \to Z$, $f = (f_I)_I$. À chaque ouvert U de Z est associé un ouvert $f_I^{-1}(U) \subset \mathrm{Spec}(B_I) = |Y_I| \cup \{\xi\}$ où ξ est le point générique commun à tous les $(\mathrm{Spec}(B_I))_I$. Alors,

$$f^{-1}(U) := \varinjlim_I f_I^{-1}(U) \subset \bigcup_I |Y_I| \cup \{\xi\} = |Y| \cup \{\xi\}$$

est un sous-ensemble de $|Y|$ qui est soit vide soit tel que pour tout I, $f_I^{-1}(U) = f^{-1}(U) \cap (|Y_I| \cup \{\xi\})$ est le complémentaire d'un ensemble fini de $|Y_I|$. Notons de plus que puisque f est φ-invariant, ce sous-ensemble de $|Y| \cup \{\xi\}$ est φ-invariant. S'il est non vide, il existe donc un $t \in P$ homogène non nul tel que

$$\{y \in |Y| \mid t(y) \neq 0\} \cup \{\xi\} \subset f^{-1}(U)$$

et donc f induit par restriction un morphisme φ-invariant

$$\varinjlim_I \mathrm{Spec}(B_I[\tfrac{1}{t}]) \longrightarrow U.$$

Si $U = \mathrm{Spec}(A)$ est affine il revient au même de se donner un morphisme

$$A \longrightarrow \Big(\varprojlim_I B_I[\tfrac{1}{t}] \Big)^{\varphi = Id} = B[\tfrac{1}{t}]^{\varphi = Id}.$$

On conclut facilement que f se factorise via $\varinjlim_I \mathrm{Spec}(B_I) \to X$. □

Remarque 6.7.2. — Il résulte de la proposition précédente que si I est « suffisamment grand », X est un quotient fpqc de $\mathrm{Spec}(B_I)$. Ceci dit il ne semble pas y avoir de description simple de la relation d'équivalence $\mathrm{Spec}(B_I) \times_X \mathrm{Spec}(B_I)$ sur $\mathrm{Spec}(B_I)$.

CHAPITRE 7

LA COURBE FONDAMENTALE POUR F PARFAIT QUELCONQUE

Introduction

On montre dans ce chapitre que l'on peut étendre la construction de notre courbe faite dans le chapitre précédent au cas où F est parfait non-nécessairement algébriquement clos. La méthode utilisée est celle de la descente galoisienne de $\widehat{\overline{F}}$ à F en utilisant la théorie de Sen. Il y a une différence notable cependant par rapport au cas où F est algébriquement clos : le Pic° de notre courbe n'est plus nécessairement trivial. C'est pourquoi les anneaux de Dedekind des ouverts affines ne sont plus principaux en général (cf. prop. 7.2.4). De plus les corps résiduels de la courbe sont des corps perfectoïdes non nécessairement algébriquement clos de « degré » > 1 en général.

Enfin, on donne des compléments quant à la structure de la courbe comme par example la proposition 7.9.1 qui supporte le fait que X est la version algébrique d'un espace du type « $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ ».

7.1. Calculs de cohomologie galoisienne

On calcul dans cette section des groupes de cohomologie galoisienne d'anneaux et modules intervenant dans la construction de la courbe sur $\widehat{\overline{F}}$.

7.1.1. Cohomologie galoisienne de B^+_{dR}. — Soit $y \in |Y_F|$ et $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ tel que $\beta(z) = y$ (chap. 3). On note $K_y \subset C_z$ les corps résiduels associés, $C_z = \widehat{\overline{K}}_y$ (cf. theo. 3.3.1). Rappelons également que l'on dispose d'anneaux de valuations discrète complets $B^+_{dR,z}$ de corps résiduel C_z et $B^+_{dR,y}$ de corps résiduel K_y. Il y a une action de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y)$ sur $B^+_{dR,z}$. On note $\mathrm{Fil}^k B^+_{dR,z}$ la puissance k-ième de l'idéal maximal de $B^+_{dR,z}$.

Tout $B^+_{dR,z}$-module de longueur finie est canoniquement un E-espace de Banach. Plus précisément, pour $k \geq 0$, via l'application surjective

$$B_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow B^+_{dR,z}/\mathrm{Fil}^k B^+_{dR,z}$$

la topologie de Fréchet de $B_{\widehat{\overline{F}}}$ induit une topologie quotient qui est de Banach. Muni de cette structure canonique d'espace de Banach $B^+_{dR,z}/\mathrm{Fil}^k B^+_{dR,z}$ est une extension successive du E-espace de Banach C_z.

Soit W un $B^+_{dR,z}$-module de type fini muni d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y)$. On dit que cette action est continue si pour tout $k \geq 0$, l'action déduite sur l'espace de Banach $W/\mathrm{Fil}^k B^+_{dR,z} W$ l'est.

La proposition 3.2.2 couplée à la théorie de Sen-Tate fournit alors le résultat suivant. Nous n'en donnons pas la démonstration car il s'agit d'applications « standard » bien connues de la méthode de Sen-Tate.

Proposition 7.1.1. — *1. On a*

$$B^+_{dR,y} = \left(B^+_{dR,z}\right)^{Gal(\overline{K}_y|K_y)}.$$

2. Soit W un $B^+_{dR,z}$-module de longueur fini muni d'une action semi-linéaire continue de $Gal(\overline{K}_y|K_y)$. On a alors

$$H^1(Gal(\overline{K}_y|K_y), W) = 0.$$

3. Le foncteur

$$V \mapsto V \otimes_{B^+_{dR,y}} B^+_{dR,z}$$

induit une équivalence de catégories entre $B^+_{dR,y}$-modules de type fini et $B^+_{dR,z}$-modules de type fini munis d'une action semi-linéaire continue de $Gal(\overline{K}_y|K_y)$. Un inverse est donné par

$$W \longmapsto W^{Gal(\overline{K}_y|K_y)}.$$

7.1.2. Cohomologie galoisienne de B_e. — Fixons une uniformisante π de E.

Proposition 7.1.2. — *Pour toute représentation continue $\rho : G_F \to GL(V)$ à valeurs dans un E-espace vectoriel de dimension finie et $d > 0$ on a*

$$\begin{aligned} H^1\left(G_F, B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^d} \otimes_E V\right) &= 0 \\ H^0\left(G_F, B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^d} \otimes_E V\right) &\neq 0 \end{aligned}$$

où la cohomologie est la cohomologie continue relativement à la structure d'espace de Banach de $B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^d}$ (sec. 4.1.2).

Démonstration. — Fixons $t \in P_{F,\pi,1}$. Commençons par l'assertion d'annulation. Soit $y \in |Y_F|$ tel que $t(y) = 0$. Lorsque $d > 1$ il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow P_{\widehat{\overline{F}},d-1} \xrightarrow{\times t} P_{\widehat{\overline{F}},d} \xrightarrow{\theta_y} \widehat{\overline{K}}_y \longrightarrow 0.$$

où $\overline{K}_y$ désigne la clôture algébrique de K_y dans C_z, $z \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|$ et $\beta(z) = y$. L'action de G_F sur $\widehat{\overline{K}}_y$ est alors déduite de l'isomorphisme $\mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$. D'après la proposition 7.1.1 on a

$$H^1\big(\mathrm{Gal}(\overline{K}_y|K_y), V \otimes_E \widehat{\overline{K}}_y\big) = 0.$$

En tordant la suite exacte précédente par V et en regardant la suite exacte longue de cohomologie galoisienne associée on en déduit que par récurrence il suffit de montrer le résultat pour $d = 1$:

$$H^1(G_F, P_{\widehat{\overline{F}},1} \otimes_E V) = 0.$$

Soit $\mathcal{G}$ un groupe de Lubin-Tate sur $\mathcal{O}_E$. Rappelons maintenant qu'il y a un isomorphisme de périodes d'espaces de Banach

$$\mathcal{G}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}}) \xrightarrow{\sim} P_{\widehat{\overline{F}},1}.$$

Fixons une loi de groupe formel de Lubin-Tate $\mathcal{LT}$ associée à $\mathcal{G}$ et donc

$$U := \mathcal{G}(\mathcal{O}_{\widehat{\overline{F}}}) = \Big(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}}, \underset{\mathcal{LT}}{+}\Big).$$

Notons pour $\rho \in]0,1[$,

$$\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}},\rho} = \big\{x \in \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}}} \;\big|\; |x| < \rho\big\}.$$

Posons

$$U_\rho = \Big(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}},\rho}, \underset{\mathcal{LT}}{+}\Big).$$

qui est un réseau définissant la topologie de Banach de U. On a alors $\pi U_\rho = U_{\rho^q}$ et puisque $X \underset{\mathcal{LT}}{+} Y \equiv X + Y \bmod \deg \geq 2$,

$$U_\rho/U_{\rho^2} \xrightarrow{\sim} \big(\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}},\rho}/\mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}},\rho^2}, +\big).$$

Soit $\Lambda \subset V$ un réseau Galois invariant. On a alors

$$H^1(G_F, U \otimes_E V) = \varinjlim_{\rho} H^1(G_F, U_\rho \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda).$$

De plus,

$$U_\rho = \varprojlim_{n \geq 0} U_\rho/U_{\rho^{2^n}}$$

D'après le lemme 3.1.1 couplé à la méthode de Tate, pour $i > 0$

$$H^i\big(G_F, \mathfrak{m}_{\widehat{\overline{F}},\rho} \otimes_{\mathbb{F}_q} \Lambda/\pi\Lambda\big) = 0$$

duquel on déduit que

$$H^1\big(G_F, U_{\rho^{2^n}} \otimes \Lambda / U_{\rho^{2^{n+1}}} \otimes \Lambda\big) = 0.$$

On conclut quant à l'annulation de $H^1(G_F, P_{\widehat{\overline{F}},1} \otimes_E V)$.

Passons à la seconde assertion de la proposition. Avec les notations précédentes, il suffit de montrer que

$$H^0(G_F, U_\rho \otimes_{\mathcal{O}_E} \Lambda) \neq 0$$

pour un $\rho \in]0,1[$. Puisque

$$H^1\big(G_F, V_{\rho^{2^n}}(\chi)/V_{\rho^{2^{n+1}}}(\chi)\big) = 0$$

l'application

$$H^0\big(G_F, V_\rho(\chi)/V_{\rho^{2^{n+1}}}(\chi)\big) \longrightarrow H^0\big(G_F, V_\rho(\chi)/V_{\rho^{2^n}}(\chi)\big)$$

est surjective et donc $H^0(G_F, V_\rho(\chi))$ se surjecte sur $H^0\big(G_F, V_\rho(\chi)/V_{\rho^2}(\chi)\big)$ qui est non nul toujours d'après Tate et le lemme 3.1.1. □

7.2. L'anneau B_e est de Dedekind

Soit π une uniformisante de E. Considérons

$$\begin{aligned} P_{F,\pi} &= \bigoplus_{d\geq 0} B_F^{\varphi=\pi^d} \\ P_{\widehat{\overline{F}},\pi} &= \bigoplus_{d\geq 0} B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^d}. \end{aligned}$$

D'après le théorème 3.6.1 on a

$$P_{F,\pi} = P_{\widehat{\overline{F}},\pi}^{G_F}.$$

Soit $t \in P_{F,\pi,1}$ non nul. Posons

$$\begin{aligned} B_{F,e} &= B_F[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id} = P_{F,\pi}[\tfrac{1}{t}]_0 \\ B_{\widehat{\overline{F}},e} &= B_{\widehat{\overline{F}}}[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id} = P_{\widehat{\overline{F}},\pi}[\tfrac{1}{t}]_0. \end{aligned}$$

Proposition 7.2.1. — *L'anneau $B_{F,e}$ est de Dedekind.*

Démonstration. — On utilise le lemme 7.2.2 qui suit. Soit $f \in B_{F,e} \smallsetminus E^\times$. De la suite exacte

$$0 \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}},e} \xrightarrow{\times f} B_{\widehat{\overline{F}},e} \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}},e}/B_{\widehat{\overline{F}},e} f \longrightarrow 0$$

et de l'annulation de $\varinjlim_d H^1\big(G_F, B_{\widehat{\overline{F}},e}^{\deg\leq d}\big)$ (cela résulte de la prop. 7.1.2) on tire que

$$B_{F,e}/B_{F,e} f = \Big(B_{\widehat{\overline{F}},e}/B_{\widehat{\overline{F}},e} f\Big)^{G_F}.$$

Si $f = \frac{x}{t^k}$ avec $x \in P_{F,\mathbb{L},k} \smallsetminus tP_{F,\mathbb{L},k-1}$, alors

$$B_{\widehat{\overline{F}},e}/B_{\widehat{\overline{F}},e}f \simeq \prod_{[y]\in|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}} \prod_{\substack{[z]\in|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}/\varphi^{\mathbb{Z}} \\ [\beta(z)]=[y]}} B^+_{dR,z}/\mathrm{Fil}^{\mathrm{ord}_y(x)}B^+_{dR,z}.$$

Puisque les fibres de β sont des orbites sous Galois les deuxièmes produits intervenant dans la formule précédente sont des modules galoisiens induits. On conclut en appliquant la proposition 7.1.1 que

$$\left(B_{\widehat{\overline{F}},e}/B_{\widehat{\overline{F}},e}f\right)^{G_F} \simeq \prod_{[y]\in|Y_F|/\varphi^{\mathbb{Z}}} B^+_{dR,y}/\mathrm{Fil}^{\mathrm{ord}_y(x)}B^+_{dR,y}.$$

□

Lemme 7.2.2. — *Un anneau intègre A est de Dedekind si et seulement si pour tout élément non nul $a \in A$, $A/(a)$ est isomorphe à un produit d'anneaux de valuation discrète quotientés par une puissance de leur idéal maximal.*

On peut voir $B_{F,e}$ comme un sous-anneau du corps des fonctions méromorphes (sec. 3.5.4) φ-invariantes sur Y_F, $\mathcal{M}(Y_F)^{\varphi=Id}$. On a alors

Proposition 7.2.3. — *Il y a une bijection*

$$\begin{array}{rcl} \big(|Y_F| \smallsetminus V(t)\big)/\varphi^{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & Spm(B_{F,e}) \\ [y] & \longmapsto & \big\{f \in B_{F,e} \mid f(y) = 0\big\}. \end{array}$$

De plus, si l'idéal maximal $\mathfrak{m}$ correspond à $[y]$ il y a alors un isomorphisme canonique

$$\widehat{(B_{F,e})_{\mathfrak{m}}} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,y}.$$

Démonstration. — Si A est un anneau de Dedekind alors

$$\varinjlim_{\mathfrak{a}} \mathrm{Spec}(A/\mathfrak{a}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Spm}(A)$$

où $\mathfrak{a}$ parcourt l'ensemble ordonné des idéaux principaux non nuls de A. La proposition résulte alors de la description donnée dans la démonstration de la proposition 7.2.1 des quotients de B_e par un idéal principal non nul. □

Proposition 7.2.4. — *Le groupe des classes d'idéaux de l'anneau de Dedekind $B_{F,e}$ est*

$$\mathcal{C}l(B_{F,e}) \simeq Hom(G_F, E^\times).$$

Démonstration. — Si I est un idéal non nul de $B_{F,e}$ l'idéal $B_{\widehat{\overline{F}},e}I$ est principal,

$$B_{\widehat{\overline{F}},e}I = (f).$$

Il y a alors un morphisme de groupes

$$\chi : G_F \longrightarrow B^\times_{\widehat{\overline{F}},e} = E^\times$$

tel que pour tout $\sigma \in G_F$ on ait

$$f^\sigma = \chi(\sigma) f.$$

Ce caractère χ est continu. Cela résulte de ce que si $f \in t^{-k} P_{\widehat{\overline{F}},\pi,k}$ l'action de G_F sur le E-espace de Banach $t^{-k} P_{\widehat{\overline{F}},\pi,k}$ est continue.

Le caractère χ associé à l'idéal I ne dépend que de la classe de I dans $\mathcal{C}l(B_{F,e})$. On a donc défini un morphisme de groupes

$$\mathcal{C}l(B_{F,e}) \longrightarrow \mathrm{Hom}(G_F, E^\times).$$

De l'égalité $\left(B_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F} = B_{F,e}$ on déduit que ce morphisme de groupes est injectif. Montrons sa surjectivité. Soit maintenant $\chi : G_F \to E^\times$ continu. D'après la proposition 7.1.2

$$H^0\big(G_F, B_{\widehat{\overline{F}},e}(\chi^{-1})\big) \neq 0$$

et il existe donc $f \in B_{\widehat{\overline{F}},e}$ tel que

$$\forall \sigma \in G_F \quad f^\sigma = \chi(\sigma) f.$$

Toujours d'après la proposition 7.1.2, puisque

$$H^0\big(G_F, B_{\widehat{\overline{F}},e}(\chi)\big) \neq 0,$$

l'idéal de $B_{F,e}$

$$I := B_{\widehat{\overline{F}},e} f \cap B_{F,e} = \left(B_{\widehat{\overline{F}},e} f\right)^{G_F}$$

est non nul. D'après la description du spectre maximal donnée dans la proposition 7.2.3 il résulte que pour un idéal I de $B_{F,e}$,

$$I = (B_{\widehat{\overline{F}},e} I)^{G_F}.$$

Le résultat en découle. □

7.3. La courbe

Soit π une uniformisante de E et

$$P_{F,E,\pi} = \bigoplus_{d \geq 0} B_E^{\varphi_E = \pi^d}.$$

Proposition 7.3.1. — *L'algèbre graduée $P_{F,E,\pi}$ est engendrée par ses éléments homogènes de degré* 1.

Démonstration. — Soit $t \in B_F^{\varphi=\pi}$ non nul et $y \in |Y_F|$ tel que $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$. Il y a une suite exacte

$$0 \to E.t \longrightarrow B_F^{\varphi=\pi} \xrightarrow{\theta_y} K_y.$$

On vérifie facilement que $B_F^{\varphi=\pi}$ est un E-espace de Banach de dimension infinie (utiliser qu'il s'agit des $\mathcal{O}_F$-points d'un groupe de Lubin-Tate sur $\mathbb{F}_q$). Il s'en suit

qu'il existe $s \in B_F^{\varphi=\pi}$ tel que $\theta_y(s) \neq 0$. Puisque les diviseurs de s et t sont premiers entre eux il y a une suite exacte de fibrés sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}(-1) \xrightarrow{(-s,t)} \mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}} \oplus \mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}} \xrightarrow{s \oplus t} \mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}(1) \longrightarrow 0.$$

Soit maintenant un entier $d > 1$. En tordant la suite précédente par $\mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}(d)$ et en prenant les sections globales, puisque $H^1(X_{\widehat{\overline{F}}}, \mathscr{L}(d)) = 0$, on obtient une suite exacte

$$0 \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d-1}} \xrightarrow{(-s,t)} B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d}} \oplus B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d}} \xrightarrow{t \oplus s} B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d+1}} \longrightarrow 0$$

Puisque $H^1(G_F, B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d-1}}) = 0$ (7.1.2) la suite exacte de cohomologie galoisienne associée donne

$$B_F^{\varphi=\pi^{d+1}} = B_F^{\varphi=\pi^{d}} s + B_F^{\varphi=\pi^{d}} t.$$

Il suffit maintenant de montrer que le morphisme

$$\mathrm{Sym}^2 B_F^{\varphi=\pi} \longrightarrow B_F^{\varphi=\pi^2}$$

est surjective. Soit $E'|E$ une extension quadratique de E obtenue en rajoutant une racine carrée $\pi^{1/2}$ de π. Afin de montrer que le morphisme précédent est surjectif il suffit de montrer que c'est le cas après extension des scalaires à E'. Mais pour tout d on a

$$P_{F,E,\pi,d} \otimes_E E' = P_{F,E',\pi^{1/2},2d}.$$

Ce que l'on a démontré précédemment appliqué en remplaçant E par E' montre en particulier que

$$\mathrm{Sym}^2 P_{F,E',\pi^{1/2},2} \longrightarrow P_{F,E',\pi^{1/2},4}$$

est surjectif. On conclut. □

Remarque 7.3.2. — Si F n'est pas algébriquement clos il existe des éléments homogènes de degré > 1 dans l'algèbre graduée P_F qui ne sont pas des produits d'éléments de degré 1.

On note maintenant

$$X_{F,E} = \mathrm{Proj}(P_{F,E,\pi}).$$

Si F contient une clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$, il résulte de la section 6.1.2 que ce schéma ne dépend, canoniquement, pas du choix de π. Ceci dit, nous verrons en toutes généralités sur F dans la section 7.4 une description de $X_{F,E}$ qui ne fait pas intervenir π. C'est pourquoi, par anticipation, π n'apparaît pas dans la notation $X_{F,E}$.

D'après la proposition 7.3.1 on a $X_F = \cup_{t \in P_{F,1} \setminus \{0\}} D^+(t)$. En utilisant les propositions 7.2.1 et 7.2.3 on obtient le théorème suivant.

Théorème 7.3.3. —

1. *Le schéma $X_{F,E}$ est une courbe.*

2. *Il y a une bijection*
$$u : |Y_{F,E}|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_{F,E}|$$
qui envoie la classe de $y \in |Y_{F,E}|$ sur l'idéal homogène dont les éléments homogènes de degré d sont les $f \in P_{F,E,\pi,d} \subset B_F$ vérifiant $f(y) = 0$.
3. *Posons pour $x \in |X_F|$, $\deg(x) = \deg(y)$ si $u([y]) = x$. Cela fait de $X_{F,E}$ une courbe complète de corps de définition E (5.1.3).*
4. *Si $u([y]) = x$ il y a un isomorphisme canonique*
$$\widehat{\mathcal{O}}_{X_F,x} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,y}.$$

7.4. Description en termes de fonctions méromorphes sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$

Comme dans la section 6.6 on note $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{M}(Y)^{\varphi=Id}$. Voici maintenant la généralisation de la proposition 6.6.2 au cas F parfait quelconque.

Proposition 7.4.1. — *Le corps des fonctions rationnelles $E(X)$ s'identifie à $\mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$.*

Démonstration. — Comme dans la preuve de 6.6.2 il y a un plongement naturel $E(X) \subset \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$. Étant donné $f \in \mathcal{M}(Y/\varphi^{\mathbb{Z}})$, d'après 6.6.2 on peut écrire
$$f = \frac{x}{y}$$
avec $x, y \in P_{\widehat{\overline{F}},E,\pi,d}$ pour un entier d. On peut de plus supposer que x et y sont premiers entre eux dans l'algèbre graduée factorielle $P_{\widehat{\overline{F}},E,\pi}$ i.e. l'entier d précédent tel que $f = \frac{x}{y}$ avec x et y homogènes de degré d est minimal. Pour $\sigma \in G_F$ on a alors
$$\sigma(x)y = x\sigma(y)$$
et donc $x|\sigma(x)$ puisque x et y sont premiers entre eux. Puisque x et $\sigma(x)$ sont de même degré on en déduit l'existence de $\chi(\sigma) \in E^\times$ tel que
$$\sigma(x) = \chi(\sigma)x.$$
On a alors $\sigma(y) = \chi(\sigma)y$ et de plus $\chi : G_F \to E^\times$ est un caractère. Il est continu. En effet, fixons $\rho \in]0,1[$. L'action de G_F sur $B_{\widehat{\overline{F}}}$ est continue et on a en particulier $\lim\limits_{\sigma\to e}|\sigma(x) - x|_\rho = 0$. Puisque $|.|_\rho$ induit la topologie non-archimédienne sur E on en déduit la continuité de χ. Soit maintenant $z \in H^0\big(G_F, P_{\widehat{\overline{F}},E,\pi,1}(\chi)\big)$ non nul (prop. 7.1.2). Alors, $f = \frac{zx}{zy}$ avec $zx, zy \in P_{F,E,\pi,d+1}$. □

Comme dans la section 6.6), on en déduit une description de $X_{F,E}$ en termes de $\mathcal{M}(Y_{F,E}/\varphi^{\mathbb{Z}})$ et des valuations $\mathrm{ord}_y, y \in |Y_{F,E}|$. Il en découle aussitôt que $X_{F,E}$ ne dépend pas canoniquement du choix de l'uniformisante π.

7.5. Changement de corps E

Soit $E'|E$ de degré fini. Puisque $B_{E'} = B_E \otimes_E E'$,

$$\mathcal{M}(Y_{E'}) = \mathcal{M}(Y_E) \otimes_E E'$$

et donc

$$\mathcal{M}(Y_{E'}/\varphi^{\mathbb{Z}}) = \mathcal{M}(Y_E/\varphi^{\mathbb{Z}}) \otimes_E E'$$

soit encore

$$E(X) \otimes_E E' = E'(X_{E'}).$$

Proposition 7.5.1. — *Il y a une identification canonique*

$$X_E \otimes_E E' = X_{E'}.$$

Démonstration. — Soit $y \in |Y_E|$, $y = (\xi)$ avec $\xi \in \mathbf{A}_E$ primitif. On a alors

$$B_{E'}/(\xi) = B_E/(\xi) \otimes_E E' = K_y \otimes_E E'.$$

On en déduit que si $\mathrm{div}_{E'}(\xi) = \sum_i [z_i] \in \mathrm{Div}^+(Y_{E'})$ alors pour $i \neq j$, $z_i \neq z_j$ et

$$K_y \otimes_E E' = \prod_i K_{z_i}.$$

Il s'en suit que dans l'extension finie $\mathcal{M}(Y_{E'})|\mathcal{M}(Y_E)$,

$$\big\{\text{valuations } v \text{ de } \mathcal{M}(Y_{E'}) \text{ telles que } v_{|\mathcal{M}(Y_E)} = \mathrm{ord}_y\big\} = \{\mathrm{ord}_{z_i}\}_i.$$

Soit maintenant U un ouvert non vide de X_E différent de X_E (i.e. U est affine), $|U| = |Y_E|/\varphi^{\mathbb{Z}} \smallsetminus A$ avec A fini non-vide. Soit

$$B = \{[z] \in |Y_{E'}|/\varphi^{\mathbb{Z}} \mid \mathrm{ord}_{z|\mathcal{M}(Y_E)} \in A\}$$

et V l'ouvert de $X_{E'}$ tel que

$$|V| = |Y_{E'}|/\varphi^{\mathbb{Z}} \smallsetminus B.$$

L'inclusion $\mathcal{M}(Y_E) \subset \mathcal{M}(Y_{E'})$ induit un morphisme de E-schémas $V \to U$ et donc un morphisme de E'-schémas $V \to U \otimes_E E'$. Notons $U = \mathrm{Spec}(R)$, $V = \mathrm{Spec}(R')$. On a une inclusion d'anneaux de Dedekind $R \otimes_E E' \subset R'$ qui induit un isomorphisme au niveau de leurs corps des fractions. En regardant la décomposition d'un idéal maximal de R dans $R \otimes_E E'$ on vérifie que cela implique que $R \otimes_E E' = R'$ et donc $V \xrightarrow{\sim} U \otimes_E E'$. □

7.6. Changement de corps F

Soit $L|F$ une extension galoisienne de degré fini.

Proposition 7.6.1. — *L'action de $Gal(L|F)$ sur X_L fait de X_L un revêtement étale galoisien de groupe $Gal(L|F)$ au dessus de X_F*

$$\begin{tikzcd} X_L \arrow[d] \arrow[d, bend left, "Gal(L|F)"] \\ X_F \end{tikzcd}$$

Démonstration. — L'uniformisation

$$|Y_L|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_L|$$

est compatible à l'action de $\mathrm{Gal}(L|F)$. D'après le théorème 3.3.1, $|Y_F|$ s'identifie au quotient de $|Y_L|$ par $\mathrm{Gal}(L|F)$ et de plus, si $z \in |Y_L|$ avec $z \mapsto y \in |Y_F|$ alors

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(L|F)}(z) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Gal}(K_z|K_y).$$

Remarquons de plus que puisque l'action de $\mathrm{Gal}(L|F)$ sur $|Y_L|$ conserve la « distance à l'origine » $\|.\| : |Y_L| \to]0,1[$, on a

$$\mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(L|F)}(z) = \mathrm{Stab}_{\mathrm{Gal}(L|F)}(z \bmod \varphi^{\mathbb{Z}}).$$

On vérifie aussitôt que

$$\mathrm{Gal}(L|F) \subset \mathrm{Aut}(E(X_L)).$$

Les sous-groupes d'inertie de l'action de $\mathrm{Gal}(L|F)$ en chaque point de X_L sont donc triviaux. Il s'en suit que

$$X_L \longrightarrow X_L/\mathrm{Gal}(L|F)$$

est étale fini galoisien ([**1**] exp.V coro. 2.4). Enfin, si $t \in P_{F,1}$ est non nul et $B_{F,e} = B_F[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id}$ alors, puisque $B_{\widehat{\overline{F}},e}^{G_F} = B_{F,e}$,

$$B_{F,e} = B_{L,e}^{\mathrm{Gal}(L|F)}.$$

Il s'en suit que $X_F = X_L/\mathrm{Gal}(L|F)$. □

On dispose donc d'un pro-revêtement galoisien $(X_L)_{L|F} \to X_F$ de groupe G_F où L parcourt les extensions de degré fini de F dans $\overline{F}$.

7.7. La courbe associée à $\overline{F}$

Définition 7.7.1. — On note

$$X_{\overline{F},E} := \varprojlim_{L|F} X_{L,E}$$

(limite projective dans la catégorie des schémas) où $L|F$ parcourt les extensions de degré fini de F dans $\overline{F}$.

De façon étonnante, le schéma $X_{\overline{F}}$ est noethérien. On a plus précisément l'énoncé suivant.

Proposition 7.7.2. — *Le schéma $X_{\overline{F}}$ est une courbe de corps de définition E.*

Démonstration. — On applique le lemme 7.7.3 qui suit. Si $L|F$ est finie contenue dans $\overline{F}$ on a (3.3.1)

$$|Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}/G_L \times \varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X_L|.$$

Il suffit maintenant de remarquer que si $y \in |Y_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}$ et H désigne le stabilisateur de y dans G_L, $G_{L'} = \cap_{\sigma \in G_L} \sigma H \sigma^{-1}$, $L'|L$ finie, alors le point fermé associé à $\sigma(y)$, $\sigma \in G_L$, de $X_{L'}$ est inerte dans les revêtements $X_{L''} \to X_{L'}$. □

Lemme 7.7.3. — *Soit $(B_i)_i$ un système inductif d'anneaux de Dedekind tel que pour $i \leq j$, $B_i \to B_j$ soit étale fini. Supposons que pour tout indice i et tout idéal maximal $\mathfrak{p}$ de B_i il existe $j \geq i$ tel que pour tout $\mathfrak{q} \in Spm(B_j)$ avec $\mathfrak{q}|\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$ est inerte dans $B_k|B_j$ lorsque $k \geq j$ (i.e. $B_k\mathfrak{q}$ est un idéal premier de B_k). Alors,*

$$\varinjlim_i B_i$$

est un anneau de Dedekind.

Démonstration. — Cela résulte facilement du lemme 7.2.2. □

En résumé on dispose donc de morphismes de courbes G_F-équivariants

$$\begin{array}{c} X_{\widehat{\overline{F}}} \\ \downarrow \\ X_{\overline{F}} \\ \downarrow \\ X_F \end{array}$$

où $X_{\overline{F}} \to X_F$ est pro-galoisien de groupe G_F et

$$|X_F| = |X_{\overline{F}}|/G_F = |X_{\widehat{\overline{F}}}|^{G_F\text{-fin}}/G_F.$$

Via le morphisme $X_{\widehat{\overline{F}}} \to X_{\overline{F}}$, les points fermés dont la G_F-orbite est infinie sont envoyés sur le point générique de $X_{\overline{F}}$.

7.8. Choix d'un fibré ample et φ-modules de rang un sur B

On explique dans cette section pourquoi le choix d'une uniformisante π est arbitraire dans la définition de la courbe comme un Proj. On utilise les résultats du chapitre 11 qui seront démontrés dans la suite.

Soit $\varphi\text{-Mod}_B$ la catégorie des couples (M, φ) où M est un B-module projectif de type fini et φ un endomorphisme φ-linéaire de M. C'est une catégorie tensorielle munie

de duaux, de Hom internes et d'un objet unité $\mathbf{1} = (B, \varphi)$. Pour un tel φ-module on note

$$H^0(M, \varphi) = M^{\varphi = Id}.$$

Soit $\mathscr{I}$ les objets inversibles de φ-Mod_B i.e. les (M, φ) avec M de rang un. On note

$$\mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_B) = \mathscr{I} / \sim$$

les classes d'isomorphisme de $\mathscr{I}$. Muni du produit tensoriel c'est un groupe.

On utilise le résultat suivant (cf. chap. 11) : *si F est algébriquement clos et $(M, \varphi) \in \varphi$-Mod_B alors M est libre.* Supposons donc F algébriquement clos et soit $(M, \varphi) \in \mathscr{I}$. Si $M = B.e$, $\varphi(e) = \lambda e$ pour un $\lambda \in B^\times = (B^b)^\times$. On peut donc définir $v_\pi(\lambda) \in \mathbb{Z}$. On vérifie aussitôt que cet entier ne dépend pas du choix de la base e de M. On appelle alors degré de (M, φ) *l'opposé de* cet entier. Pour F quelconque on définit de même le degré d'un objet de $\mathscr{I}$ par extension des scalaires de B_F à $B_{\widehat{\overline{F}}}$. Cela définit un morphisme surjectif de groupes

$$\deg : \mathrm{Pic}(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_B) \longrightarrow \mathbb{Z}$$

dont on note $\mathrm{Pic}^0(\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_B)$ le noyau. On a maintenant : *il y a un isomorphisme*

$$Pic^0(\varphi\text{-}Mod_B) \xrightarrow{\sim} Hom(G_F, E^\times).$$

Cet énoncé se détaille de la façon suivante. Tout d'abord, si F est algébriquement clos il dit que tout φ-module de rang un sur B de degré 0 est isomorphe à $\mathbf{1}$. Puis, si F est quelconque et $\mathbb{L} \in \mathscr{I}_F$

$$H^0(\mathbb{L} \otimes_{B_F} B_{\widehat{\overline{F}}})$$

est un E-espace vectoriel de dimension un (d'après le cas F algébriquement clos). L'action de G_F sur cette droite définit un caractère de G_F à valeurs dans $E^\times$. Cela définit la flêche dans l'isomorphisme annoncé. Son inverse associe au caractère χ le φ-module

$$\big(B_{\widehat{\overline{F}}}(\chi)^{G_F}, \varphi\big).$$

Pour $\mathbb{L} \in \mathscr{I}$ de degré > 0 on considère l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{d \geq 0} H^0(\mathbb{L}^{\otimes d}).$$

Après avoir fixé un isomorphisme $\mathbb{L} \otimes_{B_F} B_{\widehat{\overline{F}}} \simeq (B_{\widehat{\overline{F}}}, \pi^{-k}\varphi)$, $k = \deg \mathbb{L}$, il existe un caractère $\chi : G_F \to E^\times$ tel que cette algèbre graduée soit isomorphe à

$$\Big(\bigoplus_{d \geq 0} B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi = \pi^{kd}}(\chi^d)\Big)^{G_F}.$$

Voici maintenant une généralisation de la proposition 7.3.1.

Proposition 7.8.1. — *Pour $\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2 \in \mathscr{I}$ de degré > 0 l'application*

$$H^0(\mathbb{L}_1) \otimes_E H^0(\mathbb{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathbb{L}_1 \otimes \mathbb{L}_2)$$

est surjective.

Démonstration. — Il s'agit de montrer que pour $d_1, d_2 > 0$ et χ_1, χ_2

$$B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d_1}}(\chi_1)^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d_2}}(\chi_2)^{G_F} \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d_1+d_2}}(\chi_1\chi_2)^{G_F}$$

est surjectif. On vérifie que cela se dévisse en les deux assertions suivantes :

1. Pour $d > 1$ et χ

$$B_F^{\varphi=\pi} \otimes B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^d}(\chi)^{G_F} \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^{d+1}}(\chi)^{G_F}$$

   est surjectif.

2. Pour χ_1, χ_2

$$B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi}(\chi_1)^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi}(\chi_2)^{G_F} \longrightarrow B_{\widehat{\overline{F}}}^{\varphi=\pi^2}(\chi_1\chi_2)^{G_F}$$

   est surjectif.

Le point (1) se démontre comme dans 7.3.1. Quant au point deux il résulte du point (1) appliqué à $E(\pi^{1/2})$ comme dans la preuve de 7.3.1. □

En particulier, l'algèbre graduée

$$\bigoplus_{d \geq 0} H^0(\mathbb{L}^{\otimes d})$$

est engendrée par ses éléments de degré 1.

Proposition 7.8.2. — *Soit $\mathbb{L} \in \mathscr{I}$ de degré > 0. On a alors une identification*

$$X = Proj\Big(\bigoplus_{d \geq 0} H^0\big(\mathbb{L}^{\otimes d}\big)\Big).$$

Démonstration. — Soient $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$ de degré > 0. Quitte à remplacer $\mathbb{L}_2$ par $\mathbb{L}_2^{\otimes d}$ avec $d \gg 0$, ce qui ne change par le Proj de l'algèbre graduée associée, on peut supposer que $\deg(\mathbb{L}_1) < \deg(\mathbb{L}_2)$.

Soit $u : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$. Il induit un morphisme d'algèbres graduées

$$\bigoplus_{d \geq 0} u^{\otimes d} : \bigoplus_{d \geq 0} H^0(\mathbb{L}_1^{\otimes d}) \longrightarrow \bigoplus_{d \geq 0} H^0(\mathbb{L}_2^{\otimes d}).$$

Si $t \in H^0(\mathbb{L}_1)$, ce morphisme d'algèbres graduées induit un morphisme de schémas affines

$$f_u : D^+(u(t)) \longrightarrow D^+(t).$$

Si $v : \mathbb{L}_1 \to \mathbb{L}_2$ est un autre morphisme

$$f_{u|D^+(u(t)v(t)} = f_{v|D^+(u(t)v(t)}$$

car

$$u \otimes v = v \otimes u : \mathbb{L}_1^{\otimes 2} \longrightarrow \mathbb{L}_2^{\otimes 2}$$

puisque les B-module sous-jacent à $\mathbb{L}_1$ et $\mathbb{L}_2$ sont localement libres de rang 1. D'après la proposition 7.8.1, utilisant que $\mathrm{Hom}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) = H^0(\mathbb{L}_1^\vee \otimes \mathbb{L}_2)$ et l'inégalité $\deg(\mathbb{L}_1) < \deg(\mathbb{L}_2)$, l'application

$$H^0(\mathbb{L}_1) \otimes \mathrm{Hom}(\mathbb{L}_1, \mathbb{L}_2) \longrightarrow H^0(\mathbb{L}_2)$$

est surjective. Il en résulte que les ouverts $D^+(u(t))$, $t \in H^0(\mathbb{L}_1)$ forment un recouvrement ouvert du Proj de l'algèbre graduée associée à $\mathbb{L}_2$. On en déduit donc un morphisme de schémas

$$g_{\mathbb{L}_2,\mathbb{L}_1} : \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} H^0(\mathbb{L}_2^{\otimes d})\Big) \longrightarrow \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} H^0(\mathbb{L}_1^{\otimes d})\Big).$$

On vérifie maintenant facilement que $g_{\mathbb{L}_1,\mathbb{L}_2} \circ g_{\mathbb{L}_2,\mathbb{L}_1} = Id$. □

Exemple 7.8.3. — Soit $\lambda \in B^\times = (B^b)^\times$ vérifiant $v_\pi(\lambda) > 0$. On a alors une identification

$$X = \mathrm{Proj}\Big(\bigoplus_{d\geq 0} B^{\varphi=\lambda^d}\Big).$$

7.9. Retrouver la courbe analytique à partir de la courbe schématique : le théorème de Runge

La proposition suivante dit que les fonctions rationnelles sur la courbe X avec un pôle prescrit sont denses dans les fonctions holomorphes sur les couronnes compactes Y_I qui ne contiennent pas ce pôle. Il s'agit d'un analogue d'un cas particulier du théorème de Runge concernant la densité des fonctions rationnelles dans l'espace des fonctions holomorphes sur un ouvert.

Proposition 7.9.1. — *Soient I un intervalle compact de $]0,1[$ d'extrémités dans $|F|$ tel que $I \cap \varphi(I) = \emptyset$ et $t \in B^{\varphi=\pi}$ satisfaisant supp$(\mathrm{div}(t)) \cap |Y_I| = \emptyset$. Notons $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id}$. Alors, l'inclusion*

$$B_e \subset B_I$$

est d'image dense.

Démonstration. — Notons

$$\begin{array}{rcl} \mathscr{L} : \mathfrak{m}_F & \xrightarrow{\sim} & B^{\varphi=\pi} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}} \big[x^{q^{-n}}\big]\pi^n. \end{array}$$

On vérifie aussitôt l'assertion suivante : si $\rho \in]0,1[$, $x \in F$ et $\alpha \in]0,1[$ sont tels que

$$\rho^{\frac{q}{q-1}}\alpha^{-2} \leq |x| \leq \alpha^2 \rho^{\frac{1}{q-1}}$$

alors

$$\mathscr{L}(x) = [x](1 + u(x))$$

avec

$$|u(x)|_\rho \leq \alpha.$$

Notons maintenant $I = [\rho_1, \rho_2]$ et $t = \mathscr{L}(\epsilon)$. Quitte à remplacer t par $\pi^n t$, $n \in \mathbb{Z}$, on peut toujours supposer que

$$\rho_1^{\frac{q}{q-1}} \leq \rho_2^{\frac{q}{q-1}} < |\epsilon| < \rho_1^{\frac{1}{q-1}} \leq \rho_2^{\frac{1}{q-1}}.$$

Choisissons $\alpha \in]0, 1[$ tel que

$$\rho_2^{\frac{q}{q-1}} \alpha^{-2} < |\epsilon| < \alpha^2 \rho_1^{\frac{1}{q-1}}.$$

Alors, pour $x \in F$ tel que

$$\rho_2^{\frac{q}{q-1}} \alpha^{-2} < |x| < \alpha^2 \rho_1^{\frac{1}{q-1}}$$

on a

$$\frac{\mathscr{L}(x)}{\mathscr{L}(\epsilon)} = \left[x\epsilon^{-1}\right](1 + v(x)) \tag{2}$$

avec

$$\|v(x)\|_I \leq \alpha. \tag{3}$$

On en déduit tout d'abord que $B_I^{\circ\circ} = \{f \in B_I \mid \|f\|_I < 1\}$ contient des éléments de B_e de norme $\|.\|_I$ aussi proche de 1 que l'on veut. Il suffit donc de montrer qu'il existe $\eta \in]0, 1[$ tel que si

$$\mathfrak{a}_\eta = \{f \in B_I | \ \|f\|_I \leq \eta\} = B_I^\circ.[z], \quad |z| = \eta$$

alors l'application

$$B_e \cap B_I^\circ \longrightarrow B_I^\circ / \mathfrak{a}_\eta$$

est surjective.

Si $|a| = \rho_1$ et $|b| = \rho_2$ on a

$$B_I^\circ = \widehat{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)\left[\tfrac{[a]}{\pi}, \tfrac{\pi}{[b]}\right]}.$$

Réduisant modulo π cette égalité on en déduit qu'il suffit de montrer que pour $\eta \in]0, 1[$ suffisamment proche de 1 les éléments suivants appartiennent à $B_e \cap B_I^\circ + \mathfrak{a}_\eta$:

$$[x], \quad x \in F, \ \eta < |x| \leq 1, \quad \frac{[a]}{\pi} \text{ et } \frac{\pi}{[b]}.$$

Pour les Teichmüllers cela résulte des formules (2) et (3). Utilisant ces mêmes formules on vérifie que pour $n \gg 0$

$$\frac{1}{\pi}\Big(\frac{\mathscr{L}(\epsilon a^{1/p^n})}{\mathscr{L}(\epsilon)}\Big)^{p^n}$$

permet de traiter le cas de $\frac{[a]}{\pi}$. Le cas de $\frac{\pi}{[b]}$ se traite quant à lui en considérant

$$\pi/\Big(\frac{\mathscr{L}(\epsilon b^{-1/p^n})}{\mathscr{L}(\epsilon)}\Big)^{p^n}.$$

pour $n \gg 0$. □

Corollaire 7.9.2. — *On peut retrouver la courbe analytique « $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ » à partir de l'espace annelé normé* $\big(X, \mathcal{O}_X, (|.|_\rho)_{\rho\in]0,1[}\big)$.

Remarque 7.9.3. — Considérons la droite projective $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} = \{[z_1 : z_2]\}$. Soit $I \subset]0, +\infty[$ un intervalle compact et $\mathcal{C}_I = \{[z_1 : z_2] \mid \left|\frac{z_1}{z_2}\right| \in \mathring{I}\}$ la couronne associée. Les fonctions rationnelles sur $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}}$ dont les pôles sont contenus dans $\{0, \infty\}$ sont denses dans $\mathscr{O}(\mathcal{C}_I)$. Contrairement à la proposition 7.9.1 on est obligé d'autoriser au moins deux pôles afin d'avoir un tel résultat de densité. Cela vient du fait que $\mathbb{P}^1_{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{C}_I$ a deux composantes connexes tandis que « $\big(Y \setminus \varphi^{\mathbb{Z}}(Y_I)\big)/\varphi^{\mathbb{Z}}$ » est connexe.

CHAPITRE 8

CLASSIFICATION DES FIBRÉS VECTORIELS : LE CAS F ALGÉBRIQUEMENT CLOS

Introduction

Dans ce chapitre on on démontre le théorème de classification des fibrés sur la courbe lorsque le corps F est algébriquement clos (théo. 8.2.10). On utilise pour cela le dévissage donné par le théorème 5.6.29 qui ramène l'énoncé du théorème de classification à un énoncé sur les modifications de fibrés vectoriels. On montre alors que ces deux énoncés sur les modifications de fibrés se ramènent en fait à la détermination de :

— L'image de l'application des périodes de Hodge-de-Rham pour les espaces de Lubin-Tate.

— L'image de l'application des périodes de Hodge-Tate pour les espaces de Lubin-Tate.

Le premier calcul d'image a été effectué par Gross et Hopkins dans [**29**] où ils montrent que l'application des périodes de Hodge-de-Rham est surjective i.e. le lieu admissible est égal au lieu faiblement admissible pour les espaces de Lubin-Tate. Le second calcul se ramène via l'isomorphisme entre les tours jumelles au calcul des périodes de Hodge-de-Rham pour les espaces de modules de groupes p-divisibles introduits par Drinfeld. Là encore Drinfeld ([**15**] couplé à la section 5.49 de [**54**]) a démontré que le lieu admissible coïncide avec le lieu faiblement admissible qui est lui-même égal à l'espace Ω de Drinfeld. Ces deux résultats nous permettent de conclure quant au théorème de classification des fibrés.

Enfin, on donne la première application du théorème de classification des fibrés : la simple connexité géométrique de la courbe (théo. 8.6.1).

Dans tout ce chapitre *le corps F est algébriquement clos.*

8.1. Deux résultats sur les périodes des groupes p-divisibles

Les résultats de cette section seront utilisés dans la preuve du théorème de classification des fibrés sur la courbe $X_{F,E}$ construite précédemment.

8.1.1. Le cas de l'espace de Lubin-Tate. — Soit $\overline{\mathbb{F}}_q$ la clôture algébrique de $\mathbb{F}_q$ dans F, $n \geq 1$ un entier et $\mathbb{H}$ un $\mathcal{O}_E$-module formel π-divisible de dimension 1 et de $\mathcal{O}_E$-hauteur n sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ (cf. sec. 4.3). Un tel $\mathcal{O}_E$-module formel est unique à isomorphisme non-unique près. Notons $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ le $\mathcal{O}_E$-module de Dieudonné covariant de $\mathbb{H}$ (on prendra garde que dans la section 4.3 cette notation désignait le module de Dieudonné contravariant). Il est muni d'un opérateur V associé à l'isogénie F^{f_E} : $\mathbb{H} \to \mathbb{H}^{(q)}$. On a

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H}) =< e, Ve, \ldots, Vn-1e >$$

où $V^n e = \pi e$. Soient $\widehat{E^{nr}} = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)_{\mathbb{Q}}$ et $\mathfrak{X}$ l'espace des déformations par isomorphismes de $\mathbb{H}$ sur $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E^{nr}}})$. C'est un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E^{nr}}})$-schéma formel et on a un isomorphisme non canonique

$$\mathfrak{X} \simeq \mathrm{Spf}\big(\mathcal{O}_{\widehat{E^{nr}}}[\![x_1, \ldots, x_{n-1}]\!]\big).$$

Soit $\mathfrak{X}^{an}$ la fibre générique de $\mathfrak{X}$ comme $\widehat{E^{nr}}$-espace analytique de Berkovich. Cet espace est isomorphe à une boule ouverte de dimension $n-1$. Si $K|\widehat{E^{nr}}$ est une extension valuée complète pour une valuation à valeurs dans $\mathbb{R}$,

$$\mathfrak{X}^{an}(K) = \mathfrak{X}(\mathcal{O}_K) = \{(H, \rho)\}/\sim$$

où H est un $\mathcal{O}$-module π-divisible sur $\mathcal{O}_K$ et

$$\rho : \mathbb{H} \otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow H \otimes_{\mathcal{O}_K} \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

est une quasi-isogénie de hauteur 0 de $\mathcal{O}$-modules π-divisibles. Soit $\mathbb{P}$ le $\widehat{E^{nr}}$-espace analytique de Berkovich associé à la variété algébrique qui est l'espace projectif sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$. Il y a alors un morphisme de périodes

$$\breve{\pi} : \mathfrak{X}^{an} \longrightarrow \mathbb{P}$$

défini par Gross et Hopkins dans [**29**] et généralisé par Rapoport et Zink dans [**54**], chap. 5. Nous n'aurons besoin de sa définition qu'au niveau des points. Soit $K|\widehat{E^{nr}}$ comme précédemment et $[(H, \rho)] \in \mathfrak{X}^{an}(K)$. On peut alors définir une $\mathcal{O}$-extension vectorielle universelle $E_{\mathcal{O}}(H)$ ([**18**], appendice B.3) et considérer son algèbre de Lie, $\mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(H)$, qui est un $\mathcal{O}_K$-module libre de rang $\mathrm{ht}_{\mathcal{O}}(H)$. Elle est munie d'une filtration de Hodge

$$0 \longrightarrow V_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(H) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, H \longrightarrow 0.$$

où $V_{\mathcal{O}}(H)$, la partie vectorielle de la $\mathcal{O}$-extension vectorielle universelle, est égale à $\omega_{H^D}/I\omega_{H^D}$ avec H^D le dual de Cartier de H et $I = \ker(\mathcal{O}_K \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathcal{O}_E \to \mathcal{O}_K)$. Le $\mathcal{O}$-module de Dieudonné $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})$ s'interprète comme l'évaluation d'un cristal algèbre

de Lie de la $\mathcal{O}$-extension vectorielle universelle (cf. [**18**], app. B.3). La quasi-isogénie ρ induit alors un isomorphisme

$$\rho_* : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{H})[\tfrac{1}{\pi}] \otimes_{\widehat{E^{nr}}} K \xrightarrow{\sim} \operatorname{Lie} E_{\mathcal{O}}(H)[\tfrac{1}{\pi}].$$

Via ρ_*, la filtration de Hodge précédente définit donc un point de $\mathbb{P}(K)$ qui est l'image de $[(H,\rho)]$ par l'application des périodes $\breve{\pi}$.

Théorème 8.1.1 **([48], [29])**. — *Le morphisme des périodes $\breve{\pi} : \mathfrak{X}^{an} \to \mathbb{P}$ est surjectif.*

Le théorème pécédent se traduit plus concrètement de la façon suivante. Il dit que pour tout $K|\widehat{E^{nr}}$, tout $y \in \mathbb{P}(K)$, il existe $L|K$ une extension de degré fini et $x \in \mathfrak{X}^{an}(L)$ tel que $\breve{\pi}(x) = y$. Dans [**48**] le théorème est démontré lorsque K est de valuation discrète et $E = \mathbb{Q}_p$, mais les arguments s'adaptent aussitôt au cas général. On déduit également facilement ce théorème du corollaire 23.15 de [**29**].

Voici maintenant la traduction du théorème précédent en termes de théorie de Hodge p-adique.

Théorème 8.1.2. — *Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos tel que $C^\flat = F$, c'est à dire $C = C_y$ pour un $y \in |Y|$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in C$ non tous nuls. Alors, le morphisme*

$$\begin{array}{rcl} \big(B_{F,E}\big)^{\varphi^n=\pi} & \longrightarrow & C \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_y\big(\varphi^i(x)\big) \end{array}$$

est surjectif de noyau un E-espace vectoriel de dimension n, V. De plus, si $t \in B_{F,E}$ désigne la période d'un $\mathcal{O}$-module formel π-divisible de dimension 1 et de hauteur 1 sur $\mathcal{O}_C$ (un groupe de Lubin-Tate), $\operatorname{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\varphi^n(y)] \in \operatorname{Div}^+(Y_{F,E})$, le morphisme $B_{F,E}$-linéaire

$$\begin{array}{rcl} V \otimes_E B_{F,E} & \longrightarrow & \big(B_{F,E}\big)^n \\ v \otimes 1 & \longmapsto & \big(x, \varphi(x), \ldots, \varphi^{n-1}(x)\big) \end{array}$$

est injectif de conoyau annulé par t.

8.1.2. Le cas de l'espace de Drinfeld. — On garde les notations de la section précédente. Soit maintenant D une algèbre à division centrale sur E d'invariant $\frac{1}{n}$. On note $\mathbb{F}_{q^n}$ l'extension de degré n dans $\mathbb{F}_q$ dans $\overline{\mathbb{F}}_q$. Écrivons

$$D = \mathcal{O}_{E_n}[\Pi],$$

$W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q^n}) = E_n|E$ étant l'extension non-ramifiée de degré n et Π une uniformisante de D ; $\Pi^n = \pi$ et $\forall x \in E_n$ on a $\Pi x = \sigma(x)\Pi$. On note $\mathcal{O}_D = \mathcal{O}_{E_n}[\Pi]$ son ordre maximal.

Soit S un $\mathcal{O}_E$-schéma sur lequel p est nilpotent, resp. un $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_E)$-schéma formel. Rappelons que d'après Drinfeld ([**14**]), un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur S est $\mathcal{O}$-module formel π-divisible G sur S muni d'une action de $\mathcal{O}_D$ tel que $\mathrm{Lie}\, G$ soit un $\mathcal{O}_{E_n} \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1. Concrètement, cette dernière condition signifie que localement pour la topologie étale sur S (en fait il suffit de prendre le revêtement $S \otimes_{\mathcal{O}_E} \mathcal{O}_{E_n} \to S$), si

$$\mathrm{Lie}\, G = \bigoplus_{\tau : \mathcal{O}_{E_n} \hookrightarrow \mathcal{O}_S} (\mathrm{Lie}\, G)_\tau$$

où $\mathcal{O}_{E_n} \subset \mathcal{O}_D$ agit sur $(\mathrm{Lie}\, G)_\tau$ via τ, pour tout τ, $(\mathrm{Lie}\, G)_\tau$ est un $\mathcal{O}_S$-module localement libre de rang 1.

Notons $\mathrm{can} : E_n \hookrightarrow W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ le plongement canonique. Soit G un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Son $\mathcal{O}$-module de Dieudonné covariant se décompose en

$$\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i$$

où $\mathcal{O}_{E_n}$ agit sur $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i$ via $\sigma^{-i} : \mathcal{O}_{E_n} \circ \mathrm{can} \to W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$. Relativement à cette graduation du module de Dieudonné on a

$$\deg(V) = \deg(\Pi) = +1.$$

On peut donc associer à un tel G un $\mathcal{O}$-isocristal

$$\Big(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big], V^{-1}\Pi\Big).$$

Supposons maintenant que G soit de $\mathcal{O}$-hauteur n^2, c'est à dire $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$ est un $W_{\mathcal{O}}(\overline{\mathbb{F}}_q)$-module de rang n. Si $M \subset \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$ est un réseau et $\Lambda = \oplus_{i=0}^{n-1} \Pi^i M$ on a

$$n = \dim G = [\Lambda : V\Lambda] = n[V^{-1}\Pi M : M] + \underbrace{[M : \pi M]}_{n}$$

et donc $[V^{-1}\Pi M : M] = 0$. Le point terminal du polygone de Newton de $\big(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)\big[\frac{1}{\pi}\big], V^{-1}\Pi\big)$ est donc 0. De plus,

$$\mathrm{Lie}\, G = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_i / V\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i-1}$$

où chacun des éléments de la graduation est un $\overline{\mathbb{F}}_q$-espace vectoriel de dimension 1. Puisque $\Pi^n = \pi$, qui induit le morphisme nul sur $\mathrm{Lie}\, G$, il existe un indice $i_0 \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que $\Pi.\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_{i_0} = V\mathbb{D}(G)_{i_0}$. Alors, $\Pi^{-i_0}\mathbb{D}(G)_{i_0}$ est un réseau invariant sous $V^{-1}\Pi$ dans $\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0$. De tout cela on déduit que

$$\big(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big], V^{-1}\Pi\big)$$

est un $\mathcal{O}$-isocristal unité i.e. isocline de pente 0. On montre alors que la correspondance

$$G \longmapsto \big(\mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big], V^{-1}\Pi\big)$$

induit une équivalence entre les $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux de hauteur n^2 à isogénies près sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ et les $\mathcal{O}$-isocristaux unité. Il en résulte que la correspondance

$$G \longmapsto \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big]^{V=\Pi}$$

induit une équivalence entre la catégorie des $\mathcal{O}_D$-modules formels spéciaux à isogénie près et les E-espaces vectoriels de dimension n.

Soit maintenant $\mathbb{G}$ un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial de hauteur n^2 sur $\overline{\mathbb{F}}_q$. Notons

$$W = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big]^{V=\Pi},$$

un E-espace vectoriel de dimension n. Soit $\widehat{\Omega}$ le $\mathrm{Spf}(\mathcal{O}_{\widehat{E^{nr}}})$-schéma formel paramétrant les déformations par quasi-isogénies de hauteur 0 de $\mathbb{G}$. Soit $\Omega = \widehat{\Omega}^{an}$ la fibre générique de $\widehat{\Omega}$ comme $\widehat{E^{nr}}$-espace analytique de Berkovich. Soit $\mathbb{P}$ l'espace analytique de Berkovich associé à l'espace projectif $\mathbb{P}(W)_{\widehat{E^{nr}}}$. Il y a alors un morphisme de périodes

$$\breve{\pi} : \Omega \longrightarrow \mathbb{P}.$$

Nous n'aurons besoin de sa définition qu'au niveau des points. Soit donc $K|\widehat{E^{nr}}$ une extension valuée complète et $[(G,\rho)] \in \widehat{\Omega}(\mathcal{O}_K) = \Omega(K)$. Ici, G est un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial sur $\mathcal{O}_K$ et

$$\rho : \mathbb{G} \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K \longrightarrow G \otimes \mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$$

est une quasi-isogénie de hauteur 0. On a une décomposition de l'algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$-extensions vectorielle universelle

$$\mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G)_i$$

où E_n agit sur $\mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G)_i$ via $\mathrm{can} \circ \sigma^{-i}$. On a de même une décomposition de la filtration de Hodge

$$\mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G) = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G)_i \twoheadrightarrow \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}} \mathrm{Lie}(G)_i = \mathrm{Lie}\, G$$

sur laquelle Π agit comme un opérateur homogène de degré $+1$. De plus, ρ induit un isomorphisme gradué

$$\rho_* : \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \otimes_{\widehat{E^{nr}}} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G)\big[\tfrac{1}{\pi}\big]$$

et donc sur la partie homogène de degré 0,

$$\rho_* : W \otimes_E K = \mathbb{D}_{\mathcal{O}}(\mathbb{G})_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big] \otimes_{\widehat{E^{nr}}} K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Lie}\, E_{\mathcal{O}}(G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big].$$

Via ρ_*, la filtration de Hodge de G définit donc un morphisme surjectif

$$W \otimes_E K \twoheadrightarrow (\mathrm{Lie}\, G)_0\big[\tfrac{1}{\pi}\big]$$

et donc un élément de l'espace projectif $\mathbb{P}(K)$. Cet élément est $\breve{\pi}\big([(G,\rho)]\big)$.

Théorème 8.1.3 **([14])**. — *Le morphisme des périodes $\breve{\pi} : \Omega \to \mathbb{P}$ induit un isomorphisme entre Ω et l'ouvert de $\mathbb{P}$*

$$\mathbb{P} \setminus \bigcup_{H \in \check{\mathbb{P}}(W)(E)} H^{an}$$

qui est le complémentaire des hyperplans E-rationnels dans l'espace analytique $\mathbb{P}$ sur le E-espace vectoriel W.

Remarque 8.1.4. — Dans [**47**], Lafaille démontre également que l'image du morphisme de périodes précédent est celle annoncée.

Voici la traduction du théorème précédent en termes de théorie de Hodge p-adique.

Théorème 8.1.5. — *Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos tel que $C^\flat = F$, c'est à dire $C = C_y$ pour un $y \in |Y|$. Soient $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n-1} \in C$ linéairement indépendants sur E. Alors, le morphisme*

$$\begin{array}{rcl} \bigoplus_{i=0}^{n-1} B^{\varphi^n=\pi} & \longrightarrow & C^n \\ (x_0, \ldots, x_{n-1}) & \longmapsto & \Big(\sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \theta_y\big(\varphi^j(x_i)\big)\Big)_{0 \le j \le n-1} \end{array}$$

est surjectif de noyau un E-espace vectoriel de dimension n^2.
Plus précisément, munissons $\bigoplus_{i=0}^{n-1} B^{\varphi^n=\pi}$ de la structure de D-espace vectoriel définie par

$$\Pi.(x_0, \ldots, x_{n-1}) = \big(\varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_{n-1})\big)$$

et pour tout $a \in E_n$, $a.(x_0, \ldots, x_{n-1}) = (ax_0, \ldots, ax_{n-1})$ $E_n = B^{\varphi^n = Id}$. Alors, ce noyau V est un sous-D-espace vectoriel de dimension 1 de $\bigoplus_{i=0}^{n-1} B^{\varphi^n=\pi}$.
De plus, le morphisme naturel

$$\begin{array}{rcl} V \otimes_E B & \longrightarrow & \bigoplus_{i=0}^{n-1} B^n \\ (x_0, \ldots, x_{n-1}) \otimes 1 & \longmapsto & \big(\varphi^j(x_0), \ldots, \varphi^j(x_{n-1})\big)_{0 \le j \le n-1} \end{array}$$

est injectif de conoyau annulé par t^n.

8.2. Fibrés vectoriels

8.2.1. Fibrés en droites. —

8.2.1.1. Classification et cohomologie. — Soit $X = \mathrm{Proj}(P)$ la courbe du chapitre 6.

Définition 8.2.1. — Soit $d \in \mathbb{Z}$. Si $P[d]$ désigne l'algèbre graduée P décalée de d vue comme P-module gradué, on note

$$\mathcal{O}_X(d) = \widetilde{P[d]}$$

comme faisceau de $\mathcal{O}_X$-modules (cf. [**32**] 2.5.3).

Pour tout d, $\mathcal{O}_X(d)$ est un fibré en droites sur X i.e. $\mathcal{O}_X(d)$ est localement libre de rang 1. De plus,

$$\mathcal{O}_X(d) = \mathcal{O}_X(1)^{\otimes d}.$$

Bien que nous ne l'indiquions pas dans la notation, *contrairement à la courbe X qui ne dépend pas, canoniquement, du choix de l'uniformisante π, le fibré $\mathcal{O}_X(1)$ en dépend.* Bien sûr le choix d'une autre uniformisante fournit un fibré isomorphe, mais non canoniquement.

Comme anneau gradué,

$$P = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma(X, \mathcal{O}_X(d))$$

et on peut donc penser à $\mathcal{O}_X(1)$ comme « un fibré très ample ». Un élément $s \in P_d \backslash \{0\}$ définit un diviseur de Cartier $(\mathcal{O}_X(d), s)$. Si $s = \prod_{i=1}^d t_i$ avec $t_i \in P_1$, $V^+(t_i) = \{\infty_i\}$, on a l'égalité de diviseurs de Weil

$$\mathrm{div}(s) = \sum_{i=1}^{d} [\infty_i] \in \mathrm{Div}(X).$$

Soit $t \in P_1 \setminus \{0\}$ et $V^+(t) = \{\infty\}$ de corps résiduel $C = C_y$ où $y \in |Y|$ est tel que $\mathrm{div}(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} [\varphi^n(y)]$. Notons B_{dR}^+ pour $B_{dR,y}^+$. On a $X \setminus \{\infty\} = \mathrm{Spec}(B_e)$ avec $B_e = \left(B[\frac{1}{t}]\right)^{\varphi = Id}$ et $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = B_{dR}^+$ d'uniformisante t. Rappelons (prop. 5.3.2) que les fibrés sur X s'identifient aux couples (M, N) où

— N est un B_{dR}^+-module libre,

— $M \subset N[\frac{1}{t}]$ est un sous-B_e-module libre de même rang que N engendrant le B_{dR}-espace vectoriel $N[\frac{1}{t}]$ (de façon équivalente M est un sous B_e-module libre de $N[\frac{1}{t}]$ tel que $M \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} N[\frac{1}{t}]$).

D'après la proposition 5.3.3, si le fibré $\mathscr{E}$ correspond à la paire (M, N), le complexe de cohomologie $R\Gamma(X, \mathscr{E})$ s'identifie à

$$\begin{array}{ccc} M \oplus N & \longrightarrow & N[\frac{1}{t}] \\ (m, n) & \longmapsto & m - n. \end{array}$$

Le fibré $\mathcal{O}_X(d)$ correspond alors au couple $(B_e, t^{-d} B_{dR}^+)$. Soit $\deg = -v_\infty : B_e \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$. Il y a alors une identification

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = B_e \cap t^{-d} B_{dR}^+ = B_e^{\deg \leq d}$$

via l'isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{\sim} & B_e^{\deg \leq d} \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{t^d}. \end{array}$$

La suite d'inclusions donnée par le cup-produit par $t \in H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$

$$H^0(X, \mathcal{O}_X) \xrightarrow{\times t} H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \xrightarrow{\times t} \dots \; H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) \xrightarrow{\times t} \dots$$

s'identifie alors à la filtration de l'anneau B_e

$$E = B_e^{\deg \leq 0} \subset B_e^{\deg \leq 1} \subset \dots \subset B_e^{\deg \leq d} \subset \dots.$$

En résumé, on a les propriétés suivantes :

1. Il y a un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Pic}(X) \\ d & \longmapsto & \big[\mathcal{O}_X(d)\big] \end{array}$$

   d'inverse donné par le degré

$$\deg : \mathrm{Pic}(X) \xrightarrow{\sim} \mathbb{Z}.$$

2. On a

$$H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = \begin{cases} P_d \text{ si } d \geq 0 \\ 0 \text{ si } d < 0 \end{cases}$$

   qui s'identifie à $B_e^{\deg \leq d}$ après choix d'un point $\infty \in |X|$.

3. On a après choix d'un point $\infty \in |X|$, si $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$ d'uniformisante t,

$$H^1(X, \mathcal{O}_X(d)) = \begin{cases} 0 \text{ si } d \geq 0 \\ B_{dR}^+/(B_{dR}^+.t^d + E) \text{ si } d < 0 \end{cases}$$

8.2.1.2. Comportement via le changement de niveau. — Soit $E'|E$ et

$$\pi_{E'/E} : X_{E'} \longrightarrow X_E.$$

Il y a alors un isomorphisme non canonique (puisqu'il y a un choix d'uniformisante fait pour chacun de ces fibrés en droites)

$$\pi_{E'/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(d) \simeq \mathcal{O}_{X_{E'}}([E' : E]d).$$

Lorsque $E' = E_h = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)^{\varphi_E^h = Id}$ est l'extension non-ramifiée de degré h et que l'on utilise l'uniformisante π_E de E comme uniformisante de E_h pour définir $\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d)$ il y a un isomorphisme

$$\pi_{E_h/E}^* \mathcal{O}_{X_E}(d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_{E_h}}(hd)$$

canonique.

8.2.1.3. Interprétation géométrique de la suite exacte fondamentale. — Soit $d \geq 1$ et $s \in H^0(X, \mathcal{O}_X(d)) = P_d$ non nul. Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X \xrightarrow{\times s} \mathcal{O}_X(d) \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0.$$

où $\mathscr{F}$ est un faisceau cohérent de torsion sur X. Puisque $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$, la suite exacte précédente induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{\times s} P_d \longrightarrow H^0(X, \mathscr{F}) \longrightarrow 0$$

Si $s = \prod_{i=1}^r t_i^{a_i}$ où $t_i \in P_1$, $V^+(t_i) = \{x_i\}$, pour $i \neq j$ on a $x_i \neq x_j$,

$$\mathscr{F} = \bigoplus_{i=1}^r i_{x_i *} \mathcal{O}_{X,x_i}/(t_i^{a_i}),$$

où $i_{x_i} : \{x_i\} \hookrightarrow X$. Si l'on note $B_{dR,i}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X,x_i}$, la suite exacte précédente se récrit donc

$$0 \longrightarrow E.\prod_{i=1}^r t_i^{a_i} \longrightarrow P_d \longrightarrow \bigoplus_{i=1}^r B_{dR,i}^+/(t_i^{a_i}) \longrightarrow 0.$$

Ce n'est rien d'autre que la suite exacte du théorème 6.4.1.

8.2.2. Fibrés de rang supérieur : définitions et premières propriétés. — Soit un entier $h \geq 1$ et E_h l'extension non-ramifiée de degré h de E, $E_h = W_{\mathcal{O}_E}(\mathbb{F}_{q^h})$. On note $\pi_h : X_{E_h} \to X_E$. Dans la définition qui suit on fixe une uniformisante de E. Tous les fibrés que l'on définit dépendent du choix de cette uniformisante (mais un autre choix d'uniformisante donne des fibrés non-canoniquement isomorphes).

Définition 8.2.2. —

1. Pour $d \in \mathbb{Z}$ et $h \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ on note
$$\mathcal{O}_{X_E}(d,h) = \pi_{h*}\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d).$$
2. Pour $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$ avec $(d,h) = 1$ et $h \geq 1$ on note
$$\mathcal{O}_{X_E}(\lambda) = \mathcal{O}_{X_E}(d,h).$$

Puisque le morphisme π_h est étale fini de degré h, $\mathcal{O}_{X_E}(d,h)$ est un fibré de rang h et de degré d. On a l'égalité de pentes

$$\mu\big(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)\big) = \lambda.$$

On a la description suivante en termes de modules gradués. Soit

$$M(d,h) = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} B_E^{\varphi_E^h = \pi^{ih+d}}.$$

C'est un $P_E = \oplus_{i \in \mathbb{N}} B_E^{\varphi_E = \pi^i}$-module gradué. Alors,

$$\mathcal{O}_{X_E}(d,h) = \widetilde{M(d,h)}$$

et

$$M(d,h) = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} H^0\big(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(d,h)\otimes \mathcal{O}_{X_E}(i)\big).$$

Soit $t \in P_{E,1}\setminus\{0\}$, $V^+(t) = \{\infty\}$. Soit $X_E\setminus\{\infty\} = \mathrm{Spec}(B_e)$ avec $B_e = \big(B^+[\frac{1}{t}]\big)^{\varphi_E = Id}$ et $B^+_{dR} = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E,\infty}$. On a alors

$$\pi_h^{-1}(X_E\setminus\{\infty\}) = \mathrm{Spec}\big(B_E[\tfrac{1}{t}]^{\varphi_E^h = Id}\big).$$

En termes de la classification de la proposition 5.3.1, le fibré vectoriel $\mathcal{O}_{X_E}(d,h)$ correspond au triplet (M,N,u) où

— M est le B_e-module libre $B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi_E^h=\pi^d}$

— $N = \big(B^+_{dR}\big)^h$

— on a

$$\begin{array}{rcl} u : B^+[\frac{1}{t}]^{\varphi_E^h=\pi^d}\otimes_{B_e} B_{dR} & \xrightarrow{\sim} & (B_{dR})^r \\ x\otimes 1 & \longrightarrow & (x,\varphi_E(x),\dots,\varphi_E^{(h-1)}(x)). \end{array}$$

Puisque $(X_{E_h})_{h\geq 1}$ est une sphère de Riemann généralisée, les résultats de la proposition 5.6.23 sont disponibles. Nous ne les réécrirons pas. La proposition qui suit est laissée au lecteur, elle ne pose aucun problème.

Proposition 8.2.3. —

1. $H^0(X_E,\mathcal{O}_{X_E}(d,h)) = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ d<0 \\ B_E^{\varphi_E^h=\pi^d} \ \textit{si}\ d\geq 0\end{cases}$
2. *Soit* $t\in P_{E,1}\setminus\{0\}$, $\{\infty\} = V^+(t)$ *et* $B^+_{dR} = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E,\infty}$. *Alors,*

$$H^1(X_E,\mathcal{O}_{X_E}(d,h)) = \begin{cases} 0 \ \textit{si}\ d\geq 0 \\ B^+_{dR}/(t^dB^+_{dR}+E_h) \ \textit{si}\ d<0\end{cases}$$

Remarque 8.2.4. — Si on pense à la courbe X_E comme étant « $Y_E/\varphi^{\mathbb{Z}}$ » alors la tour de courbes $(X_{E_h})_{h\geq 1}$ n'est rien d'autre que la tour de revêtements « $\big(Y_E/\varphi^{h\mathbb{Z}}\big)_{h\geq 1}$.

8.2.3. Lien avec les isocristaux. — Notons $L = W_{\mathcal{O}_E}(\overline{\mathbb{F}}_q)$ muni de son Frobenius σ. Lorsqu'on voudra préciser leur dépendance en E on les notera L_E et σ_E.

Définition 8.2.5. — On note φ-Mod_L la catégorie des isocristaux formés d'un L-espace vectoriel de dimension finie muni d'un isomorphisme σ-linéaire.

Lorsqu'on veut appuyer la dépendance en E on note φ-Mod_{L_E}. Remarquons cependant qu'il s'agit là d'un abus de notation puisque cette catégorie ne dépend pas seulement de L_E mais également de E (si $E'|E$ est non-ramifiée alors $L_E = L_{E'}$).

Si $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_L$ considérons le P-module gradué

$$M(D,\varphi) := \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (D \otimes_L B)^{\varphi=\pi^i}.$$

Si $D = \langle e_1, \cdots, e_h\rangle$ avec $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < h$ et $\varphi(e_h) = \pi^{-d}e_1$ alors $M(D,\varphi) = M(d,h)$ (cf. section précédente). Du théorème de Dieudonné-Manin on déduit le résultat suivant.

Proposition 8.2.6. — *Pour $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_L$ posons*

$$\mathscr{E}(D,\varphi) = \widetilde{M(D,\varphi)}.$$

C'est un fibré vectoriel isomorphe à

$$\bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \mathcal{O}_X(-\lambda)^{m\lambda}$$

où m_λ est la multiplicité de la pente λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de (D,φ).

Cela définit un foncteur compatible au produit tensoriels et aux duaux

$$\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-}Mod_L \longrightarrow Fib_X.$$

On vérifie qu'en les termes de la classification donnée par 5.3.1 le fibré $\mathscr{E}(D,\varphi)$ correspond au couple

$$\big(D \otimes_L B[\tfrac{1}{t}]\big)^{\varphi=Id}, D \otimes_L B^+_{dR}\big).$$

Définition 8.2.7. — Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ nous noterons D_λ l'algèbre à division centrale sur E définie par $D_\lambda = E_h[\Pi]$ si $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h) = 1$, avec $\Pi^h = \pi^d$ et pour tout $x \in E_h$, $\Pi x = \sigma_E(x)\Pi$.

Proposition 8.2.8. — *Il y a un isomorphisme*

$$D_\lambda \xrightarrow{\sim} End(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)).$$

Démonstration. Puisque D_λ s'identifie aux endomorphismes de l'isocristal simple de pente $-\lambda$, d'après la proposition précédente il y un plongement

$$D_\lambda \hookrightarrow \mathrm{End}(\mathcal{O}_X(\lambda)).$$

On a de plus

$$\mathrm{End}(\mathcal{O}_X(\lambda)) = H^0(X, \mathcal{O}_X(\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(\lambda)^\vee).$$

Or, d'après le point (4) de la proposition 5.6.23 on a

$$\mathcal{O}_X(\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(\lambda)^\vee = \mathcal{O}_X(\lambda) \otimes \mathcal{O}_X(-\lambda) \simeq \mathcal{O}_{X_E}^{\oplus h^2}.$$

et donc

$$\dim_E \mathrm{End}(\mathcal{O}_{X_E}(\lambda)) = h^2.$$

□

Soit maintenant $E'|E$ et notons $E'_0|E$ l'extension maximale non-ramifiée de E dans E', de degré f (et donc $\sigma_{E'} = \sigma_E^f$). Il y a deux foncteurs adjoints

$$\varphi\text{-Mod}_{L_E} \rightleftarrows \varphi\text{-Mod}_{L'_E}.$$

La flèche supérieure envoie l'isocristal $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{L_E}$ sur

$$\big(D \otimes_{L_E} L_{E'}, \varphi^f \otimes \sigma_{E'}\big).$$

La flèche inférieure envoie $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{L_{E'}}$ sur l'isocristal « induit »

$$\Big(\bigoplus_{i=0}^{f-1} D \otimes_{L_E, \sigma_E^i} L_E, \xi\Big)$$

où

$$\xi(x_0 \otimes \lambda_0, \cdots, x_{f-1} \otimes \lambda_{f-1}) = \big(\varphi(x_{f-1}) \otimes \sigma_E(\lambda_{f-1}), x_0 \otimes \sigma_E(\lambda_0), \cdots, x_{f-2} \otimes \sigma_E(\lambda_{f-2})\big).$$

On vérifie alors que via le foncteur $\mathscr{E}(-)$ ces deux foncteurs correspondent aux deux flêches

$$\mathrm{Fix}_{X_E} \underset{\pi_{E'|E}{}^*}{\overset{\pi^*_{E'|E}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fib}_{X_{E'}}$$

où $\pi_{E'|E} : X_{E'} \to X_E$.

Remarque 8.2.9. — Si on pense à la courbe X comme étant « $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ » alors le fibré $\mathscr{E}(D, \varphi)$ n'est rien d'autre que

$$(Y \times D)/\varphi^{\mathbb{Z}}.$$

8.2.4. Classification des fibrés : énoncé du théorème. — Le théorème suivant dit que le foncteur précédent

$$\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_L \longrightarrow \mathrm{Fib}_X$$

est essentiellement surjectif. Il induit de plus une équivalence entre la catégorie des isocristaux isoclines de pente $-\lambda$ et les fibrés semi-stables de pente λ.

Théorème 8.2.10. —

1. *Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, les fibrés semi-stables de pente λ sur X sont les fibrés isomorphes à des somme directes finies du fibré $\mathcal{O}_X(\lambda)$.*
2. *Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$, il n'y a sur X, à isomorphisme près, qu'un seul fibré stable de pente λ, $\mathcal{O}_X(\lambda)$. La catégorie abélienne des fibrés semi-stables de pente λ est équivalente à celle des D_λ^{opp}-espaces vectoriels de dimension finie.*
3. *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur X est scindée.*

4. L'application

$$\begin{array}{rcl} \big\{(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}\in\mathbb{Q}^n \mid n\in\mathbb{N},\ \lambda_1\geq\cdots\geq\lambda_n\big\} & \longrightarrow & \big\{\textit{Classes d'isomorphismes de fibrés sur } X\big\} \\ (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) & \longmapsto & \Big[\bigoplus_{i=1}^{n}\mathcal{O}_X(\lambda_i)\Big] \end{array}$$

est une bijection.

Nous allons donner deux preuves de ce théorème dans la suite.

8.3. Preuve du théorème de classification via les périodes des groupes p-divisibles

8.3.1. Modifications de fibrés associées aux groupes p-divisibles. — Soit $(D,\varphi)\in\varphi\text{-Mod}_L$. Fixons $\infty\in|X|$ de corps résiduel C et notons $B_{dR}^+=\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$ d'uniformisante t. Se donner une modification

$$0\longrightarrow\mathscr{E}'\longrightarrow\mathscr{E}(D,\varphi)\longrightarrow\mathscr{F}\longrightarrow 0$$

avec $\mathscr{F}$ cohérent de torsion supporté au point ∞ est équivalent à se donner un B_{dR}^+-réseau

$$\Lambda\subset D\otimes_L B_{dR}^+.$$

Cela résulte de ce qu'il y a une identification canonique

$$\widehat{\mathscr{E}(D,\varphi)}_\infty=D\otimes_L B_{dR}^+.$$

Se donner une telle modification telle que $\mathscr{F}$ soit annulé par t, i.e. de la forme $i_{\infty *}W$ avec W un C-espace vectoriel, est équivalent à se donner une filtration

$$\operatorname{Fil}D_C.$$

En effet, les réseaux Λ satisfaisant

$$tD\otimes B_{dR}^+\subset\Lambda\subset D\otimes B_{dR}^+$$

correspondent aux sous-espaces vectoriels de D_C via $\Lambda\mapsto\Lambda/tD\otimes B_{dR}^+$.

Définition 8.3.1. — Un triplet $(D,\varphi,\operatorname{Fil}D_C)$ est admissible si le fibré modifié associé

$$\mathscr{E}(D,\varphi,\operatorname{Fil}D_C):=\ker\big(\mathscr{E}(D,\varphi)\longrightarrow i_{\infty *}D_C/\operatorname{Fil}D_C\big)$$

est trivial.

Soit maintenant $\mathbb{H}$ un $\mathcal{O}_E$-module π-divisible sur $\overline{\mathbb{F}}_q$ de $\mathcal{O}$-module de Dieudonné covariant (D,φ) et (H,ρ) un point à valeurs dans $\mathcal{O}_C$ de l'espace de Rapoport-Zink $\mathcal{M}$ associé. Cela signifie que H est un $\mathcal{O}_E$-module π-divisible muni d'une quasi-isogénie

$$\rho:\mathbb{H}\otimes_{\overline{\mathbb{F}}_q}\mathcal{O}_C/\pi\mathcal{O}_C\longrightarrow H\otimes_{\mathcal{O}_C}\mathcal{O}_C/\pi\mathcal{O}_C.$$

La filtration de Hodge de l'algèbre de Lie de la $\mathcal{O}$-extension vectorielle universelle de H fournit via ρ une filtration $\mathrm{Fil}\, D_C$. C'est l'image via l'application des périodes de Hodge de Rham de notre point dans l'espace de Rapoport-Zink

$$\pi_{dR} : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{F}.$$

Proposition 8.3.2. — *L'image de l'application des périodes π_{dR} est contenue dans le lieu admissible associé à $(D, \pi^{-1}\varphi)$. Plus précisément, si $\mathrm{Fil}\, D_C$ est la filtration associée à (H, ρ) alors*

$$\mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi, \mathrm{Fil}\, D_C) \simeq V_p(H) \otimes_E \mathcal{O}_X.$$

Démonstration. — L'application des périodes

$$V_p(H) \longrightarrow (D \otimes_L B)^{\varphi=\pi}$$

induit un morphisme

$$V_p(H) \otimes_E \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi).$$

Puisque l'image de l'application des périodes est contenue dans $\mathrm{Fil}\,(D \otimes_L B)^{\varphi=\pi}$ ce morphisme se factorise via $\mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi, \mathrm{Fil}\, D_C)$. L'application des périodes induisant un isomorphisme

$$V_p(H) \otimes_E B[\tfrac{1}{t}] \xrightarrow{\sim} D \otimes_L B[\tfrac{1}{t}]$$

elle induit un isomorphisme

$$\begin{aligned}
\Gamma(X \setminus \{\infty\}, V_p(H) \otimes_E \mathcal{O}_X) = V_p(H) \otimes_E B_e \quad &\xrightarrow{\sim} \quad \big(D \otimes_L B[\tfrac{1}{t}]\big)^{\varphi=\pi} \\
&= \quad \Gamma\big(X \setminus \{\infty\}, \mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi)\big) \\
&= \quad \Gamma\big(X \setminus \{\infty\}, \mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi, \mathrm{Fil}\, D_C)\big).
\end{aligned}$$

Le morphisme de fibrés

$$V_p(H) \otimes_E \mathcal{O}_X \longrightarrow \mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi, \mathrm{Fil}\, D_C)$$

est donc un isomorphisme générique. Afin de montrer que c'est un isomorphisme il suffit donc de montrer que nos deux fibrés ont même degré. Mais,

$$\begin{aligned}
\deg\big(\mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi, \mathrm{Fil}\, D_C)\big) &= \deg\big(\mathscr{E}(D, \pi^{-1}\varphi)\big) - \dim_C D_C/\mathrm{Fil}\, D_C \\
&= -\sum_{\substack{\lambda \in \mathbb{Q} \\ \lambda = \frac{d_\lambda}{h_\lambda},\ (d_\lambda, h_\lambda)=1}} d_\lambda . m_\lambda - \dim H \\
&= \dim \mathbb{H} - \dim H \\
&= 0
\end{aligned}$$

où m_λ est la multiplicité de la pente λ dans l'isocristal $(D, \pi^{-1}\varphi)$. □

8.3.2. Preuve du théorème. — Il suffit de vérifier les points (1) et (2) du théorème 5.6.29. Fixons un point fermé $\infty = V^+(t)$ sur X de corps résiduel C.

Via la proposition 8.3.2, le point (1) résulte immédiatement du théorème 8.1.1 (appliqué pas seulement à E mais à E_h pour tout $h \geq 1$).

Considérons maintenant le point (2). Pour cela commençons par quelques généralités.

8.3.2.1. Classification des modifications minuscules de fibrés. — Soit $\mathscr{C}$ la catégorie des modifications

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

où

— $\mathscr{E}'$ et $\mathscr{E}$ sont des fibrés vectoriels,
— $\mathscr{E}'$ est un fibré trivial, $\mathscr{E}' \simeq \mathcal{O}_X^n$ pour un entier n,
— $\mathscr{F}$ est cohérent de torsion supporté au point ∞, annulé par t (i.e. de la forme $i_{\infty *}W$ avec W un C-espace vectoriel).

Remarquons que puisqu'il n'y a pas de morphismes non nuls d'un tel $\mathscr{F}$ vers un fibré vectoriel, de telles extensions sont rigides. La catégorie $\mathscr{C}$ est donc une sous-catégorie pleine de celle des triplets $(\mathscr{E}', \mathscr{F}, \xi)$ où $\mathscr{E}'$ est un fibré vectoriel trivial, $\mathscr{F}$ est cohérent annulé par t et $\xi \in \mathrm{Ext}^1(\mathscr{F}, \mathscr{E}')$.

Terminologie concernant les torsions à la Tate : On note $E\{1\} = Et$ la droite engendrée par t dans $H^0(X, \mathcal{O}_X(1))$ (le choix du point ∞ sur X détermine seulement cette droite et non t lui-même). Pour un faisceau cohérent $\mathscr{H}$ on note

$$\mathscr{H}\{1\} := \mathscr{H} \otimes_E E\{1\}.$$

Pour tout $d \in \mathbb{Z}$ on note de même $E\{d\} = E\{1\}^{\otimes d}$.

Lemme 8.3.3. — *Le C-espace vectoriel $Ext^1(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X)$ est de dimension 1 engendré par la classe de l'extension*

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_X\{1\} \longrightarrow \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow i_{\infty *}C \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Puisque $\mathcal{H}om(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X)$ est cohérent de torsion

$$H^1(X, \mathcal{H}om(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X)) = 0$$

et donc

$$\mathrm{Ext}^1(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X) = H^0(X, \mathcal{E}xt^1(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X)).$$

On conclue puisque

$$\mathcal{E}xt^1(i_{\infty *}C, \mathcal{O}_X) \simeq i_{\infty *}C.$$

□

On déduit de cela que pour $V \in \mathrm{Vect}_E$ et $W \in \mathrm{Vect}_C$ (espaces vectoriels de dimension finie) on a un isomorphisme

$$\mathrm{Hom}_C(W\{1\}, V_C) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(i_{\infty *}W, V \otimes_E \mathcal{O}_X)$$

qui à un morphisme $u : W\{1\} \to V_C$ associe le tiré en arrière de l'extension

$$0 \longrightarrow \underbrace{V\{-1\} \otimes_E \mathcal{O}_X\{1\}}_{V \otimes_E \mathcal{O}_X} \longrightarrow V\{-1\} \otimes_E \mathcal{O}_X(1) \longrightarrow \underbrace{V\{-1\} \otimes_E i_{\infty *}C}_{i_{\infty *}V_C\{-1\}} \longrightarrow 0$$

par la flêche $i_{\infty *}u\{-1\}$.

Remarquons maintenant que les foncteurs $\mathscr{E}' \mapsto H^0(X, \mathscr{E}')$ et $V \mapsto V \otimes_E \mathcal{O}_X$ induisent une équivalence entre la catégorie des fibrés triviaux et Vect_E. De même $\mathscr{F} \mapsto H^0(X, \mathscr{F})$ et $W \mapsto i_{\infty *}W$ induisent une équivalence entre les faisceaux cohérents annulés par t et Vect_C. De cela on déduit facilement la proposition suivante.

Proposition 8.3.4. — *La catégorie de modifications $\mathscr{C}$ est équivalente à celle des couples (V, W) où $V \in \mathrm{Vect}_E$ et $W\{1\} \subset V_C$ est un sous-C-espace vectoriel.*

Remarquons finalement la chose suivante. Soit (V, W) comme dans la proposition précédente et soit $V' \subset V$ le plus petit sous-espace tel que $W\{1\} \subset V'_C$. Choisissons V'' un supplémentaire de V' dans V. On a alors

$$(V, W) = (V', W) \oplus (V'', 0).$$

Il s'ensuit que la modification associée à (V, W)

$$0 \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

est telle que $\mathscr{E}' \simeq V'' \otimes_E \mathcal{O}_X \oplus \mathscr{E}''$ avec $\mathscr{E}''$ associé à (V', W).

8.3.2.2. Dualité. — Considérons une modification

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

dans la catégorie $\mathscr{C}$ précédente et la modification duale obtenue en appliquant le foncteur

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{O}_X}\big(-, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big).$$

Puisque $D_{\frac{1}{n}} = \mathrm{End}\big(\mathcal{O}_X(\frac{1}{n})\big)$ il s'agit d'une suite exacte de $D_{\frac{1}{n}} \otimes_E \mathcal{O}_X$-modules

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om\big(\mathscr{E}, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big) \longrightarrow \mathcal{H}om\big(\mathscr{E}', \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big) \longrightarrow \mathcal{E}xt^1\big(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big) \longrightarrow 0$$

telle que

$$\mathcal{E}xt^1\big(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big) \simeq \mathscr{F}^\vee \otimes_L N$$

où (N, φ) est l'isocristal simple de pente $-\frac{1}{n}$, $\mathscr{E}(N, \varphi) = \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$ et si $\mathscr{F} = i_{\infty *}W$ alors

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^\vee &= i_{\infty *}W^\vee, \\ W^\vee &= \mathrm{Hom}_{B^+_{dR}}(W, B_{dR}/B^+_{dR}) \\ &= W^*\{-1\} \end{aligned}$$

où W^* est le dual en tant que C-espace vectoriel. On vérifie alors que $\mathcal{E}xt^1\big(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})\big)$ est de la forme $i_{\infty *}M$ où M est un $C \otimes_L D_{\frac{1}{n}}$-module qui est libre de rang $\dim_C W$ i.e.

$$\mathrm{rg}_{C\otimes_L E_n} i_\infty^* \mathcal{E}xt^1\big(\mathscr{F}, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big) = \dim_C i_\infty^* \mathscr{F}.$$

On peut retrouver la modification dont on était partie en redualisant par application du foncteur

$$\mathcal{H}om_{D_{\frac{1}{n}}\otimes \mathcal{O}_X}\big(-, \mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n})\big).$$

On vérifie alors aisément la proposition suivante.

Proposition 8.3.5. — *Le foncteur $\mathcal{H}om(-, \mathcal{O}_X(\frac{1}{n}))$ induit une antiéquivalence entre la catégorie de modifications $\mathscr{C}$ et celle des modifications de fibrés munis d'une action de $D_{\frac{1}{n}}$*

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}' \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

où

- *$\mathscr{G}$ est un $D_{\frac{1}{n}} \otimes_E \mathcal{O}_X$-module isomorphe à une somme de copies $\mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$,*
- *$\mathscr{G}'$ est un $D_{\frac{1}{n}} \otimes_E \mathcal{O}_X$-module localement libre,*
- *$\mathscr{H}$ est cohérent annulé par t.*

Dans cette équivalence, si $0 \to \mathscr{E}' \to \mathscr{E} \to \mathscr{F} \to 0$ s'envoie sur $0 \to \mathscr{G}' \to \mathscr{G} \to \mathscr{H} \to 0$ on a

- $$rg_{E_n \otimes_E C}\, i_\infty^* \mathscr{H} = \dim_C i_\infty^* \mathscr{F}.$$
- *Si la première modification correspond au couple (V, W) via l'équivalence de la proposition 8.3.4, l'application E-linéaire*

  $$Hom_{D_{\frac{1}{n}}}\big(\mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n}), \mathscr{G}\big) \longrightarrow Hom_{D_{\frac{1}{n}}}\big(\mathcal{O}_X(\tfrac{1}{n}), \mathscr{H}\big)$$

  s'identifie à la composée

  $$V^* \hookrightarrow V_C^* \twoheadrightarrow W^\vee = W^*\{-1\}.$$

8.3.2.3. Fin de la preuve du théorème 8.2.10. — .

On doit prouver le point (2) de 5.6.29. Soit donc

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

avec $\mathscr{E}'$ un fibré trivial de rang n et $\mathscr{F}$ de degré 1 supporté en ∞. Soit (V, W) le couple associé (prop. 8.3.4), $\mathscr{E}' = V \otimes \mathcal{O}_X$ et $\mathscr{F} = i_{\infty *}W$. Comme on l'a vu à la fin de la section 8.3.2.1 on peut supposer que pour tout sous-espace propre V' de V, $W \not\subseteq V'_C$. Cela se traduit de façon duale en la condition : l'application linéaire

$$V^* \longrightarrow W^*$$

est injective i.e. définit un point de l'espace de Drinfeld $\Omega \subset \mathbb{P}(V^*)$. Soit n la dimension de V et

$$0 \longrightarrow \mathscr{G}' \longrightarrow \mathscr{G} \longrightarrow \mathscr{H} \longrightarrow 0$$

la modification duale de $D_{\frac{1}{n}}$-fibrés associée (prop. 8.3.5). On a donc $\mathscr{G} = V^* \otimes_E \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$.
Soit (N, φ) un isocristal simple de pente $1 - \frac{1}{n}$, $\mathscr{E}(N, \pi^{-1}\varphi) = \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$. On fixe une identification $D_{\frac{1}{n}} = \mathrm{End}(N, \varphi)$. Alors,

$$(V^* \otimes_E N, Id \otimes \varphi)$$

est l'isocristal d'un $\mathcal{O}_D$-module formel spécial au sens de Drinfeld (cf. sec. 8.1.2). Avec les notations de la section 8.1.2,

$$(V^* \otimes_E N)_0^{V=\Pi} = V^* \otimes_E N_0^{V=\Pi}$$

et

$$\begin{aligned}(W^*\{-1\} \otimes_L N)_0 &= W^*\{-1\} \otimes_L N_0 \\ &= W^*\{-1\} \otimes_E N_0^{V=\Pi}.\end{aligned}$$

L'application

$$(V^* \otimes_E N)_0^{V=\Pi} \longrightarrow (W^*\{-1\} \otimes_L N)_0$$

induite par $\mathscr{G} \to \mathscr{H}$ est l'application $V^* \to W^*\{-1\}$ tordue par $- \otimes_E N_0^{V=\Pi}$. Elle est donc injective et définit un élément de l'espace de Drinfeld dans $\mathbb{P}(V^* \otimes_E N_0^{V=\Pi})$.

À partir de là on conclut en appliquant le théorème 8.1.3 et la proposition 8.3.2 que $\mathscr{G}' \simeq D_{\frac{1}{n}} \otimes \mathcal{O}_X$ et donc $\mathscr{E} \simeq \mathcal{O}_X(\frac{1}{n})$. □

8.3.3. Interprétation en termes de périodes de Hodge-Tate et de l'isomorphisme entre les deux tours. — Soit $(D, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_L$ un isocristal de hauteur n. Considérons

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{E}' \longrightarrow \mathscr{F} \longrightarrow 0$$

une modification de fibrés où $\mathscr{F}$ est cohérent annulé par t (i.e. dans la catégorie $\mathscr{C}$ de la section 8.3.2.1). Notons la ξ. Supposons de plus fixés deux isomorphismes

$$\begin{aligned}\eta_1 : \mathcal{O}_X^n &\xrightarrow{\sim} \mathscr{E}' \\ \eta_2 : \mathscr{E}(D, \varphi) &\xrightarrow{\sim} \mathscr{E}.\end{aligned}$$

La modification est donnée par le sous-C-espace vectoriel

$$i_\infty^* \mathscr{E}' \subset i_\infty^* \mathscr{E}$$

et via η_2,

$$i_\infty^* \eta_2 : D_C \xrightarrow{\sim} i_\infty^* \mathscr{E}.$$

Appelons période de Hodge de Rham le point associé de la Grassmanienne associée à D_C,

$$\pi_{dR}(\xi, \eta_2) = \big((i_\infty^* \eta_2)^{-1} i_\infty^* \mathscr{E}' \subset D_C\big).$$

Plaçons nous maintenant du point de vue de η_1. D'après la proposition 8.3.4 ξ est donnée par un couple (V, W) avec $W\{1\} \subset V_C$. Se donner η_1 revient alors à se donner un isomorphisme

$$E^n \xrightarrow{\sim} V$$

et $W\{1\}$ détermine alors un sous-espace de C^n que l'on appelle périodes de Hodge-Tate de (ξ, η_1),

$$\pi_{HT}(\xi, \eta_1) = \big(W\{1\} \subset V_C \simeq C^n\big).$$

Supposons maintenant que (D, φ) soit le module de Dieudonné covariant de $\mathbb{H}$ et soit (H, ρ) un point de l'espace de Rapoport-Zink associé en niveau infini i.e. on suppose fixé un isomorphisme

$$E^n \xrightarrow{\sim} V_p(H).$$

On dispose alors de la modification ξ fournie par la proposition 8.3.2. Les rigidifications η et ρ définissent un triplet (ξ, η_1, η_2) comme précédemment. Alors, $\pi_{dR}(\xi, \eta_2)$ est l'image de (H, ρ) par l'application des périodes de Hodge de Rham ([**54**] chap. V) et $\pi_{HT}(\xi, \eta_1)$ est son image par l'application des périodes de Hodge-Tate. En d'autres termes, l'inclusion $W\{1\} \subset V_p(H)_C$ est la flêche de droite dans la suite exacte de Hodge-Tate

$$0 \longrightarrow \omega_H^*\left[\tfrac{1}{\pi}\right]\{1\} \longrightarrow V_p(H)_C \xrightarrow{\alpha_H} \omega_{H^\vee}\left[\tfrac{1}{\pi}\right] \longrightarrow 0.$$

Dans le cas particulier de l'espace de Lubin-Tate, via l'isomorphisme entre les tours jumelles ([**17**], [**18**]), les deux modifications de fibrés se correspondent via la dualité de la proposition 8.3.5.

8.4. Preuve via les espaces de Banach-Colmez

8.4.1. Espaces de Banach-Colmez. — Soit $C|E$ un corps valué complet algébriquement clos. Colmez a construit dans [**12**] et [**13**] une catégorie abélienne que nous noterons $\mathcal{BC}$ et qu'il appelle espaces de Banach de dimension finie. Cette catégorie est munie d'un foncteur exact fidèle

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{BC} & \longrightarrow & \text{Banach} \\ X & \longmapsto & X(C) \end{array}$$

vers la catégorie des E-espaces de Banach. Notons Vect_C, resp. Vect_E, la catégorie des C-espaces vectoriels, resp. des E-e.v., de dimension finie. Cette catégorie est munie de deux foncteurs pleinement fidèles exacts

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_C & \longrightarrow & \mathcal{BC} \\ W & \longmapsto & W^{an} \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}_E & \longrightarrow & \mathcal{BC} \\ V & \longmapsto & V^{\text{ét}} \end{array}$$

tels que composés avec le foncteur de $\mathcal{BC}$ vers les espaces de Banach on retoruve les plongements canoniques $\mathrm{Vect}_C \hookrightarrow \mathrm{Banach}$, $\mathrm{Vect}_{\mathbb{Q}_p} \hookrightarrow \mathrm{Banach}$. En d'autres termes, on a des identifications canoniques $W^{an}(C) = W$ et $V^{\text{ét}}(C) = V$. De plus, pour tout $X \in \mathcal{BC}$, il existe $Y \in \mathcal{BC}$ s'écrivant comme une extension

$$0 \longrightarrow V^{\text{ét}} \longrightarrow Y \longrightarrow W^{an} \longrightarrow 0$$

et un sous-$\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension finie $V' \subset Y(C)$ tel que $X \simeq Y/V'^{\text{ét}}$. Colmez a alors démontré qu'il existe deux fonctions additives

$$\begin{cases} \dim : \mathcal{BC} \longrightarrow \mathbb{N} \\ \mathrm{ht} \ : \mathcal{BC} \longrightarrow \mathbb{Z} \end{cases}$$

caractérisées par les propriétés

$$\dim W^{an} = \dim_C W, \quad \dim V^{\text{ét}} = 0$$

et

$$\mathrm{ht}\, W^{an} = 0, \quad \mathrm{ht}\, V^{\text{ét}} = \dim_{\mathbb{Q}_p} V.$$

On a de plus que $\mathrm{Vect}_E = \{X \in \mathcal{BC} \mid \dim X = 0\}$.

En fait, le plongement $\mathrm{Vect}_C \hookrightarrow \mathcal{BC}$ s'étend en un plongement de la catégorie des B_{dR}^+-modules de longueur finie dans $\mathcal{BC}$, Vect_C s'identifiant aux B_{dR}^+-modules de longueur finie annulés par t.

Pour $d, h \in \mathbb{N}$, il y a un espace de Banach-Colmez $X(d,h) \in \mathcal{BC}$ tel que

$$X(d,h)(C) = B_E^{\varphi^h = \pi^d}.$$

Il est de dimension d et de hauteur h. Du point de vue de Colmez, les espaces de Banach-Colmez sont des foncteurs de la catégorie des C-algèbres sympatiques vers les E-espaces de Banach. Cependant dans [**52**], Plût développe une théorie des espaces de Banach-Colmez équivalente à celle de Colmez dans laquelle certains de ces espaces (ceux qui sont extension d'un C-espace vectoriel de dimension finie par un E-espace vectoriel de dimension finie) possèdent un faisceau structural. Plus précisément, ce sont des E-espace vectoriel spectraux au sens de la section 4.6.5. De ce point de vue, lorsque $0 < d \leq h$, l'espace de Banach-Colmez $X(d,h)$ précédent n'est alors rien d'autre que le E-espace vectoriel spectral $\widetilde{X}(\mathcal{G}_{d,h})^{an} \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}} C$ défini dans la section 4.6.6 où $\mathcal{G}_{d,h}$ est le $\mathcal{O}$-module formel défini dans la section 4.3.2. Le choix d'un relèvement $\widetilde{\mathcal{G}}$ de $\mathcal{G}_{d,h}$ à $\mathcal{O}_C$ satisfaisant l'hypothèse de la section 4.6.6 (l'existence d'une quasi-isogénie ρ, cf. 4.6.6) induit un isomorphisme de E-espaces vectoriels spectraux

$$\widetilde{X}(\mathcal{G}_{d,h})^{an} \hat{\otimes}_{W_{\mathcal{O}}(k)_{\mathbb{Q}}} C \simeq X(\widetilde{\mathcal{G}}^{rig})$$

et une présentation comme extension (cf. section 4.6.7.2)

$$0 \longrightarrow V_\pi(\widetilde{\mathcal{G}})^{\text{ét}} \longrightarrow X(\widetilde{\mathcal{G}}^{rig}) \longrightarrow \mathrm{Lie}\, \widetilde{\mathcal{G}} \otimes \mathbb{G}_a^{an} \longrightarrow 0.$$

8.4.2. Preuve du théorème 8.2.10. — Voyons maintenant comment démontrer le théorème 8.2.10 en utilisant les espaces de Banach-Colmez. On utilise directement le critère donné par le théorème 5.6.26. Soit

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(-\tfrac{1}{n}) \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathcal{O}_{X_E}(1) \longrightarrow 0$$

une suite exacte. La classe de l'extension précédente vit dans

$$H^1(X, \mathcal{O}_{X_E}(-1-\tfrac{1}{n})) = H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n-1)).$$

Soit $\xi \in H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n-1))$ cette classe. Il s'agit alors de vérifier que le noyau du morphisme composé

$$H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(1)) \xrightarrow{\pi_n^*} H^0(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(n)) \xrightarrow{-\cup\xi} H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-1))$$

est non nul où $\pi_n : X_{E_n} \to X_E$. Soit $t \in P_{E,\pi_E,1} \setminus \{0\}$, $\{\infty\} = V^+(t)$, $B_{dR}^+ = \widehat{\mathcal{O}}_{X_E,\infty}$. Il y a des identifications

$$\begin{cases} H^0(X_E, \mathcal{O}_{X_E}(1)) = (B_E^+)^{\varphi_{\mathscr{E}}=\pi_E} \\ H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-1)) = C/E_n \\ H^1(X_{E_n}, \mathcal{O}_{X_{E_n}}(-n-1)) = B_{dR}^+/(t^{n+1}B_{dR}^+ + E_n). \end{cases}$$

Soit $x \in B_{dR}^+/t^{n+1}B_{dR}^+$ induisant ξ lorsqu'on le réduit modulo E_n. Le morphisme précédent s'identifie alors au morphisme composé

$$(B_E^+)^{\varphi_E=\pi_E} \hookrightarrow (B_E^+)^{\varphi_E^n=\pi_E^n} \hookrightarrow B_{dR}^+/t^{n+1}B_{dR}^+ \xrightarrow{\times x} B_{dR}^+/t^{n+1}B_{dR}^+ \longrightarrow \underbrace{(B_{dR}^+/t^{n+1}B_{dR}^+)/(B_E^+)^{\varphi_E^n=\pi_E^n}}_{\simeq C/E_n}.$$

Il s'agit donc d'un morphisme d'espaces de Banach induit par un morphisme d'espaces Banach-Colmez

$$u : X(1,1) \longrightarrow C^{an}/E_n^{\text{ét}}.$$

Si u était injectif, puisque $\dim X(1,1) = \dim C^{an}/E_n^{\text{ét}} = 1$, on aurait

$$\dim \operatorname{coker}(u) = 0$$

et donc $\operatorname{coker} u \in \operatorname{Vect}_E$. Or, $\operatorname{Hom}(C^{an}, E^{\text{ét}}) = 0$, et l'épimorphisme composé

$$C^{an} \twoheadrightarrow C^{an}/E^{\text{ét}} \twoheadrightarrow \operatorname{coker}(u)$$

serait donc nul. Cela impliquerait que $\operatorname{coker}(u) = 0$ et donc, u serait un isomorphisme. Puisque $\operatorname{ht} X(1,1) = 1$ et $\operatorname{ht} C/E_n = -n$, cela est impossible si $n > 1$. Si $n = 1$, il faut utiliser le fait que $\operatorname{Hom}(C^{an}, X(1,1)) = 0$ pour conclure que l'on n'a pas $X(1,1) \simeq C^{an}/E^{\text{ét}}$.

8.5. Classification des fibrés sur $\overline{E}$

Soit $\overline{E}$ une clôture algébrique de E. On note $X_{\overline{E}} := X_E \otimes_E \overline{E}$ et $\pi_{\overline{E}/E} : X_{\overline{E}} \to X_E$. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ notons

$$\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}\langle\lambda\rangle = \pi^*_{\overline{E}|E_h}\big(\mathcal{O}_{X_{E_h}}(h\lambda)\big), \quad h \gg 1,$$

un fibré en droites sur $X_{\overline{E}}$. Du point de vue des notations, on prendra garde que $\pi^*_{\overline{E}|E}\mathcal{O}_{X_E}\langle\lambda\rangle$ n'est pas $\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda)$ mais une somme directe de copies de $\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda)$.

Du théorème de classification 8.2.10 on déduit le résultat suivant dont l'énoncé ressemble fortement au théorème de classification des fibrés sur $\mathbb{P}^1$.

Théorème 8.5.1. — *Tout fibré sur $X_{\overline{E}}$ est somme directe de fibrés en droites. Il y a une bijection*

$$\big\{(\lambda_1, \cdots, \lambda_n) \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n\big\} \xrightarrow{\sim} Fib_{X_{\overline{E}}}/\sim .$$

qui à $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ associe la classe d'isomorphisme de

$$\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}\langle\lambda_i\rangle.$$

Remarque 8.5.2. — Dans le théorème précédent on peut remplacer $\overline{E}$ par n'importe quelle extension algébrique de E contenant une $\widehat{\mathbb{Z}}$-extension.

8.6. Simple connexité géométrique de la courbe

Du théorème de classification des fibrés on va déduire le résultat suivant.

Théorème 8.6.1. — *Le schéma $X_{\overline{E}}$ est simplement connexe.*

Démonstration. — Soit $f : Y \to X_{\overline{E}}$ un revêtement étale fini. Notons $\mathscr{E} = f_*\mathcal{O}_Y$. D'après le théorème 8.5.1

$$\mathscr{E} \simeq \bigoplus_{i \in I} \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda_i).$$

De la proposition 5.6.8 on tire

$$\sum_{i \in I} \lambda_i = 0.$$

Supposons par l'absurde qu'il existe un indice i tel que $\lambda_i \neq 0$. On peut alors supposer $\lambda_i > 0$. La loi de $\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}$-algèbre de $\mathscr{E}$ est donnée par un morphisme $\mathscr{E} \otimes \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ et donc des morphismes

$$m_{i,j,k} : \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda_i + \lambda_j) = \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda_i) \otimes \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda_j) \longrightarrow \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\lambda_k), \quad i, j, k \in I.$$

Soit $n \geq 1$ tel que pour tout $j \in I$, $n\lambda_i > \lambda_j$. La multiplication de n-éléments de $f_*\mathcal{O}_Y$ est donnée par un morphisme de fibrés $\mathscr{E}^{\otimes n} \to \mathscr{E}$. Puisque $\mathrm{Hom}(\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\mu), \mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}(\mu')) = 0$ dès que $\mu > \mu'$, ce morphisme est nul sur le facteur direct $\mathcal{O}^{\otimes n}_{X_{\overline{E}}}$. C'est en contradiction avec le fait que l'algèbre $f_*\mathcal{O}_Y$ est réduite.

Le fibré $\mathscr{E}$ est donc trivial. Via l'équivalence de catégories tensorielles entre fibrés triviaux sur $X_{\overline{E}}$ et $\overline{E}$-espaces vectoriels de dimension finis, la $\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}}$-algèbre $f_*\mathcal{O}_Y$ est donc de la forme

$$\mathcal{O}_{X_{\overline{E}}} \otimes_{\overline{E}} A$$

où

$$A = H^0(X_{\overline{E}}, \mathscr{E}) = H^0(Y, \mathcal{O}_Y)$$

est une $\overline{E}$-algèbre finie. Puisque Y est étale au dessus de $X_{\overline{E}}$, A est nécessairement étale. On en déduit le résultat. □

Remarque 8.6.2. — La démonstration précédente donne une preuve de la simple connexité géométrique de $\mathbb{P}^1$ qui n'utilise pas le calcul différentiel. Les preuves « classiques » disponibles dans la littérature de la simple connexité de $\mathbb{P}^1$ utilisent la formule de Riemann-Hurwitz couplée à la classification des courbes de genre 0. La preuve précédente ne fait pas intervenir les différentielles de Kähler Ω^1 (la notion de morphisme étale fini pouvant elle même se définir sans recours à celles-ci en utilisant la forme quadratique trace).

CHAPITRE 9

CLASSIFICATION DES FIBRÉS : LE CAS F PARFAIT

Introduction

On poursuit la classification des fibrés mais en supposant cette fois-ci que le corps F n'est plus algébriquement clos. Pour cela on étudie la descente galoisienne des fibrés relativement au morphisme $X_{\widehat{\overline{F}}} \to X_F$. On montre en utilisant des techniques du type théorie de Sen que les $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$-équivariants sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$ (l'action de ce groupe de Galois étant supposée continue en un sens que nous précisons) descendent en des fibrés sur X_F. Cela nous donne une classification des fibrés (théo. 9.4.3) en termes monodromiques. On obtient par exemple un résultat du type Narasimhan-Seshadri : la catégorie abélienne des fibrés semi-stables de pente 0 est équivalente à celle des représentations de $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$ continues à valeurs dans un E-espace vectoriel de dimension finie.

Dans ce chapitre on suppose que F est parfait quelconque. On note $\overline{F}$ une clôture algébrique de F et $G_F = \mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$.

9.1. Fibrés équivariants

9.1.1. Définition. — Rappelons (6.7 pour le cas F algébriquement clos mais il en est de même pour F quelconque) que l'on dispose d'un morphisme de ind-schémas φ-invariant

$$u : \varinjlim_{I} \mathrm{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$. Plus précisément, si $t \in B^{\varphi=\pi}$ est non nul l'inclusion $B[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id} \subset B_I[\frac{1}{t}]$ induit un morphisme

$$\mathrm{Spec}(B_I[\tfrac{1}{t}]) \longrightarrow \mathrm{Spec}(B[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id}) = D^+(t).$$

Lorsque t varie cela définit le morphisme annoncé $u : \mathrm{Spec}(B_I) \to X$ par recollement.

Si $\mathscr{E}$ est un faisceau cohérent sur X on peut donc lui associer

$$\mathscr{E}^{an} := u^*\mathscr{E} = (M_I)_I$$

qui est une collection de B_I-modules de type fini lorsque I varie munie d'isomorphismes de compatibilité pour $I \subset J$

$$M_J \otimes_{B_J} B_I \xrightarrow{\sim} M_I$$

et d'une structure φ-équivariante

$$M_I \otimes_{B_I,\varphi} B_{\varphi(I)} \xrightarrow{\sim} M_{\varphi(I)},$$

le tout satisfaisant des conditions de compatibilité évidentes. Soit t comme précédemment, $\{\infty\} = V^+(t)$, $y \in |Y|$ tel que $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\varphi^n(y)]$ et $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi=\pi}$. Pour tout entier n on a une identification $\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} \xrightarrow{\sim} B^+_{dR,\varphi^n(y)}$. Si le fibré vectoriel $\mathscr{E}$ correspond au couple (M_e, M_{dR}) où

$$\begin{aligned} M_e &= \Gamma(X \setminus \{\infty\}, \mathscr{E}) \\ M_{dR} &= \widehat{\mathscr{E}}_\infty \end{aligned}$$

avec $M_e \subset M_{dR}[\frac{1}{t}]$, alors

$$M_I = \big(M_e \otimes_{B_e} B_I[\tfrac{1}{t}]\big) \cap \prod_{\substack{n\in\mathbb{Z} \\ \varphi^n(y)\in|Y_I|}} M_{dR} \otimes_{\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}} B^+_{dR,\varphi^n(y)}.$$

Cette formule résulte de la description des B_I-modules libres par recollement des $B_I[\frac{1}{t}]$-modules libres avec des modules libres sur le complété t-adique de B_I.

Soit maintenant H un sous-groupe profini du groupe des automorphismes de $F|\mathbb{F}_q$. Cela signifie que H agit isométriquement sur F, trivialement sur $\mathbb{F}_q$ et que de plus pour tout idéal principal $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$, l'action de H sur $\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$ est discrète i.e. se factorise par un sous-groupe ouvert de H. Un tel groupe H agit alors naturellement sur X. Par convention on choisit de le faire agir à gauche sur X (i.e. l'action de $\sigma \in H$ sur X est induite par l'action de σ^{-1} sur les différentes algèbres intervenant dans la définition de la courbe).

Rappelons que puisque les anneaux B_I sont des algèbres de Banach noethériennes tout B_I-module de type fini est canoniquement muni d'une structure de B_I-module de Banach.

Définition 9.1.1. — Un faisceau cohérent H-équivariant sur X est un faisceau cohérent muni d'une action de H compatible à celle sur X, c'est à dire d'isomorphismes

$$c_\sigma : \sigma^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}, \quad \sigma \in H$$

satisfaisant la condition de cocycle

$$c_{\sigma\tau} = c_\tau \circ \tau^* c_\sigma,$$

telle que si $\mathscr{E}^{an} = (M_I)_I$, pour tout I l'action semi-linéaire de H sur le B_I-module de Banach M_I soit continue. On note

$$\mathrm{Coh}_X^H$$

la catégorie des fibrés cohérents H-équivariants.

9.1.2. Deux critères simples de continuité de l'action. —

9.1.2.1. Au point générique. — Dans le cas des fibrés vectoriels on dispose du critère simple suivant pour la continuité de l'action dans la définition 9.1.1.

Munissons le corps des fonctions rationnelles $E(X)$ de la famille de normes de Gauss $(|.|_\rho)_{\rho\in]0,1[}$ via $E(X) \subset \mathrm{Frac}(B)$. Puisque $E(X) \subset \mathrm{Frac}(B)^{\varphi=Id}$ (et il y a même égalité), la topologie définie par cette famille de normes de Gauss est la même que celle définie par la norme

$$\sup_{\rho\in]\rho_0^q,\rho_0]} |.|_\rho.$$

Cela fait de $E(X)$ une E-algèbre topologique dont la topologie est définie par une norme. On munit tout $E(X)$-espace vectoriel topologique de la topologie produit via le choix d'une base (on vérifie aussitôt que la topologie ainsi définie ne dépend pas du choix d'une telle base).

Proposition 9.1.2. — *Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X muni d'une action de H compatible à celle sur X. Cette action est continue au sens de 9.1.1 si et seulement si l'action semi-linéaire de H sur $\mathscr{E}_\eta$ et continue.*

Démonstration. — Si $\mathscr{E}^{an} = (M_I)_I$ on a

$$\mathscr{E}_\eta \otimes_{E(X)} \mathrm{Frac}(B_I) = M_I \otimes_{B_I} \mathrm{Frac}(B_I).$$

De plus les inclusions $E(X) \subset \mathrm{Frac}(B_I)$ et $B_I \subset \mathrm{Frac}(B_I)$ sont isométriques pour la famille de normes $(|.|_\rho)_{\rho\in I}$.Le résultat s'en déduit. □

9.1.2.2. En un point fermé H-invariant. — Pour tout $y \in |Y|$, $k \geq 1$ et I compact tel que $y \in |Y_I|$ la surjection

$$B_I \longrightarrow B_{dR,y}^+/\mathrm{Fil}^k B_{dR,y}^+ = B_I/\xi^k B_I, \quad y = (\xi)$$

définit une structure de E-algèbre de Banach sur $B_{dR,y}^+/\mathrm{Fil}^k B_{dR,y}^+$ via la topologie quotient (puisque l'idéal $B_I\xi^k$ est fermé). Cette topologie de dépend pas du choix de I tel $y \in |Y_I|$. En effet, si $I \subset J$ le morphisme continu $B_J/\xi^k \to B_I/\xi^k$ étant une bijection c'est un homéomorphisme d'après le théorème de l'application ouverte de Banach. Lorsque $k = 1$ cette topologie est la topologie de la valeur absolue $|.|_y$ sur le corps résiduel K_y. Écrivant

$$B_{dR,y}^+ = \varprojlim_{k\geq 0} B_{dR,y}^+/\mathrm{Fil}^k B_{dR,y}^+$$

cela munit $B_{dR,y}^+$ d'une structure de E-algèbre de Fréchet.

Proposition 9.1.3. — *Supposons qu'il existe un point $\infty = V^+(t) \in |X|$, $t \in B^{\varphi=\pi}$, stable sous l'action de H. Soit $\mathscr{E}$ un fibré vectoriel sur X muni d'une action de H compatible à celle sur X. Cette action est continue, i.e. définit une structure de fibré H-équivariant au sens de 9.1.1, si et seulement si l'action semi-linéaire de H sur $\widehat{\mathscr{E}}_\infty$ est continue.*

Démonstration. — Si $\mathrm{div}(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}}[\varphi^n(y)]$ et $\mathscr{E}^{an} = (M_I)_I$ alors $\widehat{\mathscr{E}}_\infty = \widehat{M}_{I,y}$ (complété ξ-adique si $y = (\xi)$) dès que $y \in |Y_I|$. Il est donc clair que si l'action de H est continue sur M_I avec $y \in |Y_I|$ alors l'action sur $\widehat{\mathscr{E}}_\infty$ l'est également.
Réciproquement, supposons que l'action de H sur $\widehat{\mathscr{E}}_\infty$ soit continue. Puisque l'inclusion $B_{F,I} \subset B_{\widehat{\overline{F}},I}$ est isométrique, afin de montrer que l'action sur M_I est continue il suffit de le montrer pour $M_I \otimes_{B_{F,I}} B_{\widehat{\overline{F}},I}$. Quitte à remplacer F par $\widehat{\overline{F}}$ et $\mathscr{E}$ par son image réciproque sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$ on peut supposer F algébriquement clos. Soit (M_e, M_{dR}) le couple associé à $\mathscr{E}$, $M_e \subset M_{dR}[\frac{1}{t}]$. Fixons une base $\epsilon_1, \cdots, \epsilon_n$ de M_e (puisque F est algébriquement clos, M_e est un module libre). L'action semi-linéaire de H sur M_e stabilise le réseau $M_{dR} \subset M_e \otimes_{B_e} B_{dR}$. Il existe donc un entier k tel que si $\deg = -v_\infty : B_e \to \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$ on ait

$$\sigma(\epsilon_i) \in B_e^{\deg\leq k}\epsilon_1 \oplus \cdots \oplus B_e^{\deg\leq k}\epsilon_n, \quad 1 \leq i \leq n, \ \sigma \in H.$$

On a

$$B_e^{\deg\leq k} = t^{-k}B^{\varphi=\pi^k}.$$

Rappelons que $B^{\varphi=\pi^k}$ est muni de sa topologie de Banach définie par $(|.|_\rho)_{\rho\in]0,1[}$ et donc l'inclusion $B^{\varphi=\pi^k} \hookrightarrow B_I$ est continue. On vérifie alors qu'il suffit de vérifier que pour $l > k$ via l'inclusion

$$B^{\varphi=\pi^k} \hookrightarrow B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^l B_{dR}^+$$

la topologie induite par $B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^l B_{dR}^+$ sur $B^{\varphi=\pi^k}$ coïncide avec sa topologie de Banach précédente. Il y a une suite exacte (utiliser F algébriquement clos)

$$0 \longrightarrow E \xrightarrow{u} B^{\varphi=\pi^k} \oplus B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^{l-k}B_{dR}^+ \xrightarrow{v} B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^l B_{dR}^+ \longrightarrow 0$$

où $u(\lambda) = (\lambda t^k, -\lambda)$ et $v(x, y \bmod \mathrm{Fil}^{l-k}) = x + t^k y \bmod \mathrm{Fil}^l$. Les applications u et v sont continues. Puisque v est surjective, d'après le théorème de l'application ouverte, cela identifie l'espace de Banach $B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^l B_{dR}^+$ au quotient d'espaces de Banach $\mathrm{coker}(u)$. Il s'agit donc de voir que l'inclusion

$$B^{\varphi=\pi^k} \oplus (0) \hookrightarrow \mathrm{coker} u$$

est stricte i.e. la topologie induite est celle de $B^{\varphi=\pi^k}$. Mais si V est un espace de Banach et $W, W' \subset V$ sont des sous-espaces fermés satisfaisant $W \cap W' = (0)$ et $W \oplus W' \subset V$ est fermé (ce qui est automatiquement le cas si W' est de dimension finie) alors l'inclusion $W \subset V/W'$ est stricte. $\square$

9.1.3. Équivariance de la filtration de Harder-Narasimhan. — L'un des points fondamentaux que nous utiliserons dans la suite est le suivant.

Proposition 9.1.4. — *Pour $\mathscr{E} \in Fib_X^H$, la filtration de Harder-Narasimhan du fibré sous-jacent à $\mathscr{E}$ est invariante sous l'action de H et est donc une filtration par des sous-fibrés H-équivariants.*

Démonstration. — Cela résulte de l'unicité de la filtration de Harder-Narasimhan puisque si $\mathscr{F} \in \mathrm{Fib}_X$ et $\sigma \in H$ alors

$$\mu(\sigma^* \mathscr{F}) = \mu(\mathscr{F}).$$

□

Cette propriété sera utilisée de nombreuses fois dans la suite.

9.1.4. Torsion par un 1-cocycle. — Soit $\underline{\mathscr{E}}$ un fibré H-équivariant sur X de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$. Munissons le groupe de $\mathrm{Aut}(\mathscr{E})$ de la topologie induite par $\mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \subset \mathrm{GL}(\mathscr{E}_\eta)$. Si $\mathscr{E}^{an} = (M_I)_I$ alors il s'agit de la topologie induite par le plongement $\mathrm{Aut}(\mathscr{E}) \subset \mathrm{GL}_{B_I}(M_I)$ dès que I est suffisamment grand au sens où $I \cap \varphi(I) \neq \emptyset$.

La structure H-équivariante sur $\mathscr{E}$, $(c_\sigma)_{\sigma \in H}$ avec $c_\sigma : \sigma^* \mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$, induit une action à gauche de H sur $\mathrm{Aut}(\mathscr{E})$ par automorphismes via la formule

$$f^\sigma = c_{\sigma^{-1}} \circ (\sigma^{-1*} f) \circ c_{\sigma^{-1}}^{-1}, \quad f \in \mathrm{Aut}(\mathscr{E}), \sigma \in H.$$

On note

$$Z^1(H, \mathrm{Aut}(\mathscr{E}))$$

les 1-cocycles continus de H à valeurs dans $\mathrm{Aut}(\mathscr{E})$ pour cette action. La proposition suivante ne pose alors pas de difficulté particulière.

Proposition 9.1.5. —

1. *L'ensemble des structures H-équivariantes sur $\mathscr{E}$ s'identifie à $Z^1(H, Aut(\mathscr{E}))$.*
2. *Deux tels cocycles sont cohomologues si et seulement si ils définissent des fibrés équivariants isomorphes.*
3. *L'ensemble des classes d'isomorphisme de fibrés H-équivariants dont le fibré sous-jacent est isomorphe à $\mathscr{E}$ est en bijection avec l'ensemble $H^1(H, Aut(\mathscr{E}))$.*

On adoptera la définition suivante.

Définition 9.1.6. — Soit $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^H$ de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$ et $c = (c_\sigma)_{\sigma \in H} \in Z^1(H, \mathrm{Aut}(\mathscr{E}))$. On note

$$\underline{\mathscr{E}} \wedge c$$

le fibré équivariant de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$ obtenu par torsion.

9.2. Classification des fibrés équivariants semi-stables lorsque F est algébriquement clos

Supposons que F est algébriquement clos. Soit $\lambda = \frac{d}{h} \in \mathbb{Q}$ avec $(d,h) = 1$ Soit $E_h|E$ l'extension non-ramifiée de degré h de corps résiduel $\mathbb{F}_{q^h} = F^{\varphi^h = Id}$. L'application composée

$$H \longrightarrow \mathrm{Aut}(F|\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathbb{F}_{q^h}|\mathbb{F}_q)$$

induit un morphisme

$$H \longrightarrow \mathrm{Gal}(E_h|E).$$

L'action de H sur $X_E/\mathrm{Spec}(E)$ s'étend en une action sur X_{E_h} qui induit l'action déduite du morphisme précédent sur $\mathrm{Spec}(E_h)$. Le morphisme

$$\pi_{E_h/E} : X_{E_h} \longrightarrow X_E$$

est H-équivariant. Le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_{E_h}}(d) = \widetilde{P_{F,E_h,\pi}[d]}$ est canoniquement muni d'une structure de fibré H-équivariant. On note $\underline{\mathcal{O}}_{X_{E_h}}(d)$ ce fibré H-équivariant (bien sûr ce fibré équivariant dépend du choix de l'uniformisante π que l'on ne met pas dans les notations afin de les alléger).

Définition 9.2.1. — On note

$$\underline{\mathcal{O}}_{X_E}(\lambda) = \pi_{E_h/E*}\underline{\mathcal{O}}_{X_{E_h}}(d) \in \mathrm{Fib}^H_{X_E}.$$

On a

$$D_\lambda = \mathrm{End}(\mathcal{O}_X(\lambda)).$$

On vérifie alors que l'action induite par la structure équivariante est donnée par le morphisme suivant

$$H \longrightarrow \mathrm{Aut}(F|\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^h}|\mathbb{F}_q) \longrightarrow \mathrm{Aut}(D_\lambda)$$

où si $D_\lambda = E_h[\Pi]$, le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\mathbb{F}_{q^h}|\mathbb{F}_q)$ est envoyé sur l'automorphisme intérieur de D_λ

$$x \mapsto \Pi x \Pi^{-1}.$$

Du théorème de classification 8.2.10 et de la proposition 9.1.5 on déduit le théorème suivant.

Théorème 9.2.2. — *Supposons F algébriquement clos. Soient $Rep_{D_\lambda}(H)$ la catégorie des D_λ^{op}-espaces vectoriels (i.e. les D_λ-espaces vectoriels à droite) de dimension finie munis d'une action semi-linéaire continue de H et $Fib_X^{H,\lambda}$ celle des fibrés H-équivariants semi-stables de pente λ. On a alors une équivalence*

$$\begin{array}{rcl} Rep_{D_\lambda}(H) & \xrightarrow{\sim} & Fib_X^{H,\lambda} \\ V & \longmapsto & V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda). \end{array}$$

9.2.1. Extensions équivariantes. — Nous utiliserons la proposition suivante qui est un « bout » de suite spectrale de Hochschild Serre qui sera suffisant pour nos besoins.

Proposition 9.2.3. — *Soient $\underline{\mathscr{E}}_1$, resp. $\underline{\mathscr{E}}_2$, un fibré H-équivariant de fibré sous-jacent $\mathscr{E}_1$, resp. $\mathscr{E}_2$. Il y a alors une suite exacte*

$$0 \longrightarrow H^1\big(H, Hom(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)\big) \longrightarrow Ext^1(\underline{\mathscr{E}}_1, \underline{\mathscr{E}}_2) \longrightarrow H^0\big(H, Ext^1(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)\big)$$

où :

— *Si pour $\sigma \in H$, $c_\sigma : \sigma^*\mathscr{E}_1 \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_1$ et $d_\sigma : \sigma^*\mathscr{E}_2 \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_2$ définissent la structure équivariante alors l'action de G_F sur $Ext^\bullet(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ est donnée par*

$$Ext^\bullet(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2) \xrightarrow{\sigma^*} Ext^\bullet(\sigma^*\mathscr{E}_1, \sigma^*\mathscr{E}_2) \xrightarrow{Ext^\bullet(c_\sigma^{-1}, d_\sigma)} Ext^1(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2).$$

— *Par définition un 1-cocycle de H à valeurs dans $Hom(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)$ est continu s'il est continu au point générique comme cocycle à valeurs dans $Hom(\mathscr{E}_{1,\eta}, \mathscr{E}_{2,\eta})$*

— *Si $(c_\sigma)_\sigma \in Z^1(H, Hom(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2))$ l'image de la classe de $(c_\sigma)_\sigma$ dans $Ext^1(\underline{\mathscr{E}}_1, \underline{\mathscr{E}}_2)$ se décrit de la façon suivante. Si $\alpha = (\alpha_\sigma)_\sigma \in Z^1(H, Aut(\mathscr{E}_2 \oplus \mathscr{E}_1))$ est défini par*

$$\alpha_\sigma = \begin{pmatrix} Id_{\mathscr{E}_2} & \alpha_\sigma \\ 0 & Id_{\mathscr{E}_1} \end{pmatrix}$$

alors la classe de l'extension équivariante associée est

$$0 \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}_2 \longrightarrow \big(\underline{\mathscr{E}}_2 \oplus \underline{\mathscr{E}}_1\big) \wedge \alpha \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}_1 \longrightarrow 0.$$

Démonstration. — Cela se démontre sans difficulté en explicitant les cocyles et les différentes applications de bord. □

9.3. Descente galoisienne

Théorème 9.3.1. — *Le foncteur image réciproque associé au morphisme*

$$X_{\widehat{\overline{F}}} \longrightarrow X_F$$

induit une équivalence

$$Coh_{X_F} \xrightarrow{\sim} Coh_{X_{\widehat{\overline{F}}}}^{G_F}.$$

Démonstration. — Commençons par traiter le cas des fibrés vectoriels. Fixons $\infty = V^+(t) \in |X_F|$, $t \in B_F^{\varphi=\pi}$ non nul. On note de même $\infty \in |X_{\widehat{\overline{F}}}|$ l'unique point fermé de $X_{\widehat{\overline{F}}}$ au dessus de $\infty \in X_F$. On note alors

$$B_{F,e} = B_F[\tfrac{1}{\pi}]^{\varphi=Id}, \quad B_{\widehat{\overline{F}},e} = B_{\widehat{\overline{F}}}[\tfrac{1}{t}]^{\varphi=Id}$$

et

$$B^+_{F,dR} = \widehat{\mathcal{O}}_{X_F,\infty}, \quad B^+_{\widehat{\overline{F}},dR} = \widehat{\mathcal{O}}_{X_{\widehat{\overline{F}}},\infty}.$$

La catégorie Fib_{X_F} s'identifie alors aux triplets (M_e, M_{dR}, u) où M_e est un $B_{F,e}$-module projectif, M_{dR} un $B^+_{F,dR}$-module libre et

$$u : M_e \otimes_{B_{F,e}} B_{F,dR} \xrightarrow{\sim} M_{dR}[\tfrac{1}{t}].$$

La catégorie $\mathrm{Fib}^{G_F}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ s'identifie aux triplets (M_e, M_{dR}, u) où M_e est un $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-module libre muni d'une action semi-linéaire de G_F, M_{dR} est un $B^+_{\widehat{\overline{F}},dR}$-module libre muni d'une action semi-linéaire continue de G_F et

$$u : M_e \otimes_{B_{\widehat{\overline{F}},e}} B_{\widehat{\overline{F}},dR} \xrightarrow{\sim} M_{dR}[\tfrac{1}{t}].$$

commute à l'action de G_F.

Il résulte de la proposition 7.1.1 que les foncteurs

$$W \longmapsto W \otimes_{B^+_{F,dR}} B^+_{\widehat{\overline{F}},dR}$$

et

$$W \longmapsto W^{G_F}$$

induisent des équivalences inverses de catégories entre $B^+_{F,dR}$-modules libres et $B^+_{\widehat{\overline{F}},dR}$-modules libres munis d'une action semi-linéaire continue de G_F.

Prenons maintenant la définition définition suivante.

Définition 9.3.2. — Une $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-représentation de G_F est un $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-module libre M muni d'une action semi-linéaire de G_F telle qu'il existe un B^+_{dR}-réseau

$$W \subset M \otimes_{B_{\widehat{\overline{F}},e}} B_{\widehat{\overline{F}},dR}$$

stable sous cette action et sur lequel l'action est continue. On note

$$\mathrm{Rep}_{B_{\widehat{\overline{F}},e}}(G_F)$$

la catégorie des $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-représentations de G_F.

Remarque 9.3.3. — Dans la définition précédente, on vérifie que si $W' \subset M \otimes_{B_{\widehat{\overline{F}},e}} B_{\widehat{\overline{F}},dR}$ est un autre réseau stable sous l'action de G_F alors l'action est automatiquement continue sur celui-ci.

Ainsi, $\mathrm{Rep}_{B_{\widehat{\overline{F}},e}}(G_F)$ consiste en la catégorie des $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-modules munis d'une action semi-linéaire de G_F tels qu'il existe $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}^{G_F}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ satisfaisant

$$M = \Gamma\big(X_{\widehat{\overline{F}}} \setminus \{\infty\}, \mathscr{E}\big).$$

Notons $\mathrm{Proj}_{B_{F,e}}$ la catégorie des $B_{F,e}$-modules projectifs de type fini. Le théorème 9.3.1 pour les fibrés vectoriels se ramène alors à l'énoncé suivant.

Théorème 9.3.4. — *Le foncteur d'extension des scalaires induit une équivalence de catégories*

$$- \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e} : Proj_{B_{F,e}} \xrightarrow{\sim} Rep_{B_{\widehat{\overline{F}},e}}(G_F)$$

d'inverse donné par $M \mapsto M^{G_F}$.

Démonstration. — Commençons par la pleine fidélité du foncteur d'extension des scalaires. Utilisant le fait que la catégorie $\mathrm{Proj}_{B_{F,e}}$ possède des Hom internes cette pleine fidélité se ramène à montrer que si $M \in \mathrm{Proj}_{B_{F,e}}$ alors

$$M = \left(M \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F}.$$

Mais si M est un tel module, il existe N un autre module ainsi qu'un entier n tels que $M \oplus N = B_{F,e}^n$. On a alors

$$\begin{aligned} \left(M \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F} \oplus \left(N \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F} &= \left(B^n_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F} \\ &= B^n_{F,e} \\ &= M \oplus N. \end{aligned}$$

L'égalité $\left(M \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e}\right)^{G_F} = M$, et donc la pleine fidélité, en résulte.

Il reste donc à traiter la surjectivité essentielle du foncteur extension des scalaires. Soit donc $M \in \mathrm{Rep}_{B_{\widehat{\overline{F}},e}}(G_F)$. On procède par récurrence sur le rang de M, le cas de rang 1 ayant été traité dans la proposition 7.2.4. On affirme qu'il suffit de vérifier que $M^{G_F} \neq 0$. En effet, si c'est le cas alors soit $f \in M^{G_F}$ non-nul et N le saturé du sous-module

$$B_{\widehat{\overline{F}},e} f \subset M$$

i.e.

$$M/N = \left(M/B_{\widehat{\overline{F}},e} f\right)/\text{torsion}.$$

Le $B_{\widehat{\overline{F}},e}$-module N est libre de rang un stable sous l'action de G_F. Du cas des modules de rang 1 on tire que N^{G_F} est un $B_{F,e}$-module projectif tel que

$$N^{G_F} \otimes_{B_{F,e}} B_{\widehat{\overline{F}},e} \xrightarrow{\sim} N.$$

L'hypothèse de récurrence nous donne le même énoncé pour M/N : $(M/N)^{G_F} \in \mathrm{Proj}_{B_{F,e}}$ et son extension des scalaires est M/N. On dispose alors d'une suite exacte

$$0 \longrightarrow N^{G_F} \longrightarrow M^{G_F} \longrightarrow (M/N)^{G_F}$$

de laquelle il résulte que M^{G_F} est un $B_{F,e}$-module projectif de type fini (puisque $B_{F,e}$ est de Dedekind tout sous-module d'un module projectif de type fini est projectif de type fini). Il résulte en fait de l'annulation

$$H^1(G_F, N) = 0$$

(prop. 7.1.2) que la suite

$$0 \longrightarrow N^{G_F} \longrightarrow M^{G_F} \longrightarrow (M/N)^{G_F} \longrightarrow 0$$

est exacte. On a maintenant un diagramme

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}},e} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & M^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}},e} \arrow[r] \arrow[d] & (M/N)^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}},e} \arrow[r] \arrow[d, "\simeq"] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r] & M \arrow[r] & M/N \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

duquel il résulte que

$$M^{G_F} \otimes B_{\widehat{\overline{F}},e} \xrightarrow{\sim} M.$$

Il reste donc à montrer que $M^{G_F} \neq 0$. Soit $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}^{G_F}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ tel que

$$M = \Gamma\big(X_{\widehat{\overline{F}}} \setminus \{\infty\}, \mathscr{E}\big).$$

La filtration de Harder-Narasimhan de $\mathscr{E}$ est automatiquement invariante sous l'action de G_F (9.1.4). Considérons son premier cran $\mathscr{F} \subset \mathscr{E}$. D'après le théorème 9.2.2 il existe $\lambda \in \mathbb{Q}$ ainsi que $M \in \mathrm{Rep}_{D_\lambda^{op}}(G_F)$ tels que

$$\mathscr{F} \simeq M \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}(\lambda).$$

Il suffit donc de vérifier que si $\lambda = \frac{d}{h}$

$$H^0\big(G_F, M \otimes_{D_\lambda} B_{\widehat{\overline{F}}}[\tfrac{1}{t}]^{\varphi^h = \pi^d}\big) \neq 0.$$

Cela résulte de la proposition 7.1.2. □

Afin de conclure la preuve du théorème 9.3.1 il nous faut maintenant traiter le cas d'un faisceau cohérent équivariant quelconque $\mathscr{E}$. Remarquons d'abord que si $\mathscr{E}$ est équivariant de torsion sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$, puisque $\mathrm{supp}(\mathscr{E}) \subset |X_{\widehat{\overline{F}}}|$ est un ensemble fini invariant sous G_F il descend en un sous-ensemble fini de $|X_F|$. Le résultat pour les faisceaux de torsion découle alors de la proposition 7.1.1.
Si $\mathscr{E} \in \mathrm{Coh}^{G_F}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ est général alors d'après les résultats préédents $\mathscr{E}_{tor}$ et $\mathscr{E}/\mathscr{E}_{tor}$ descendent sur X_F. Il suffit maintenant de voir que l'extension de faisceaux équivariants

$$0 \longrightarrow \mathscr{E}_{tor} \longrightarrow \mathscr{E} \longrightarrow \mathscr{E}/\mathscr{E}_{tor} \longrightarrow 0$$

est scindée. Elle est scindée comme extension de $\mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$-modules. L'obstruction à son scindage équivariant vit donc dans

$$H^1\big((G_F, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}/\mathscr{E}_{tor}, \mathscr{E}_{tor})\big).$$

Mais ce groupe de cohomologie galoisienne est nul d'après 7.1.1. Cela conclut la preuve du théorème 9.3.1. □

On a vu que lorsque F est algébriquement clos alors $H^1(X, \mathcal{O}_X) = 0$. On peut maintenant calculer « le genre » de X pour F général.

Corollaire 9.3.5. — *Il y a une identification*

$$H^1(X, \mathcal{O}_X) = Hom(G_F, E).$$

Démonstration. — D'après le théorème 9.3.1 l'espace vectoriel $H^1(X, \mathcal{O}_X)$ calcule les extensions de fibrés équivariants entre $\underline{\mathcal{O}}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ et lui-même. Il suffit alors d'utiliser la proposition 9.2.3 couplée à l'annulation de $H^1(X_{\widehat{\overline{F}}}, \mathcal{O}_{X_{\widehat{\overline{F}}}})$ pour conclure. □

Remarquons le corollaire suivant que l'on peut voir comme un énoncé du type Narasimhan Seshadri ([**50**]) reliant fibrés vectoriels semi-stables et systèmes locaux.

Corollaire 9.3.6. — *La catégorie des fibrés semi-stables de pente* 0 *sur* X_F *s'identifie à la catégorie des* E*-systèmes locaux étales sur Spec*(F).

9.4. Classification des fibrés

Théorème 9.4.1. — *La filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur* X_F *est scindée.*

Démonstration. — Utilisant le théorème 9.3.1, il suffit de montrer que si $\underline{\mathscr{E}}_1, \underline{\mathscr{E}}_2 \in \mathrm{Fib}^{G_F}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ de fibrés sous-jacents $\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2 \in \mathrm{Fib}_{X_{\widehat{\overline{F}}}}$ sont tels que $\mathscr{E}_1$ est semi-stable de pente λ_1, $\mathscr{E}_2$ est semi-stable de pente λ_2 avec $\lambda_1 < \lambda_2$ alors

$$\mathrm{Ext}^1(\underline{\mathscr{E}}_1, \underline{\mathscr{E}}_2) = 0.$$

D'après le théorème de classification des fibrés sur $X_{\widehat{\overline{F}}}$ on sait que

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2) = 0.$$

La proposition 7.1.2 couplée au théorème 9.2.2 implique l'annulation

$$H^1(G_F, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)) = 0.$$

On conclut en appliquant 9.2.3. □

Remarque 9.4.2. — Remarquons que l'argument de la démonstration précédente montre que si $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_X$ est à pentes strictement positives alors

$$H^1(X, \mathscr{E}) = 0.$$

Ainsi, du point de vue de l'annulation de la cohomologie des fibrés, la différence entre le cas où F est algébriquement clos ou pas se voit au niveau des fibrés semi-stables de pente 0.

Théorème 9.4.3. — *Il y a une bijection*

$$\big\{(\lambda_1, [\rho_1]), \cdots, (\lambda_n, [\rho_n]) \mid n \in \mathbb{N},\ \lambda_i \in \mathbb{Q},\ \rho_i \in Rep_{D^{op}_{\lambda_i}}(G_F),\ \lambda_1 > \cdots > \lambda_n\big\} \xrightarrow{\sim} Fib_X/\sim.$$

9.5. Calcul du groupe fondamental de la courbe

On note comme dans la section 8.6 $X_{F,\overline{E}} := X_{F,E} \otimes_E \overline{E}$.

Théorème 9.5.1. — *Le pro-revêtement galoisien*

$$\left(X_{L,\overline{E}}\right)_{L|F \text{ finie}} \longrightarrow X_{F,\overline{E}}$$

est un pro-revêtement universel de $X_{F,\overline{E}}$. *Ainsi,*

$$\pi_1\left(X_{F,\overline{E}}\right) \simeq Gal(\overline{F}|F).$$

Démonstration. — Soit $Y/X_{F,\overline{E}}$ un revêtement étale fini de degré n. D'après le théorème 8.6.1 son tiré en arrière sur $X_{\widehat{\overline{F}},\overline{E}}$

$$Y \times_{X_{F,\overline{E}}} X_{\widehat{\overline{F}},\overline{E}} \longrightarrow X_{\widehat{\overline{F}},\overline{E}}$$

est un revêtement trivial. Utilisant le théorème 9.3.1 on voit alors que Y est donné par un morphisme

$$\rho : G_F \longrightarrow \mathrm{Aut}_{\overline{E}-alg}\left(\overline{E}^n\right) = \mathfrak{S}_n$$

qui est continu au sens où ρ provient par extension des scalaires d'une représentation linéaire continue $G_F \to \mathrm{GL}_n(E')$ avec $E'|E$ finie. Il s'en suit que ρ se factorise par $\mathrm{Gal}(L|F)$ avec $L|F$ finie. $\square$

CHAPITRE 10

FAIBLEMENT ADMISSIBLE IMPLIQUE ADMISSIBLE ET LE THÉORÈME DE LA MONODROMIE p-ADIQUE

Introduction

On utilise la courbe et le théorème de classification des fibrés afin de donner des nouvelles démonstrations des deux théorèmes principaux de la théorie de Hodge p-adique : faiblement admissible implique admissible et le théorème de la monodromie p-adique (de Rham implique potentiellement semi-stable). Bien sûr ces résultats ne sont pas nouveaux (on renvoie à l'introduction de ce texte pour un historique) mais leur démonstration constitue un test pour la pertinence des objets introduits et des résultats obtenus précédemment.

Pour cela on définit, si $K|\mathbb{Q}_p$ est de valuation discrète à corps résiduel parfait, $F = \widehat{\overline{K}}^{\flat}$, trois notions de fibrés $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$-équivariants sur X_F :

— Les fibrés cristallins, ce sont les fibrés équivariants $\mathscr{E}$ tels que le « fibré associé $\mathscr{E}^{an}$ sur Y » devienne trivial sur « $Y \setminus V(t)$ » comme fibré méromorphe i.e. est engendré par des $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$-invariants.

— Les fibrés log-cristallins qui sont définis de façon analogue mais en remplaçant la courbe X par une surface $X_{\log}$.

— Les fibrés de de Rham sont les fibrés équivariants $\mathscr{E}$ tels que $\widehat{\mathscr{E}}_{\infty}[\frac{1}{t}]$ soit trivial i.e. engendré par ses $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$-invariants.

On montre que la catégorie des fibrés cristallins, resp. log-cristallins, est équivalente à celle des φ-modules, resp. (φ, N)-modules, filtrés usuels intervenant en théorie de Hodge p-adique. L'équivalence entre faiblement admissible et admissible s'en déduit alors aussitôt par spécialisation au fibrés semi-stables de pente 0 via le théorème de classification des fibrés.

Le théorème de la monodromie p-adique se déduit lui de la spécialisation en pente 0 de l'énoncé suivant : tout fibré de de Rham est potentiellement log-cristallin.

Dans tout ce chapitre on suppose que $E = \mathbb{Q}_p$. Soit $K|\mathbb{Q}_p$ complet de valuation discrète à corps résiduel k_K parfait. On note $K_0 = W(k_K)_{\mathbb{Q}}$ l'extension maximale non-ramifiée de $\mathbb{Q}_p$ dans K. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $G_K = \mathrm{Gal}(\overline{K}|K)$. On pose $C = \widehat{\overline{K}}$ et $F = C^\flat$.

10.1. Fibrés G_K-équivariants

Nous adopterons parfois la notation suivante dans la suite : *on note $\underline{\mathscr{E}}$ un fibré équivariant de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$ ce qui signifie que $\underline{\mathscr{E}} = (\mathscr{E}, (c_\sigma)_\sigma)$ (cf. def. 9.1.1).*

10.1.1. Action du groupe de Galois G_K sur la courbe. — Via le morphisme injectif

$$G_K \hookrightarrow \mathrm{Aut}(F)$$

la courbe $X := X_{F,\mathbb{Q}_p}$ est munie d'une action de G_K. Le noyau du morphisme $\theta : \mathbf{A}_F \to \mathcal{O}_C$ définit un point canonique y_∞ sur Y_F invariant sous l'action de G_K. Plus précisément, $y_\infty = (u_\epsilon)$ si ϵ est un générateur de $\mathbb{Z}_p(1)$ sur C. Via l'uniformisation $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$ le point y_∞ détermine donc un point $\infty \in |X|$ invariant sous l'action de Galois, $\infty = V^+(t)$ avec

$$t = \log[\epsilon] \in B^{\varphi=p}.$$

Les identifications

$$\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty} = B^+_{dR}(C) = B^+_{dR,y_\infty}$$

sont compatibles à l'action de G_K.

Proposition 10.1.1. — *Les G_K-orbites des points fermés de $X \setminus \{\infty\}$ sont infinies.*

Démonstration. — Soit $x \in |X|$ dont la G_K-orbite est finie. Quitte à remplacer K par une extension de degré fini on suppose que x est invariant sous G_K. Soit $X = V^+(t')$ avec $t' \in B^{\varphi=p}$. Puisque x est invariant sous G_K il existe un caractère $\chi : G_K \to \mathbb{Z}_p^\times$ tel que pour tout $\sigma \in G_K$ on ait

$$t'^\sigma = \chi(\sigma)t'.$$

On a alors

$$\theta(t') \in H^0\big(G_K, C(\chi^{-1})\big)$$

qui est nul d'après Tate ([**60**]) si χ est d'ordre infini. Ainsi, si χ est d'ordre infini alors $t' \in \ker\theta$ et est donc un $\mathbb{Q}_p$-multiple de t c'est à dire $x = \infty$. Supposons maintenant par l'absurde que χ soit d'ordre fini. Soit $K'|K$ l'extension finie telle que $G_{K'} = \ker\chi$. Si $t' = \log([\epsilon'])$ avec $\epsilon' \in 1 + \mathfrak{m}_F$, $\epsilon' \neq 1$, on a donc

$$\epsilon' \in (1 + \mathfrak{m}_F)^{G_{K'}}.$$

Mais puisque K' est de valuation discrète

$$\begin{aligned} F^{G_{K'}} &= (C^\flat)^{G_{K'}} \\ &= \left(C^{G_{K'}}\right)^\flat \\ &= k_{K'} \end{aligned}$$

C'est en contradiction avec le fait que $|1-\epsilon'|>1$. □

10.1.2. Fibrés équivariants et B_e-représentations. — Notons $B_e = B[\frac{1}{t}]^{\varphi=Id}$.

Définition 10.1.2. —

1. On appelle B_e-représentation de G_K un B_e-module libre M muni d'une action semi-linéaire de G_K tel qu'il existe un B_{dR}^+-réseau stable sous l'action de G_K dans $M \otimes_{B_e} B_{dR}$ sur lequel l'action soit continue. On note
$$\mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$$
cette catégorie.
2. On appelle B_{dR}^+-représentation de G_K un B_{dR}^+-module libre muni d'une action semi-linéaire et continue de G_K. On note
$$\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$$
cette catégorie.

La catégorie $\mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ est $\mathbb{Q}_p$-linéaire munie de produits tensoriels, de duaux et de Hom internes.

La catégorie $\mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ est K-linéaire munie de produits tensoriels, de duaux et de Hom internes.

Il y a alors une équivalence de catégories entre $\mathrm{Fib}_X^{G_K}$ et la catégorie des B-paires au sens de Berger ([**5**]) c'est à dire les triplets

$$(M_e, M_{dR}, u)$$

où $M_e \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$, $M_{dR} \in \mathrm{Rep}_{B_{dR}^+}(G_K)$ et

$$u : M_e \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} M_{dR}[\tfrac{1}{t}].$$

Proposition 10.1.3 **(Berger [5])**. — *La catégorie $Rep_{B_e}(G_K)$ est abélienne.*

Démonstration. — Puisque le support d'un faisceau cohérent de torsion équivariant est un ensemble fini de points fermés invariant sous l'action on a d'après la proposition 10.1.1

$$\mathrm{Coh}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K} = \mathrm{Fib}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K}.$$

□

Le corollaire suivant est alors immédiat.

Corollaire 10.1.4. — *La catégorie $Rep_{B_e}(G_K)$ est Tannakienne.*

On verra plus tard que cette catégorie Tannakienne contient la catégorie des (φ, N)-modules sur K_0. En particulier elle n'est pas neutre si $K_0 \neq \mathbb{Q}_p$.

10.1.3. Descente à une extension arithmétiquement profinie. — Grâce au théorème 9.3.1 on peut dévisser la catégorie des fibrés G_K-équivariants de la façon suivante.

Soit $L|K$ une extension algébrique galoisienne de K contenue dans $\overline{K}$. On la suppose arithmétiquement profinie ([**61**]). Notons $\Gamma = \mathrm{Gal}(L|K)$. Le théorème 9.3.1 implique alors le théorème suivant.

Théorème 10.1.5. — *Le morphisme $X_F \to X_{\widehat{L}^\flat}$ induit une équivalence de catégories*

$$Coh^{G_K}_{X_F} \xrightarrow{\sim} Coh^{\Gamma}_{X_{\widehat{L}^\flat}}.$$

Notons également que l'on obtient une équivalence

$$\mathrm{Fib}^{\Gamma,0}_{X_{\widehat{L}^\flat}} \simeq \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$$

entre fibrés semi-stables de pente 0 Γ-équivariants et représentations galoisiennes de dimension finie.

Remarque 10.1.6. — Il faut faire attention au fait que bien que la filtration de Harder-Narasimhan d'un fibré sur $X_{\widehat{L}^\flat}$ soit scindée (théo. 9.4.1) la filtration d'un fibré Γ-équivariant n'est pas scindée de façon Γ-équivariante en général. En utilisant la proposition 9.2.3 on voit en effet que si $\underline{\mathscr{E}}_1 \in \mathrm{Fib}^{\Gamma,\lambda}_{X_{\widetilde{L}^\flat}}$ et $\underline{\mathscr{E}}_2 \in \mathrm{Fib}^{\Gamma,\mu}_{X_{\widetilde{L}^\flat}}$ avec $\lambda < \mu$ alors

$$H^1(\Gamma, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2)) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1(\underline{\mathscr{E}}_1, \underline{\mathscr{E}}_2)$$

qui est non nul en général.

10.1.4. Classification des fibrés semi-stables équivariants. — Le théorème 9.2.2 se traduit maintenant de la façon suivante. Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ on munit l'algèbre à division $D_\lambda = \mathbb{Q}_{p^h}[\Pi]$ de l'action non-ramifiée de G_K définie via $G_K \to \mathrm{Gal}(\overline{k}_K|k_K)$ et où le Frobenius de $\mathrm{Gal}(\overline{k}_K|k_K)$ agit par $x \mapsto \Pi x \Pi^{-1}$. Notons $\mathrm{Fib}^{G_K,\lambda}_X$ la catégorie des fibrés semi-stables de pente λ.

Théorème 10.1.7. — *Il y a une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{rcl} Rep_{D_\lambda^{op}}(G_K) & \xrightarrow{\sim} & Fib^{G_K,\lambda}_X \\ V & \longmapsto & \underline{V} \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda) \end{array}$$

où $\underline{V}$ est le faisceau G_K-équivariant sur X définie par l'action semi-linéaire de G_K sur V. Un inverse de cette équivalence est donné par le foncteur

$$\underline{\mathscr{E}} \longmapsto Hom(\underline{\mathcal{O}}_X(\lambda), \mathscr{E}).$$

En particulier, on a une équivalence

$$Rep_{\mathbb{Q}_p}(G_K) \xrightarrow{\sim} Fib_X^{G_K,0}.$$

10.2. Fibrés équivariants cristallins

10.2.1. Fibrés équivariants associés aux isocristaux. — Notons $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$ la catégorie des isocristaux associés à K_0. Le foncteur $\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{K_0} \to \mathrm{Fib}_X$ de la section 8.2.3 s'étend en un foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathrm{Fib}_X^{G_K}$$

en constatant tout simplement que le P-module gradué

$$\bigoplus_{d\geq 0}(D \otimes_{K_0} B)^{\varphi=p^d}$$

est muni d'une action semi-linéaire de G_K.

Définition 10.2.1. — On note $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)$ le fibré G_K-équivariant associé à l'isocristal (D,φ).

La B-paire associée à $\mathscr{E}(D,\varphi)$ est

$$\big((D \otimes_{K_0} B[\tfrac{1}{t}])^{\varphi=Id}, D \otimes_{K_0} B_{dR}^+\big).$$

La structure de $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)$ se décrit de la façon suivante. Le théorème de Dieudonné-Manin dit que l'on a une décomposition orthogonale

$$\varphi\text{-Mod}_{K_0} = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \varphi\text{-Mod}_{K_0}^{\lambda}$$

où $\varphi\text{-Mod}_{K_0}^{\lambda}$ désigne les isocristaux isoclines de pente λ. Notons $\overline{k}_K$ la clôture algébrique de k_K associée à $\overline{K}|K$ et $L = W(\overline{k}_K)_{\mathbb{Q}}$. Pour $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h) = 1$, notons $\mathbf{1}(\lambda) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$ l'isocristal de base $(e_1,\ldots,e_h)$ sur lequel φ agit via $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < h$ et $\varphi(e_h) = p^d e_1$. Il y a alors une équivalence

$$\begin{array}{rcl} \varphi\text{-Mod}_{K_0}^{\lambda} & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Rep}_{D_\lambda}\big(\mathrm{Gal}(\overline{k}_K|k_K)\big) \\ (D,\varphi) & \longmapsto & \mathrm{Hom}_{\varphi\text{-Mod}_L}\big(\mathbf{1}(\lambda)\otimes L, (D,\varphi)\otimes L\big) \end{array}$$

où $\mathrm{Rep}_{D_\lambda}\big(\mathrm{Gal}(\overline{k}_K|k_K)\big)$ désigne les représentations semi-linéaires continues à coefficients dans un D_λ-espace vectoriel de dimension finie (on a utilisé l'égalité $D_\lambda = \mathrm{End}(\mathbf{1}(\lambda)\otimes L)^{op}$ pour définir le foncteur précédent).
Si (D,φ) est isocline de pente λ associé à $V \in \mathrm{Rep}_{D_\lambda}\big(\mathrm{Gal}(\overline{k}_K|k_K)\big)$ alors

$$\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \simeq V \otimes_{D_\lambda^{op}} \underline{\mathcal{O}}_X(-\lambda).$$

On obtient ainsi la proposition suivante.

Proposition 10.2.2. — *L'image essentielle du foncteur $\underline{\mathscr{E}}$: φ-$Mod_{K_0} \to Fib_X^{G_K}$ consiste en les fibrés équivariants qui sont sommes directes de fibrés semi-stables associés à des représentations semi-linéaire non ramfiées de G_K via le théorème 9.2.2.*

Ce foncteur induit une équivalence entre la catégorie des isocristaux isoclines de pente λ et ces même fibrés équivariants semi-stables de pente $-\lambda$.

10.2.2. Fibrés équivariants plats. — Dans cette section on oublie momentanément les notations précédentes. Ce que l'on introduit est relié à la notion d'anneau G-régulier et de représentation admissible ([**26**] 1.4 et 1.5).

Soit Z un schéma intègre muni d'une action d'un groupe G. Faisons l'hypothèse suivante : « *les seuls sous-schémas fermés de Z invariants sous G sont $\emptyset$ et Z.* ». Notons

$$E = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)^G.$$

Si $f \in E \setminus \{0\}$ alors $V(f)$ est G-invariant. On en déduit que $V(f) = \emptyset$ c'est à dire $f \in \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)^\times$. L'anneau E est donc un corps. On a en fait l'énoncé suivant. On note η le point générique de Z.

Lemme 10.2.3. — *On a $\mathcal{O}_{Z,\eta}^G = E$.*

Démonstration. — Soit $f \in \mathcal{O}_{Z,\eta}^G$ non nul. Alors, $\mathcal{O}_Z f \cap \mathcal{O}_Z$ est un faisceau d'idéaux quasicohérent G-invariant dans $\mathcal{O}_Z$. On a donc $\mathcal{O}_Z f \cap \mathcal{O}_Z = \mathcal{O}_Z$ ce qui implique que

$$\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) f \cap \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z) = \Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)$$

et donc $f \in \mathrm{Frac}\big(\Gamma(Z, \mathcal{O}_Z)\big)^G = E$. □

Notons Fib_Z^G la catégorie des fibrés G-équivariants et Fib_η^G celle des $\mathcal{O}_{X,\eta}$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une action semi-linéaire de G.

Lemme 10.2.4. — *Le foncteur fibre générique*

$$Fib_Z^G \longrightarrow Fib_\eta^G$$

est pleinement fidèle et donc en particulier si $\underline{\mathscr{E}} \in Fib_Z^G$ de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$ on a

$$H^0(Z, \mathscr{E})^G = \mathscr{E}_\eta^G.$$

Démonstration. — Utilisant les Hom internes on est ramené à montrer que pour $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_Z^G$ de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$

$$\Gamma(Z, \mathscr{E})^G = \mathscr{E}_\eta^G.$$

Soit donc $s \in \mathscr{E}_\eta^G$. On voit $\mathscr{E}$ comme un sous-faisceau du faisceau constant $\mathscr{E}_\eta$. Le faisceau d'idéaux

$$\mathscr{I} = \{x \in \mathcal{O}_X \mid xs \in \mathscr{E}\}$$

est quasicohérent G-invariant non nul. On a donc $\mathscr{I} = \mathcal{O}_X$ et le résultat s'en déduit. □

Rappelons ([**26**] prop. 1.6.1) que si $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_\eta^G$ alors l'application

$$\mathscr{E}^G \otimes_E \mathcal{O}_{X,\eta} \longrightarrow \mathscr{E}$$

est injective. On en déduit que

$$\dim_E \mathscr{E}^G < +\infty.$$

Il y a un morphisme de champs

$$\pi : [G\backslash Z] \longrightarrow \mathrm{Spec}(E).$$

Notons Vect_E la catégorie des E-espaces vectoriels de dimension finie. On dispose donc de deux foncteurs adjoints

$$\mathrm{Fib}_Z^G \underset{\pi^*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Vect}_E$$

qui ne sont donnés par

$$\begin{aligned} \pi_*\underline{\mathscr{E}} &= \Gamma(Z, \mathscr{E})^G \\ \pi^* V &= V \otimes_E \mathcal{O}_Z. \end{aligned}$$

Définition 10.2.5. — Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_Z^G$ est plat si le morphisme d'ajonction

$$\pi^*\pi_*\underline{\mathscr{E}} \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}$$

est un isomorphisme.

Des raisonnements précédents on déduit la proposition suivante.

Proposition 10.2.6. — *Soit $\underline{\mathscr{E}} \in Fib_Z^G$. Le morphisme d'adjonction*

$$\pi^*\pi_*\underline{\mathscr{E}} \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}$$

est injectif et

$$\dim_E \pi_*\underline{\mathscr{E}} \leq rg\,\mathscr{E}.$$

Sont de plus équivalents :

1. *$\underline{\mathscr{E}}$ est plat.*
2. $\dim_E \pi_*\underline{\mathscr{E}} = rg\,\mathscr{E}$.
3. *$\underline{\mathscr{E}}_\eta$ est plat.*

10.2.3. Quelques calculs d'invariants sous Galois. — Rappelons que les calculs de cohomologie galoisienne de Tate fournissent l'égalité

$$B_{dR}^{G_K} = K$$

ce qui signifie qu'il existe une unique section Galois invariante

$$\begin{tikzcd} B_{dR}^{+} \arrow[r, "\theta"] & C \\ & K \arrow[u, hook] \arrow[ul, hook] \end{tikzcd}$$

Proposition 10.2.7. — *Pour tout intervalle compact $I \subset]0,1[$ on a*

$$\begin{array}{rcl} Frac(B_I) \otimes_{K_0} K & \hookrightarrow & B_{dR} \\ Frac(B_I)^{G_K} & = & K_0. \end{array}$$

Démonstration. — Il suffit de montrer que l'anneau $B_I \otimes_{K_0} K$ est intègre. En effet, si c'est le cas alors $\mathrm{Frac}(B_I) \otimes_{K_0} K$, qui est à priori un produit de corps, est intègre et est donc un corps. L'inclusion $\mathrm{Frac}(B_I) \otimes_{K_0} K \subset B_{dR}$ en découle alors. Concernant la seconde égalité, il suffit maintenant de constater que puisque $K|K_0$ est algébrique les inclusions

$$K_0 \subset \mathrm{Frac}(B_I)^{G_K} \subset B_{dR}^{G_K} = K$$

impliquent que $\mathrm{Frac}(B_I)^{G_K}$ est un corps extension de degré fini de K_0. L'inclusion précédente implique alors que

$$\mathrm{Frac}(B_I)^{G_K} \otimes_{K_0} K \subset B_{dR}^{G_K} = K$$

et donc $\mathrm{Frac}(B_I)^{G_K} = K_0$.

Montrons donc que $B_I \otimes_{K_0} K$ est intègre. L'anneau $W(\mathcal{O}_F) \otimes_{\mathcal{O}_{K_0}} \mathcal{O}_K$ est π_K-adiquement complet de réduction modulo π l'anneau $\mathcal{O}_F$. Tout élément de cet anneau s'écrit donc de façon unique sous la forme

$$\sum_{n \geq 0} [x_n] \pi_K^n, \quad x_n \in \mathcal{O}_F.$$

Pour un tel élément $x = \sum_{n \geq 0} [x_n] \pi^n$ et $\rho \in]0,1[$ posons

$$|x|_\rho = \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n| \rho^{n/e}$$

où e est l'indice de ramification de $K|K_0$. On vérifie alors comme dans la preuve de la proposition 1.4.9 que cette norme est multiplicative (la preuve est strictement identique) i.e. est une valeur absolue. Cette valeur absolue s'étend en une valeur absolue de $B^b \otimes_{K_0} K$. Le complété sur $B^b \otimes_{K_0} K$ pour les $(|.|_\rho)_{\rho \in I}$ est alors $B_I \otimes_{K_0} K$ qui est donc intègre puisque les $|.|_\rho$ sont multiplicatives. □

Corollaire 10.2.8. — *Les anneaux $B_I[\frac{1}{t}]$, B_{cris}, $B^+[\frac{1}{t}]$ et $B[\frac{1}{t}]$ sont G_K-réguliers au sens de* [**26**] *déf. 1.5.1. On a de plus*

$$\begin{aligned} B[\tfrac{1}{t}]^{G_K} = B_I[\tfrac{1}{t}] &= K_0 \\ B_e^{G_K} &= \mathbb{Q}_p. \end{aligned}$$

10.2.4. Fibrés équivariants plats sur $Y \setminus V(t)$. —

Définition 10.2.9. — 1. Pour $I \subset]0,1[$ un intervalle compact on note $\mathrm{Fib}_{Y_I}^{G_K}[\frac{1}{t}] = \mathrm{Rep}_{B_I[\frac{1}{t}]}(G_K)$ la catégorie des $B_I[\frac{1}{t}]$-modules libres munis d'une action semi-linéaire continue de G_K.

2. On note
$$\mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] = 2 - \varprojlim_I \mathrm{Fib}_{Y_I}^{G_K}[\tfrac{1}{t}].$$
la 2-limite projective de la catégorie fibrée précédente lorsque I varie.

D'après la proposition 10.1.1 le schéma $\mathrm{Spec}\big(B_I[\frac{1}{t}]\big)$ muni de son action de G_K satisfait l'hypothèse faite dans la section 10.2.2 : les seuls sous-schémas fermés invariants sont $\emptyset$ et $\mathrm{Spec}\big(B_I[\frac{1}{t}]\big)$. Le formalisme de cette section s'applique donc.

Définition 10.2.10. — On dit qu'un fibré équivariant $(M_I)_I \in \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\frac{1}{t}]$ est plat si pour tout I, M_I l'est.

D'après la section 10.2.2 on dispose donc de deux foncteurs adjoints

$$\mathrm{Fib}_{Y_I}^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \underset{\pi_I^*}{\overset{\pi_{I*}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Vect}_{K_0}$$

où

$$\begin{aligned} \pi_{I*}M &= M^{G_K} \\ \pi_I^* V &= V \otimes_{K_0} B_I[\tfrac{1}{t}]. \end{aligned}$$

De plus,

$$\dim_{K_0} \pi_{I*}M \leq \mathrm{rg} M$$

avec égalité si et seulement si M est plat. L'application

$$\pi_I^*\pi_{I*}M \longrightarrow M$$

est de plus toujours injective (il s'agit du plus grand sous-fibré plat de M). Les foncteurs (π_{I*}, π_I^*) induisent des équivalences entres $\mathrm{Fib}_{Y_I}^{G_K}[\frac{1}{t}]^{plat}$ et Vect_{K_0}.

Soit maintenant $(M_I)_I \in \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\frac{1}{t}]$. Les foncteurs précédents s'assemblent pour définir un foncteur

$$(\pi_{I*})_I : \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \longrightarrow 2 - \varprojlim_I \mathrm{Vect}_{K_0}.$$

On note

$$\pi_* : \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \longrightarrow \mathrm{Vect}_{K_0}$$

le foncteur obtenu en prenant la limite projective

$$\varprojlim_I \ : 2- \varprojlim_I \ \mathrm{Vect}_{K_0} \longrightarrow \mathrm{Vect}_{K_0}.$$

En fait, lorsque $I \subset J$ et $M = (M_I)_I \in \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\frac{1}{t}]$, $\pi_* M_J \subset \pi_* M_I$ et donc

$$\begin{aligned} \pi_* M &= \bigcap_I \pi_{I*} M_I \\ &= \pi_{I*} M_I \ \text{ pour } I \ll \text{grand} \gg. \end{aligned}$$

Cela définit deux foncteurs adjoints comme précédemment

$$\mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \underset{\pi^*}{\overset{\pi_*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Vect}_{K_0}$$

tels que $\dim_{K_0} \pi_* M \leq \mathrm{rg} M$ avec égalité si et seulement si M est plat. Ces deux foncteurs induisent des équivalences inverses entre $\mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\frac{1}{t}]^{\mathrm{plat}}$ et Vect_{K_0}.

10.2.5. Fibrés équivariants cristallins. — Notons $\mathrm{Fib}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K} = \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$. Les inclusions $B_e \subset B_I[\frac{1}{t}]$ fournissent un foncteur d'analytification

$$(-)^{an} : \mathrm{Fib}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K} \longrightarrow \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}].$$

Puisque les morphismes $\mathrm{Spec}(B_I[\frac{1}{t}]) \to \mathrm{Spec}(B_e)$ sont φ-invariants lorsque I varie, le foncteur composé

$$\mathrm{Fib}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K} \xrightarrow{(-)^{an}} \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \xrightarrow{\pi_*} \mathrm{Vect}_{K_0}$$

se factorise via φ-Mod_{K_0}. C'est le foncteur que l'on note $\mathscr{D}$ dans la définition qui suit.

Définition 10.2.11. — 1. Pour $(D, \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0}$ on note

$$\mathscr{V}(D, \varphi) = \Big(\varprojlim_I \ D \otimes_{K_0} B_I[\tfrac{1}{t}] \Big)^{\varphi = Id} \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K).$$

2. Pour $M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ on note

$$\mathscr{D}(M) = \varprojlim_I \ \big(M \otimes_{B_e} B_I[\tfrac{1}{t}]\big)^{G_K} \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0}.$$

On a donc un diagramme commutatif fourni par « le morphisme $Y/\varphi^{\mathbb{Z}} \to X$ »

$$\begin{tikzcd} \mathrm{Fib}_Y^{G_K}[\tfrac{1}{t}] \arrow[r, shift left, "\pi_*"] & \mathrm{Vect}_{K_0} \arrow[l, shift left, "\pi^*"] \\ \mathrm{Fib}_{X\setminus\{\infty\}}^{G_K} \arrow[u, "(-)^{an}"] \arrow[r, shift left, "\mathscr{D}"] & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0} \arrow[u] \arrow[l, shift left, "\mathscr{V}"] \end{tikzcd}$$

Proposition 10.2.12. — *1. Les deux foncteurs précédents*

$$Rep_{B_e}(G_K) \underset{\mathscr{V}}{\overset{\mathscr{D}}{\rightleftarrows}} \varphi\text{-}Mod_{K_0}$$

sont adjoints l'un de l'autre où $\mathscr{V}$ est ajoint à gauche de $\mathscr{D}$.

2. Le foncteur $\mathscr{V}$ est pleinement fidèle i.e.

$$Id \xrightarrow{\sim} \mathscr{D} \circ \mathscr{V}.$$

3. Pour $M \in Rep_{B_e}(G_K)$

$$\mathscr{V} \circ \mathscr{D}(M) \hookrightarrow M$$

avec égalité si et seulement si $\dim_{K_0} \mathscr{D}(M) = rg_{B_e} M$.

4. Pour $R \in \{B[\frac{1}{t}], B^+[\frac{1}{t}], B_{cris}\}$ on a les formules

$$\begin{aligned} \mathscr{V}(D,\varphi) &= \big(D \otimes_{K_0} R\big)^{\varphi = Id} \\ &= \Gamma\big(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)\big), \\ \mathscr{D}(M) &= \big(M \otimes_{B_e} R\big)^{G_K}. \end{aligned}$$

Démonstration. — Pour $R \in \{B[\frac{1}{t}], B^+[\frac{1}{t}], B_{cris}\}$ notons

$$\begin{aligned} \mathscr{V}_R(D,\varphi) &= \big(D \otimes_{K_0} R\big)^{\varphi = Id} \\ \mathscr{D}_R(M) &= \big(M \otimes_{B_e} R\big)^{G_K}. \end{aligned}$$

Si $R = \big(B_I[\frac{1}{t}]\big)_I$, où I parcourt les intervalles compacts de $]0,1[$, on note $\mathscr{V}_R := \mathscr{V}$ et $\mathscr{D}_R := \mathscr{D}$. Il y a des inclusions naturelles $\mathscr{V}_R \subset \mathscr{V}$ et $\mathscr{D}_R \subset \mathscr{D}$.

Si (d,h) est un couple d'entiers avec $h \geq 1$ et $R \in \{B[\frac{1}{t}], B^+[\frac{1}{t}], B_{cris}, (B_I[\frac{1}{t}])_I\}$ alors $R^{\varphi^h = p^d}$ ne dépend pas du choix de R. Cela est clair si $R \in \{B[\frac{1}{t}], B^+[\frac{1}{t}], B_{cris}\}$. Pour $R = (B_I[\frac{1}{t}])_I$, remarquons que

$$\bigcap_I B_I[\tfrac{1}{t}] \subset \mathcal{M}(Y).$$

Mais si $f \in \big(\cap_I B_I[\frac{1}{t}]\big)^{\varphi^h = p^d}$ alors son diviseur dans $\mathrm{Div}(Y)$ est φ-invariant. Il s'en suit que le diviseur de $t^n f$ est positif pour $n \gg 0$ et donc $t^n f \in B$ pour $n \gg 0$. Du théorème de Dieudonné-Manin on déduit donc que pour tout R,

$$\mathscr{V}_R = \mathscr{V}.$$

On montre ensuite que pour $R \in \{B[\frac{1}{t}], B^+[\frac{1}{t}], B_{cris}, (B_I[\frac{1}{t}])_I\}$

$$\mathscr{D}_R \circ \mathscr{V}_R(D,\varphi) = (D,\varphi).$$

Pour cela, puisque $(D \otimes_{K_0} \widehat{K}_0^{nr})^{G_K} = D$, quitte à remplacer K par $\widehat{K}^{nr}$ et G_K par I_K, on peut supposer que le corps résiduel de K est algébriquement clos. Utilisant le théorème de Dieudonné-Manin on est alors ramené au cas où (D,φ) est un isocristal simple. Ce cas là se démontre par un calcul explicite qui ne pose pas de problème.

Pour R comme précédemment et $M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ l'injectivité du morphisme naturel

$$\mathscr{V}_R \circ \mathscr{D}_R(M) \longrightarrow M$$

résulte du corollaire 10.2.8.

Il reste alors à démontrer l'indépendance en R du foncteur $\mathscr{D}_R$. Mais si $M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ et R est comme précédemment l'inclusion

$$\mathscr{V} \circ \mathscr{D}(M) \hookrightarrow M$$

induit par application de $\mathscr{D}_R$ une inclusion

$$\mathscr{D}_R \circ \mathscr{V} \circ \mathscr{D}(M) \hookrightarrow \mathscr{D}_R(M).$$

Le membre de gauche dans cette inclusion se réécrit

$$\mathscr{D}_R \circ \mathscr{V}_R \circ \mathscr{D}(M) = \mathscr{D}(M)$$

et on conclut. □

On peut maintenant donner la définition suivante et tirer les fruits de ce que l'on vient d'établir.

Définition 10.2.13. —

1. Une B_e-représentation de G_K, M, est cristalline si
$$\dim_{K_0} \mathscr{D}(M) = \mathrm{rg}_{B_e} M.$$
2. Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}^{G_K}_{X\setminus\{\infty\}}$ est cristallin si la B_e-représentation $H^0(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathscr{E}})$ est cristalline.
3. Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}^{G_K}_X$ est cristallin si sa restriction à $X \setminus \{\infty\}$ l'est.

Ainsi, un fibré équivariant $\mathscr{E}$ sur X est cristallin si et seulement si $\mathscr{E}^{an}[\frac{1}{t}]$ est plat comme « fibré équivariant sur $Y \setminus V(t)$ ».

Le foncteur composé

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K) & \longrightarrow & \mathrm{Fib}^{G_K}_X \longrightarrow \mathrm{Fib}^{G_K}_{X\setminus\{\infty\}} \xrightarrow{\mathscr{D}} \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0} \\ V & \longmapsto & V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X \end{array}$$

est le foncteur D_{cris} usuel. On en déduit donc *qu'une représentation galoisienne V est cristalline si et seulement si le fibré équivariant associé $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X$ est cristallin.*

Le théorème suivant ne pose alors pas de problème.

Théorème 10.2.14. — *Les foncteurs $\mathscr{D}$ et $\mathscr{V}$ induisent des équivalences inverses de catégories entre B_e-représentations cristallines et isocristaux. Cela définit un plongement de catégories tannakiennes*

$$\mathscr{V} : \varphi\text{-}Mod_{K_0} \hookrightarrow Rep_{B_e}(G_K).$$

Toute sous-représentation d'une B_e-représentation cristalline est cristalline. Si M est une telle représentation le foncteur $\mathscr{D}$ induit une bijection entre les sous-représentations de M et les sous isocristaux de $\mathscr{D}(M)$.

Enfin notons le critère suivant qui dit que le caractère cristallin peut se tester au point générique de la courbe.

Proposition 10.2.15. — *Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in Fib_{X\setminus\{\infty\}}$ est cristallin si et seulement si la $\mathcal{M}(Y)$-représentation*

$$\underline{\mathscr{E}}_\eta \otimes_{\mathbb{Q}_p(X)} \mathcal{M}(Y) \in Rep_{\mathcal{M}(Y)}(G_K)$$

est plate i.e.

$$\dim_{K_0} \left(\underline{\mathscr{E}}_\eta \otimes_{\mathbb{Q}_p(X)} \mathcal{M}(Y)\right)^{G_K} = rg(\underline{\mathscr{E}}).$$

Démonstration. — Utilisant la formule

$$\mathcal{M}(Y) = \varprojlim_I \mathrm{Frac}(B_I),$$

cela résulte de que pour I un intervalle de $]0,1[$ et $M \in \mathrm{Rep}_{B_I[\frac{1}{t}]}(G_K)$, M est plat si et seulement si $M \otimes_{B_I[\frac{1}{t}]} \mathrm{Frac}(B_I)$ est plat (prop. 10.2.6). □

10.3. Fibrés log-cristallins

10.3.1. L'anneau $B_{\log}$. — Rappelons qu'il y a un isomorphisme

$$\begin{array}{rcl} \mathcal{L} : 1+\mathfrak{m}_F & \xrightarrow{\sim} & B^{\varphi=p} \\ x & \longmapsto & \log[x]. \end{array}$$

On a un scindage canonique $\mathcal{O}_F^\times = k_F^\times \times 1 + \mathfrak{m}_F$ qui provient du relèvement de Teichmüller $[-] : k_F = \overline{k}_K \to \widehat{K}_0^{nr} \subset C$. Étendons le morphisme $\mathscr{L}$ à $\mathcal{O}_F^\times$ en posant

$$\mathscr{L}_{|k_F^\times} = 0.$$

Le morphisme de groupes $\mathscr{L}$ définit alors un morphisme d'anneaux

$$\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_F^\times \longrightarrow B.$$

Définition 10.3.1. — On note

$$B_{\log} = B \otimes_{\mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}}\mathcal{O}_F^\times} \mathrm{Sym}_{\mathbb{Z}} F^\times.$$

muni du morphisme

$$\mathscr{L} : F^\times \longrightarrow B_{\log}$$

étendant canoniquement $\mathscr{L} : \mathcal{O}_F^\times \to B$. On définit les opérateurs suivants :

1. φ est l'unique automorphisme de $B_{\log}$ étendant φ sur B et vérifiant

$$\varphi \circ \mathscr{L} = p\mathscr{L}.$$

2. $N : B_{\log} \to B_{\log}$ est l'unique B-dérivation vérifiant : si $x \in F^\times$ est tel que $v(x) = 1$ alors
$$N(\mathscr{L}(x)) = 1.$$
3. L'action de G_K sur $B_{\log}$ est l'unique extension de l'action sur B telle que $\mathscr{L}$ soit compatible à l'action de G_K : pour $\sigma \in G_K$ et $x \in F^\times$,
$$\mathscr{L}(x)^\sigma = \mathscr{L}(x^{\sigma-1}) + \mathscr{L}(x)$$
où $x^{\sigma-1} \in \mathcal{O}_F^\times$.

Le choix d'un élément $x \in F^\times$ vérifiant $v(x) = 1$ définit un isomorphisme
$$\begin{array}{rcl} B^+[X] & \xrightarrow{\sim} & B_{\log} \\ X & \longmapsto & \mathscr{L}(x). \end{array}$$
Via cet isomorphisme on a $\varphi(X) = pX$, $N(X) = 1$ et pour $\sigma \in G_K$, $X^\sigma = X + \mathscr{L}(x^{\sigma-1})$.

10.3.2. Fibré équivariant associé à un (φ, N)-module. —

Définition 10.3.2. — On note (φ, N)-mod$_{K_0}$ la catégorie des triplets (D, φ, N) où $(D, \varphi) \in \varphi$-Mod$_{K_0}$, $N : D \to D$ est linéaire et vérifie $N\varphi = p\varphi N$.

Bien sûr, un tel opérateur N est nécessairement nilpotent. Soit $(D, \varphi, N) \in (\varphi, N)$-Mod$_{K_0}$. Regardons
$$\bigoplus_{d \geq 0} \left(D \otimes_{K_0} B_{\log}\right)^{\varphi = p^d, N=0}.$$
C'est un module gradué sur
$$P = \bigoplus_{d \geq 0} B_{\log}^{\varphi = p^d, N=0}$$
muni d'une action semi-linéaire de G_K. Le choix d'un $x \in F^\times$ tel que $v(x) = 1$ détermine un isomorphisme
$$B[X] \xrightarrow{\sim} B_{\log}$$
pour lequel $N(X) = 1$ et $\varphi(X) = pX$. Cela définit pour tout $d \geq 0$ un isomorphisme
$$\begin{array}{rcl} (D \otimes B)^{\varphi = p^d} & \xrightarrow{\sim} & (D \otimes B_{\log})^{\varphi = p^d, N=0} \\ y & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} N^i(y).X^i. \end{array} \tag{4}$$
Ces isomorphismes définissent un isomorphisme de modules gradués
$$\bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B)^{\varphi = p^d} \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} (D \otimes_{K_0} B_{\log})^{\varphi = p^d, N=0}$$
Néanmoins cet isomorphisme n'est pas compatible à l'action de Galois. Plus précisément, si l'on pose
$$\ell og_{x,\sigma} = \mathscr{L}(x^{\sigma-1}),$$

alors cela définit un cocycle

$$(\ell og_{x,\sigma})_{\sigma\in G_K} \in Z^1\big(G_K, B^{\varphi=p}\big).$$

Le choix d'un $y \in F^\times$ vérifiant $v(y) = 1$ différent de x change le cocyle précédent par un cobord :

$$\ell og_{y,\sigma} = \ell og_{x,\sigma} + \mathscr{L}(yx^{-1})^\sigma - \mathscr{L}(yx^{-1}).$$

Via l'isomorphisme (4) l'action de G_K sur $(D \otimes B)^{\varphi=p^d}$ est donnée par

$$y \longmapsto \exp(-\ell og_{x,\sigma} N)(y^\sigma).$$

Des considérations précédentes on déduit la proposition qui suit.

Proposition 10.3.3. —

1. *Il y a un foncteur*

$$\begin{array}{rcl} \underline{\mathscr{E}}(-) : (\varphi, N)\text{-}Mod_{K_0} & \longrightarrow & Fib_X^{G_K} \\ (D, \varphi, N) & \longmapsto & \Big(\bigoplus_{d\geq 0} \big(D \otimes_{K_0} B_{\log}\big)^{\varphi=p^d, N=0}\Big)^\sim. \end{array}$$

2. *Après oubli de l'action de G_K on a*

$$\mathscr{E}(D, \varphi, N) \simeq \mathscr{E}(D, \varphi).$$

3. *L'opérateur de monodromie $N : (D, \varphi) \to (D, p\varphi)$ définit un morphisme dans $Fib_X^{G_K}$*

$$N : \underline{\mathscr{E}}(D, \varphi) \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}(D, p\varphi) = \underline{\mathscr{E}}(D, \varphi) \otimes \underline{\mathcal{O}}_X(-1).$$

Pour $x \in F^\times$ vérifiant $v(x) = 1$, on dispose d'un 1-cocyle

$$(\ell og_{x,\sigma})_\sigma \in Z^1(G_K, H^0(X, \underline{\mathcal{O}}_X(1))).$$

Alors,

$$(\ell og_{x,\sigma} \otimes \mathrm{Id} \circ N)_{\sigma\in G_K} \in Z^1\big(G_K, End(\mathscr{E}(D, \varphi))\big)$$

est un 1-cocyle en endomorphismes nilpotents dans $End(\mathscr{E}(D, \varphi))$ qui définit un 1-cocyle

$$\big(\exp(-\ell og_{x,\sigma} \otimes \mathrm{Id} \circ N)\big)_\sigma \in Z^1\big(G_K, Aut(\mathscr{E}(D, \varphi))\big).$$

Avec les notations de la définition 9.1.6 il y a alors un isomorphisme de fibrés G_K-équivariants

$$\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi, N) \simeq \underline{\mathscr{E}}(D, \varphi) \overset{G_K}{\wedge} \big(\exp(-\ell og_{x,\sigma} \otimes \mathrm{Id} \circ N)\big)_\sigma.$$

Remarque 10.3.4. — Supposons que l'on ait choisi $x = (x^{(n)})_{n\in\mathbb{N}} \in F = C^\flat$ de telle manière que $x^{(0)} \in K^\times$ et $|x^{(0)}| \neq 1$. Soit E la courbe elliptique de Tate sur K telle que $E^{rig} = \mathbb{G}_m^{rig}/(x^{(0)})^{\mathbb{Z}}$. On a donc $T_p(E) = \{(\bar{y}_n)_{n\geq 0} \mid \bar{y}_n \in \overline{K}^\times/(x^{(0)})^{\mathbb{Z}},\ \bar{y}_{n+1}^p =$

$\bar{y}_n$ et $\bar{y}_0 = 0\}$ où l'on note $\bar{y}_n$ la classe de $y_n \in \overline{K}^\times$ modulo $(x^{(0)})^{\mathbb{Z}}$. Il y a alors une suite exacte de représentation de G_K

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p(1) & \longrightarrow & T_p(E) & \longrightarrow & \mathbb{Z}_p & \longrightarrow & 0\ . \\ & & (\epsilon^{(n)})_{n\geq 0} & \longmapsto & \left(\overline{\epsilon^{(n)}}\right)_{n\geq 0} & & & & \\ & & & & (\bar{y}_n)_{n\geq 0} & \longmapsto & \lim\limits_{n\to+\infty} p^n \frac{v(y_n)}{v(x^{(0)})} & & \end{array}$$

On a alors $\ell og_{x,\sigma} \in \mathbb{Z}_p.t \subset B^{\varphi=p}$ et ce cocyle définit l'extension précédente de $\mathbb{Z}_p$ par $\mathbb{Z}_p(1)$.

Remarque 10.3.5. — La formule donnée dans le point (3) de la proposition précédente est similaire à la description des représentations ℓ-adiques de G_K via le théorème de la monodromie potentiellement semi-stable de Grothendieck. Plus précisément, soit $\ell \neq p$ et fixons une uniformisante π_K de K. Il y a un morphisme surjectif canonique

$$\begin{array}{rcl} t_\ell : I_K & \longrightarrow & \mathbb{Z}_\ell(1) \\ \sigma & \longmapsto & \left(\sigma\left(\pi_K^{1/\ell^n}\right)/\pi_K^{1/\ell^n}\right)_{n\geq 0} \end{array}$$

indépendant du choix des racines π_K^{1/ℓ^n} de π_K. Soit E la courbe de Tate sur K telle que $E^{rig} = \mathbb{G}_m^{rig}/\pi_K^{\mathbb{Z}}$. Comme dans la remarque 10.3.4 on a $T_\ell(E) = \{(\bar{y}_n)_{n\geq 0} \mid \bar{y}_n \in \overline{K}^\times/\pi_K^{\mathbb{Z}},\ \bar{y}_{n+1}^\ell = \bar{y}_n$ et $\bar{y}_0 = 0\}$ où l'on note $\bar{y}_n$ la classe de $y_n \in \overline{K}^\times$ modulo $\pi_K^{\mathbb{Z}}$. On a alors une suite exacte similaire à celle de la remarque 10.3.4

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell(1) \longrightarrow T_\ell(E) \longrightarrow \mathbb{Z}_\ell \longrightarrow 0.$$

Le choix d'une suite compatible de racines ℓ^n-ièmes de π_K dans $\overline{K}$, $\left(\pi_K^{1/\ell^n}\right)_{n\geq 0}$, définit un scindage de la suite exacte de $\mathbb{Z}_\ell$-modules précédente i.e. un scindage de la projection $T_\ell(E) \to \mathbb{Z}_\ell$ donné par $\mathbb{Z}_\ell \ni 1 \mapsto \left(\overline{\pi_K^{1/\ell^n}}\right)_{n\geq 0} \in T_p(E)$. Le cocyle associé est $c_\ell \in Z^1(G_K, \mathbb{Z}_\ell(1))$ défini par

$$c_\ell(\sigma) = \sigma\left(\pi_K^{1/\ell^n}\right)/\pi_K^{1/\ell^n}$$

et vérifie $c_{\ell|I_K} = t_\ell$. Soit maintenant $\rho : G_K \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation ℓ-adique de G_K telle que $\rho_{|I_K}$ se factorise à travers un sous-groupe ouvert et $N : \rho \to \rho(-1)$. Alors,

$$c_\ell N \in Z^1(G_K, \mathrm{End}(V))$$

où l'action de G_K sur $\mathrm{End}(V)$ est la représentation adjointe de ρ. Cela définit par exponentiation un cocyle

$$\exp(c_\ell N) \in Z^1(G_K, \mathrm{GL}(V))$$

et on peut définir la représentation ℓ-adique

$$\rho \overset{G_K}{\wedge} \exp(c_\ell N).$$

10.3.3. Description en termes de la surface $X_{\log}$. — Soit $z \in P$ non nul homogène de degré $d > 0$. Après avoir fixé $x \in F^\times$ tel que $v(x) = 1$ et donc un isomorphisme

$$\begin{array}{ccc} B[X] & \xrightarrow{\sim} & B_{\log} \\ X & \longmapsto & \mathscr{L}(x), \end{array}$$

on a une identification

$$B_{\log}[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=Id} = B[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=Id}\Big[\frac{X}{w}\Big]$$

où $w \in P_1$ est non nul et vérifie $w|z$. À partir de là on déduit facilement le lemme suivant.

Lemme 10.3.6. — *Il existe un unique faisceau quasi-cohérent $\mathscr{A}$ en $\mathcal{O}_X$-algèbres tel que, si $z \in P$ est homogène, alors*

$$\Gamma(D^+(z), \mathscr{A}) = \big(B_{\log}[\tfrac{1}{z}]\big)^{\varphi=Id}.$$

L'action de G_K sur $\mathcal{O}_X$ s'étend en une action compatible sur $\mathscr{A}$.

Définition 10.3.7. — On note

$$X_{\log} = \mathrm{Spec}(\mathscr{A}) \xrightarrow{\pi} X.$$

Le schéma $X_{\log}$ est muni d'une action de G_K et π commute à cette action. En fait, après oubli de l'action de G_K, $X_{\log} \to X$ est isomorphe à $\mathbb{V}(\mathcal{O}_X(1))$. Plus précisément on vérifie la proposition suivante.

Proposition 10.3.8. — *Soit $x \in F^\times$ vérifiant $v(x) = 1$ et $(\log_{x,s})_\sigma \in Z^1(G_K, B^{\varphi=p})$ le cocycle associé. Celui-ci définit un cocyle à valeurs dans les automorphismes affines de $\mathbb{V}(\mathcal{O}_X(1))/X$ par translations par un élément de $B^{\varphi=p} = H^0(X, \mathcal{O}_X(1)) \subset Aut\big(\mathbb{V}(\mathcal{O}_X(1))/X\big)$. On a alors, comme X-schéma muni d'une action de G_K*

$$X_{\log} = \mathbb{V}(\underline{\mathcal{O}}_X(1)) \overset{G_K}{\wedge} (\log_{x,s})_\sigma.$$

Contrairement au X-schéma muni d'une action de G_K $\mathbb{V}(\underline{\mathcal{O}}_X(1)) \to X$, $X_{\log} \to X$ ne possède pas de section G_K-invariante, la section nulle de $\mathbb{V}(\mathcal{O}_X(1))$ n'étant pas invariante par torsion par le cocycle de la proposition précédente.
On vérifie maintenant facilement le lemme qui suit.

Lemme 10.3.9. — *Comme fibrés G_K-équivariants on a une identification canonique*

$$\Omega^1_{X_{\log}/X} = \pi^* \underline{\mathcal{O}}_X(-1).$$

Le morphisme de faisceaux

$$d : \mathcal{O}_{X_{\log}} \longrightarrow \Omega^1_{X_{\log}/X} = \pi^* \mathcal{O}_X(-1)$$

se décrit sur l'ouvert principal $\pi^{-1}(D^+(z)) \subset X_{\log}$ comme

$$B_{\log}[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=Id} \xrightarrow{N} B_{\log}[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=p^{-1}} = B_{\log}[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=Id} \otimes_{B[\frac{1}{z}]^{\varphi=Id}} B[\tfrac{1}{z}]^{\varphi=p^{-1}}.$$

Soit maintenant $(D,\varphi,N) \in (\varphi,N)\text{-Mod}_{K_0}$. Le fibré G_K-équivariant $\pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)$ est muni d'une connexion canonique

$$\nabla_{can} = d \otimes 1 : \pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \longrightarrow \pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \otimes \Omega^1_{X_{\log}/X}.$$

Via le lemme 10.3.9 le morphisme $\mathcal{O}_X$-linéaire

$$N : \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}(D,p\varphi) = \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \otimes \underline{\mathcal{O}}_X(-1)$$

induit un morphisme linéaire de fibrés G_K-équivariants

$$\pi^*N : \pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \longrightarrow \pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi) \otimes \Omega^1_{X_{\log}/X}.$$

Définition 10.3.10. — Pour $(D,\varphi,N) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$ on pose

$$\nabla_N = \nabla_{can} + \pi^*N$$

comme connexion compatible à l'action de G_K sur $\pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)$.

Cela définit un foncteur de $(\varphi,N)\text{-Mod}_{K_0}$ vers la catégorie de tels fibrés équivariants à connexion. On vérifie alors la proposition suivante.

Proposition 10.3.11. — *On a l'égalité*

$$\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N) = \pi_*\big[\pi^*\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)\big]^{\nabla_N=0}.$$

10.3.4. Description en termes de B-paires. — Dans la suite $\log p$ désigne une variable formelle que l'on pourra spécialiser en un élément de K parfois. Ainsi, $K[\log p]$, resp. $B^+_{dR}[\log p]$, et l'anneau des polynômes à coefficients dans K, resp. B^+_{dR}, de la variable $\log p$. Le logarithme usuel (rigide analytique) $\log : 1+\mathfrak{m}_K \to K$ s'étend en un logarithme (localement analytique) $\log : K^\times \to K[\log p]$.

***Lemme 10.3.12* (cf. [25] sec. 4.2.1)**. — *Le composé*

$$\mathcal{O}_F^\times \xrightarrow{\mathscr{L}} B^{\varphi=p} \hookrightarrow B^+_{dR}$$

s'étend naturellement en un morphisme compatible à l'action de G_K

$$F^\times \longrightarrow B^+_{dR}[\log p].$$

Démonstration. — Soit $x \in F^\times = (C^\flat)^\times$ tel que $x^{(0)} = p$. On a alors $\frac{[x]}{p} - 1 \in \mathrm{Fil}^1 B^+_{dR}$ et on peut donc définir

$$\begin{aligned}\log([x]) &= \log p + \log\big(\tfrac{[x]}{p}\big)\\ &= \log p + \sum_{i\geq 1}(-1)^{i-1}\frac{\big(\frac{[x]}{p}-1\big)^i}{i} \in B^+_{dR}[\log p].\end{aligned}$$

Pour $y \in F^\times$ il existe des entiers positifs a, b, tels que $a \geq 1$ et

$$\frac{y^a}{x^b} \in \mathcal{O}_F^\times.$$

On pose alors

$$\mathscr{L}(y) = \frac{1}{a}\Big(\mathscr{L}(y^a x^{-b}) + b\log[x]\Big).$$

On vérifie que $\mathscr{L}(y)$ ne dépend pas des choix faits précédemment (les choix de x, a et b) et définit bien un morphisme commutant à l'action de G_K, $\mathscr{L} : F^\times \to B_{dR}^+[\log p]$. $\square$

Corollaire 10.3.13. — *À chaque choix d'un élément* $\log p \in K$ *est associé un morphisme* $B_{\log} \to B_{dR}^+$ *étendant l'inclusion* $B \subset B_{dR}^+$. *À un tel choix est également associé une trivialisation de l'image du cocyle* $(\log_{x,\sigma})_\sigma \in Z^1(G_K, B^{\varphi=p})$ *dans* $Z^1(G_K, B_{dR}^+)$ *i.e. dans* B_{dR}^+, $\log_{x,\sigma} = \mathscr{L}(x) - \mathscr{L}(x)^\sigma$.

Remarque 10.3.14. — Le corollaire précédent s'interprète de la façon suivante : le module de Tate d'une courbe elliptique de Tate est une représentation de de Rham.

La preuve suivante nous a été communiquée par Pierre Colmez.

Proposition 10.3.15 **([25] théo. 4.2.4)**. — *Pour chaque choix de* $\log p \in K$, *le morphisme déduit* $B_{\log} \otimes_{K_0} K \to B_{dR}^+$ *est injectif.*

Démonstration. — Si $a \in K^\times$, choisissons $a^\flat \in C^\flat$ tel que $(a^\flat)^{(0)} = a$ et notons $c_a : G_K \to \mathbb{Q}_p$ la fonction définie par $\sigma(a^\flat)/a^\flat = \epsilon^{c_a(\sigma)}$. On a alors $c_a(\sigma)t = (\sigma-1)\cdot\log\frac{[a^\flat]}{a}$.

On veut prouver que $u = \log\frac{[p^\flat]}{p}$ est transcendant sur $\mathrm{Frac}(B)$. Supposons le contraire, et notons $P = T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 \in \mathrm{Frac}(B)[T]$ le polynôme minimal de u. Comme $\sigma(u) = u + c_p(\sigma)t$, si $\sigma \in G_K$, on a aussi $P^\sigma(u + c_p(\sigma)t) = 0$, et par unicité du polynôme minimal, on a

$$T^n + a_{n-1}T^{n-1} + \cdots + a_0 = (T + c_p(\sigma)t)^n + \sigma(a_{n-1})(T + c_p(\sigma)t)^{n-1} + \cdots + \sigma(a_0),$$

et donc, en particulier, $(\sigma - 1)\cdot a_{n-1} = -nc_p(\sigma)t$.

On en déduit qu'il existe

$$u' \in \mathrm{Frac}(B)\cap B_{dR}^+, \text{ tel que } (\varphi - p)\cdot u' = 0 \text{ et } (\sigma - 1)\cdot u' = c_p(\sigma)t, \text{ pour tout } \sigma \in G_K.$$

En effet, si $u_0 = \frac{-1}{n}a_{d-1}$, alors $u_0 \in \mathrm{Frac}(B) \cap B_{dR}^+$ est tel que $(\sigma - 1)\cdot u_0 = c_p(\sigma)t$, pour tout $\sigma \in G_K$. Il s'ensuit que

$$(\sigma - 1)(\varphi - p)\cdot u_0 = (\varphi - p)(\sigma - 1)\cdot u_0 = (\varphi - p)\cdot(c_p(\sigma)t) = 0,$$

et donc $(\varphi - p)\cdot u_0 \in \mathrm{Frac}(B)^{G_K} = K_0$. Comme $\varphi - p : K_0 \to K_0$ est bijectif, il existe $a \in K_0$ tel que $(\varphi - p)\cdot a = (\varphi - p)\cdot u_0$, et il suffit de poser $u' = u_0 - a$.

En posant $v = \frac{u'}{t}$, cela fournit un élément de $\mathrm{Frac}(B)^{\varphi=Id}$ vérifiant $(\chi(\sigma)\sigma - 1 - v)\cdot v = c_p(\sigma)$. Comme $\mathrm{Frac}(B)^{\varphi=Id} = \mathrm{Frac}(B_e)$, et comme ∞ est le seul diviseur de X ayant une orbite finie sous G_K (prop. 10.1.1), on en tire $v \in B_e$ puisque les conjugués de v sous G_K vivent dans un $\mathbb{Q}_p$-espace de dimension finie.

Enfin, $tv = u' \in B_{dR}^+$, et donc $u' \in B^{\varphi=p}$, et il existe $x \in \mathcal{O}_{C^\flat}^\times$ tel que $u' = \log[x]$. Maintenant, $\log[x] - \log \frac{[p^\flat]}{p}$ est fixe par G_K. Comme

$$(\sigma - 1) \cdot (\log[x] - \log \tfrac{[p^\flat]}{p}) = \log \left[\tfrac{g(x/p^\flat)}{x/p^\flat}\right],$$

il s'ensuit que $\frac{\sigma(x/p^\flat)}{x/p^\flat}$ est une racine de l'unité, pour tout $\sigma \in G_K$. Par compacité de G_K, cela implique qu'il existe N tel que $(x/p^\flat)^N$ soit fixe par G_K, et donc appartienne à k_K, ce qui est absurde car $v(x/p^\flat) = -1$, et donc $(x/p^\flat)^N \notin \mathcal{O}_{C^\flat}$.

Ceci permet de conclure. □

Venons en au calcul de la B-paire associée à un (φ, N)-module. On vérifie maintenant aisément la proposition suivante.

Proposition 10.3.16. — *Il y a un isomorphisme de Spec($\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}$)-schémas munis d'une action de G_K*

$$Spec(B_{dR}^+[\log p]) \xrightarrow{\sim} X_{\log} \times_X Spec(\widehat{\mathcal{O}}_{X,\infty}).$$

De cela on déduit le corollaire suivant.

Corollaire 10.3.17. — *La B-paire associée au fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi, N)$ est*

$$\Big(D \otimes_{K_0} B_{\log}[\tfrac{1}{t}]\Big)^{\varphi=Id, N=0}, \Big(D \otimes_{K_0} B_{dR}^+[\log p]\Big)^{N=0}$$

où $N : B_{dR}^+[\log p] \to B_{dR}^+[\log p]$ est la B_{dR}^+-dérivation telle que $N(\log p) = 1$.

Proposition 10.3.18. — *Il y a un isomorphisme de B_{dR}^+-représentations de G_K*

$$\widehat{\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi, N)}_\infty \xrightarrow[\log p=0]{\sim} D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$$

Démonstration. — En spécialisant la variable $\log p$ en 0 on obtient un morphisme

$$(D \otimes_{K_0} B_{dR}^+[\log p])^{N=0} \longrightarrow D \otimes_{K_0} B_{dR}^+.$$

On vérifie alors que l'application

$$y \longmapsto \sum_{i \geq 0} \frac{(-1)^i}{i!} N^i(y)(\log p)^i$$

est un inverse de l'application précédente. □

Remarque 10.3.19. — Le point de la proposition précédente est que le cocyle $(\ell og_{x,\sigma})_\sigma$ devient trivial dans B_{dR}^+ et que donc dans l'isomorphisme du point (3) de la proposition 10.3.3, le cocyle $\alpha = (\exp(-\ell og_{x,\sigma} \otimes \mathrm{Id} \circ N))_\sigma$ devenant trivial dans $\mathrm{GL}_{B_{dR}^+}(\widehat{\mathscr{E}(D, \varphi)}_\infty)$,

$$(\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi) \overset{G_K}{\wedge} \alpha)\widehat{\ }_\infty = \widehat{\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi)}_\infty \overset{G_K}{\wedge} \alpha \simeq \widehat{\underline{\mathscr{E}}(D, \varphi)}_\infty.$$

10.3.5. Fibrés log-cristallins. — Utilisant la proposition 10.3.15 qui implique que l'anneau $B_{\log}$ est G_K-régulier, on démontre la proposition suivante analogue aux résultats de la section 10.2.5.

Proposition 10.3.20. — *1. Il y a deux foncteurs adjoints*

$$Rep_{B_e}(G_K) \underset{\mathscr{V}_{\log}}{\overset{\mathscr{D}_{\log}}{\rightleftarrows}} (\varphi, N)\text{-}Mod_{K_0}$$

définis par

$$\begin{aligned} \mathscr{D}_{\log}(M) &= \left(M \otimes_{B_e} B_{\log}[\tfrac{1}{t}]\right)^{G_K} \\ \mathscr{V}_{\log}(D, \varphi, N) &= \left(D \otimes_{K_0} B_{\log}[\tfrac{1}{t}]\right)^{\varphi = Id, N=0}. \end{aligned}$$

2. L'adjonction

$$Id \xrightarrow{\sim} \mathscr{D}_{\log} \circ \mathscr{V}_{\log}$$

est un isomorphisme et le foncteur $\mathscr{V}_{\log}$ définit un plongement de la catégorie Tannakienne (φ, N)-Mod_{K_0} dans la catégorie Tannakienne $Rep_{B_e}(G_K)$.

3. Pour $M \in RepB_e(G_K)$ on a

$$\dim_{K_0} \mathscr{D}_{\log}(M) \leq rg(M)$$

et

$$\mathscr{V}_{\log} \circ \mathscr{D}_{\log}(M) \hookrightarrow M.$$

qui est un isomorphisme si et seulement si $\dim_{K_0} \mathscr{D}_{\log}(M) = rg(M)$.

On adopte alors les définitions suivantes.

Définition 10.3.21. — 1. Une B_e-représentation $M \in \mathrm{Rep}_{B_e}(G_K)$ est log-cristalline si $\dim_{K_0} \mathscr{D}_{\log}(M) = \mathrm{rg}(M)$.

2. Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}^{G_K}_{X \setminus \{\infty\}}$ est log-cristallin si la B_e-représentation correspondante $\Gamma(X \setminus \{\infty\}, \underline{\mathscr{E}})$ est log-cristalline.

3. Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}^{G_K}_X$ est log-cristallin si sa restriction à $X \setminus \{\infty\}$ l'est.

Ainsi, un fibré $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}^{G_K}_X$ est log-cristallin si et seulement si il existe $(D, \varphi, N) \in (\varphi, N)\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0}$ tel que

$$\underline{\mathscr{E}}_{|X \setminus \{\infty\}} \simeq \underline{\mathscr{E}}(D, \varphi, N)_{|X \setminus \{\infty\}}.$$

Si c'est le cas un tel (φ, N)-module est complètement déterminé canoniquement par application du foncteur $\mathscr{D}_{\log}$.

10.4. Fibrés équivariants de de Rham

10.4.1. B_{dR}^+-représentations génériquement plates. — Rappelons que pour tout $i \in \mathbb{Z}$, $B_{dR}^{G_K} = K$ et que $(\mathrm{Fil}^i B_{dR})^{G_K} = K$ si $i \leq 0$ et 0 sinon. Notons $\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$ les représentations semi-linéaire continues de G_K à valeurs dans un B_{dR}-espace vectoriel de dimension finie. La condition de continuité signifie qu'il existe un B_{dR}^+-réseau G_K-invariant sur lequel l'action est continue (et alors l'action est automatiquement continue sur n'importe quel réseau G_K-invariant). Comme dans la section 10.2.2 on a deux foncteurs adjoints

$$\mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K) \underset{-\otimes_K B_{dR}}{\overset{(-)^{G_K}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Vect}_K$$

Pour $W \in \mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$, le morphisme d'ajonction

$$W^{G_K} \otimes_K B_{dR} \longrightarrow W$$

est injectif, $\dim_K W^{G_K} \leq \dim_{B_{dR}} W$ avec égalité si et seulement si

$$W^{G_K} \otimes_K B_{dR} \xrightarrow{\sim} W.$$

Ainsi, l'image essentielle du foncteur $- \otimes_K B_{dR}$ consiste en les W tels que

$$\dim_K W^{G_K} = \dim_{B_{dR}} W.$$

On adopte maintenant la terminologie suivante. On pense à $\mathrm{Spec}(B_{dR}^+)$ comme étant un disque formel, $\mathrm{Spec}(B_{dR})$ étant le disque formel épointé associé.

Définition 10.4.1. —
1. Une B_{dR}-représentation W est plate si $\dim_K W^{G_K} = \dim_{B_{dR}} W$.
2. Une B_{dR}^+-représentation W est génériquement plate si la B_{dR}-représentation $W[\frac{1}{t}]$ est plate.

On a donc une équivalence

$$- \otimes_K B_{dR} : \mathrm{Vect}_K \xrightarrow{\sim} \mathrm{Rep}_{B_{dR}}^{\mathrm{plate}}(G_K).$$

Remarque 10.4.2. — Soit $K_\infty | K$ l'extension cyclotomique. Dans [**28**] le second auteur a associé à une B_{dR}-représentation un module à connexion sur $K_\infty((t))$ et montré que la B_{dR}-représentation est plate si et seulement si ce module à connexion est engendré par ses section horizontales i.e. est régulier. Cela justifie la terminologie « plate » utilisée.

On va maintenant classifier les B_{dR}^+-représentations génériquement plates.
Appelons filtration d'un K-espace vectoriel de dimension finie V une filtration décroissante $\mathrm{Fil}^\bullet V$ vérifiant $\mathrm{Fil}^i V = V$ pour $i \ll 0$ et $\mathrm{Fil}^i V = 0$ pour $i \gg 0$. Pour une telle filtration on définit une filtration décroissante sur $V \otimes_K B_{dR}$ en posant

$$\mathrm{Fil}^n(V \otimes_K B_{dR}) = \sum_{i+j=n} \mathrm{Fil}^i V \otimes_K \mathrm{Fil}^j B_{dR}.$$

Cette filtration est formée de B_{dR}^+-réseaux G_K-invariants dans $V \otimes_K B_{dR}$. De plus,

$$\mathrm{Fil}^n(V \otimes_K B_{dR}) = t^n \mathrm{Fil}^0(V \otimes_K B_{dR}).$$

Proposition 10.4.3. — *Soit V un K-espace vectoriel de dimension finie. L'application*

$$\mathrm{Fil}^\bullet V \longmapsto \mathrm{Fil}^0(V \otimes_K B_{dR})$$

induit une bijection entre les filtrations de V et les B_{dR}^+-réseaux stables sour G_K dans $V \otimes_K B_{dR}$. L'inverse de cette bijection associe à un réseau W la filtration définie par

$$\mathrm{Fil}^n V = (t^n W)^{G_K}, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Démonstration. Soit $\mathrm{Fil}^\bullet V$ une filtration de V. Il y a une inclusion pour tout n

$$\mathrm{Fil}^n V \subset (\mathrm{Fil}^n(V \otimes B_{dR}))^{G_K}.$$

Afin de vérifier que c'est une égalité, choisissons un scindage de la filtration :

$$\begin{aligned} V &= \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} V^i \\ \mathrm{Fil}^n V &= \bigoplus_{i \geq n} V^i. \end{aligned}$$

On a alors

$$\mathrm{Fil}^n(V \otimes B_{dR}) = \bigoplus_{i+j \geq n} V^i \otimes_K \mathrm{Fil}^j B_{dR}.$$

Puisque $(\mathrm{Fil}^i B_{dR})^{G_K}$ vaut 0 si $i > 0$ et K si $i \leq 0$ on conclut que

$$\mathrm{Fil}^n V = \mathrm{Fil}^n(V \otimes B_{dR})^{G_K}.$$

Dans l'autre direction, soit W un B_{dR}^+-réseau galois invariant dans $V \otimes B_{dR}$ et $\mathrm{Fil}^\bullet V = (t^\bullet W)^{G_K}$ la filtration induite de V. On veut montrer que l'inclusion

$$\sum_{i+j=0} (t^i W)^{G_K} \otimes \mathrm{Fil}^j B_{dR} \subset W$$

est une égalité. Il suffit de montrer qu'il existe des entiers $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que

$$W \simeq \bigoplus_{i=1}^n \mathrm{Fil}^{a_i} B_{dR}$$

comme B_{dR}^+-représentations. On procède pour cela par récurrence sur $\dim V$. Le cas $\dim V = 1$ est évident. Soit donc $\dim V > 1$, $V' \subset V$ un sous-espace de dimension $\dim V - 1$ et $V'' = V/V'$. Posons $W' = W \cap V' \otimes B_{dR}$ et $W'' = \mathrm{Im}(W \to V'' \otimes B_{dR})$. On a donc une suite exacte de B_{dR}^+-représentations

$$0 \longrightarrow W' \longrightarrow W \longrightarrow W'' \longrightarrow 0.$$

Par hypothèse de récurrence appliquée à V' et W', il existe $(a_1, \ldots, a_{n-1}) \in \mathbb{Z}^{n-1}$ tels que $W' \simeq \oplus_{i=1}^{n-1} \mathrm{Fil}^{a_i} B_{dR}$. Soit $a_n \in \mathbb{Z}$ tel que $W'' \simeq \mathrm{Fil}^{a_n} B_{dR}$. Puisque $W[1/t] \simeq B_{dR}^n$, la classe de l'extension précédente est donnée par un élément de

$$\ker(H^1(G_K, \oplus_{i=1}^{n-1} t^{a_i - a_n} B_{dR}^+) \longrightarrow H^1(G_K, B_{dR}^{n-1})).$$

Or ce noyau est trivial car on vérifie aisément que pour tout $k \in \mathbb{Z}$,

$$\ker(H^1(G_K, \mathrm{Fil}^k B_{dR}) \to H^1(G_K, B_{dR})) = 0.$$

□

La proposition qui suit se déduit des considérations précédentes. Le point (2) résulte soit de la démonstration précédente, soit du choix d'un scindage de la filtration de notre espace vectoriel.

Proposition 10.4.4. — *1. Les foncteurs $(V, \mathrm{Fil}^\bullet V) \mapsto \mathrm{Fil}^0(V \otimes B_{dR})$ et $W \mapsto \big((W[\frac{1}{t}]^{G_K}, (t^\bullet W)^{G_K})\big)$ induisent des équivalences inverses de catégories entre K-espaces vectoriels de dimension finie filtrés et B_{dR}^+-représentations génériquement plates.*

2. Une B_{dR}^+-représentation W de rang n est génériquement plate si et seulement si il existe $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{Z}^n$ tels que $W \simeq \oplus_{i=1}^n t^{a_i} B_{dR}^+$.

On remarquera l'analogie suivante avec les Grassmaniennes affines. Soit V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie. Considérons

$$\mathrm{Gr}(\mathbb{C}) = \mathrm{GL}\big(V \otimes \mathbb{C}((t))\big)/\mathrm{GL}\big(V \otimes C[\![t]\!]\big).$$

On pense à $\mathrm{GL}(V \otimes \mathbb{C}((t)))$ comme étant l'analogue algébrique du groupe de lacets formé des applications continues $S^1 \to \mathrm{GL}(V)$. Le groupe $\mathrm{GL}\big(V \otimes C[\![t]\!]\big)$ est un analogue des lacets homotopiquements triviaux. Il y a une action de $\mathbb{G}_m$ sur la Grassmanienne affine Gr qui est l'analogue de l'action du groupe de Jauge $U(1)$ sur $\mathrm{Hom}(S^1, \mathrm{GL}(V))$ qui consiste à appliquer une rotation à un lacet. Si $\lambda \in \mathbb{G}_m$ cette action est tout simplement obtenue en remplaçant t par λt. Si T est un tore maximal de $G = \mathrm{GL}(V)$ et $\mu \in X_*(T)_+$ on peut définir une cellule de Schubert affine Gr_μ dans Gr qui forment une stratification du ind-schéma Gr,

$$\mathrm{Gr} = \bigcup_{\mu \in X_*(T)_+} \mathrm{Gr}_\mu.$$

À un tel μ est associé un sous-groupe parabolique P_μ de $\mathrm{GL}(V)$. Il y a alors une fibration Zariski localement triviale en espaces affines

$$\pi_\mu : \mathrm{Gr}_\mu \longrightarrow G/P_\mu$$

de la cellule de Schubert affine au dessus de la Grassmanienne usuelle. Au niveau des $\mathbb{C}$-points il s'agit de l'application qui à un réseau $\Lambda \subset V \otimes \mathbb{C}((t))$ associe la filtration

$$\mathrm{Fil}^\bullet V = \big(t^\bullet \Lambda \cap V \otimes \mathbb{C}[\![t]\!]\big)/V \otimes t\mathbb{C}[\![t]\!].$$

Le fait est qu'alors

$$\pi_\mu : \mathrm{Gr}_\mu^{\mathbb{G}_m} \xrightarrow{\sim} G/P_\mu.$$

On a alors

$$\mathrm{Gr}^{\mathbb{G}_m} = \coprod_{\mu \in X_*(T)_+} G/P_\mu.$$

Au niveau des $\mathbb{C}$-points cela dit que les réseaux $\mathbb{C}^\times$-invariants dans $V \otimes \mathbb{C}((t))$ sont en bijection avec les filtrations de V via la même recette que celle donnée dans la proposition 10.4.4. Maintenant, si $\sigma \in G_K$ on a $t^\sigma = \chi_{cycl}(\sigma)t$ et *on peut alors penser à G_K comme étant l'analogue du groupe de jauge $U(1)$, si $V \in \mathrm{Vect}_K$ on a*

$$\left[\mathrm{GL}(V \otimes_K B_{dR})/\mathrm{GL}(V \otimes B_{dR}^+)\right]^{G_K} = \coprod_{\mu \in X_*(T)_+} G(K)/P_\mu(K).$$

10.4.2. Fibrés de de Rham. —

Définition 10.4.5. — Un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ est de de Rham si la B_{dR}^+-représentation $\widehat{\mathscr{E}}_\infty$ est génériquement plate.

Exemple 10.4.6. — D'après la proposition 10.3.16 et le corollaire 10.3.17 tout fibré log-cristallin est de De Rham.

Exemple 10.4.7. — Une représentation $V \in \mathrm{Rep}_{\mathbb{Q}_p}(G_K)$ est de de Rham si et seulement si le fibré équivariant $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} \mathcal{O}_X$ est de de Rham.

De la proposition 10.4.4 on tire la suivante.

Proposition 10.4.8. — *Il y a une équivalence de catégories entre la catégorie des fibrés équivariants de de Rham sur X et celle des triplets $(M, \mathrm{Fil}^\bullet V, \iota)$ où $M \in Rep_{B_e}(G_K)$, $\mathrm{Fil}^\bullet V$ est une filtration de $V \in \mathrm{Vect}_K$ et*

$$\iota : M \otimes_{B_e} B_{dR} \xrightarrow{\sim} V \otimes_K B_{dR}.$$

10.5. Faiblement admissible implique admissible

10.5.1. Rappels sur les φ-modules filtrés. — Soit $\mathrm{VectFil}_K$ la catégorie exacte des K-espaces vectoriels de dimension finie munis d'une filtration décroissante finie comme dans la section 10.4.1. Rappelons que l'on appelle polygone de Hodge de $\mathrm{Fil}^\bullet V$ le polygone convexe d'origine $(0,0)$ et de pentes $i \in \mathbb{Z}$ avec multiplicité $\dim_K \mathrm{gr}^i V$. Son point terminal a pour ordonnée

$$t_H(\mathrm{Fil}^\bullet V_K) = \sum_{i \in \mathbb{Z}} i \dim_K \mathrm{gr}^i V.$$

Cela définit une fonction additive

$$t_H : \mathrm{VectFil}_K \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Si $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$ on note

$$t_H(D,\varphi)$$

le point terminal de son polygone de Newton. Enfin on note

$$\mathrm{ht}(D,\varphi) = \dim_{K_0} D.$$

Cela définit deux fonctions additives sur la catégorie abélienne $\varphi\text{-Mod}_{K_0}$

$$t_H, \mathrm{ht} : \varphi\text{-Mod}_{K_0} \longrightarrow \mathbb{Z}.$$

Définition 10.5.1. — 1. On note $\varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$ la catégorie des φ-modules filtrés $(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ où $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$ et $\mathrm{Fil}^\bullet D_K \in \mathrm{VectFil}_K$.

2. On pose

$$\begin{aligned} \deg(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) &= t_H(\mathrm{Fil}^\bullet D_K) - t_N(D,\varphi) \\ \mathrm{rg}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) &= \mathrm{ht}(D,\varphi). \end{aligned}$$

Cela définit deux fonctions additives

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{N} \\ \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} \arrow[ur, "\mathrm{rg}"] \arrow[dr, "\deg"'] & \\ & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Posons $\mu = \frac{\deg}{\mathrm{rg}}$. Le formalisme de la section 5.5.1 s'applique. Plus précisément, le foncteur

$$\begin{aligned} \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0} &\longrightarrow \mathrm{Vect}_K \\ (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) &\longmapsto D_K \end{aligned}$$

est un « foncteur fibre générique ». On dispose donc de filtrations de Harder-Narasimhan dans ce contexte. Rappelons la définition suivante.

Définition 10.5.2. — Un φ-module filtré est faiblement admissible s'il est semi-stable de pente 0.

Bien sûr il ne s'agit pas de la définition originelle (cf. [**26**]) mais d'une réinterprétation de la condition de faible admissibilité due à Faltings.

10.5.2. Classification des fibrés cristallins en termes de φ-modules filtrés. — Si $(D,\varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{K_0}$ on a

$$\widehat{\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)}_\infty = D_K \otimes_K B_{dR}^+.$$

De la proposition 10.4.3 on déduit donc la proposition suivante.

Proposition 10.5.3. — *Il y a une équivalence de catégories exactes*

$$\begin{array}{ccc} \varphi\text{-}ModFil_{K/K_0} & \xrightarrow{\sim} & Fib_X^{G_K,cris} \\ (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

où $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ *est la modification* G_K*-équivariante de* $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)$ *telle que*

$$\underline{\mathscr{E}}(\widehat{D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K})_\infty = \mathrm{Fil}^0(D_K \otimes_K B_{dR}).$$

Un inverse du foncteur précédent associe au fibré cristallin $\underline{\mathscr{E}}$ l'isocristal

$$\mathscr{D}\big(\underline{\mathscr{E}}_{|X\setminus\{\infty\}}\big)$$

muni de la filtration donnée par $\big(t^\bullet \widehat{\underline{\mathscr{E}}}_\infty\big)^{G_K}$.

Le lemme qui suit dit que le polygone de Hodge de la modification intervenant dans la proposition précédente coïncide avec celui associé à la filtration.

Lemme 10.5.4. — *Soient* $\mathrm{Fil}^\bullet V \in VectFil_K$ *et* $W = \mathrm{Fil}^0(V \otimes_K B_{dR})$. *Si*

$$\begin{array}{rcl} V \otimes B_{dR}^+ & = & \langle e_1,\dots,e_n\rangle \\ \mathrm{Fil}^0(V\otimes_K B_{dR}) & = & \langle t^{-a_1}e_1,\dots,t^{-a_n}e_n\rangle \end{array}$$

avec $a_1 \le \cdots \le a_n$ *alors le polygone de Hodge de* $\mathrm{Fil}^\bullet V$ *a pour pentes* $(a_1,\dots,a_n)$.

Démonstration. — Il suffit de choisir un scindage de la filtration comme au début de la preuve de 10.4.3. □

On en déduit le lemme qui suit.

Lemme 10.5.5. — *On a*

$$\deg \mathscr{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) = \deg(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K).$$

Démonstration. — Cela résulte de la formule donnant le degré d'un fibré modifié

$$\deg \mathscr{E}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) = \deg \mathscr{E}(D,\varphi) - \Big[D\otimes_{K_0} B_{dR}^+ : \mathrm{Fil}^0(D_K\otimes_K B_{dR})\Big].$$

□

10.5.3. Faiblement admissible implique admissible. — On peut maintenant récolter les fruits de nos travaux.

Proposition 10.5.6. — *Soit* $A = (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \in \varphi\text{-}ModFil_{K/K_0}$ *ayant pour filtration de Harder-Narasimhan*

$$0 = A_0 \subsetneq A_1 \subsetneq \cdots \subsetneq A_r = A.$$

Alors, la filtration de Harder-Narasimhan de $\underline{\mathscr{E}}(A)$ *est donnée par*

$$0 = \underline{\mathscr{E}}(A_0) \subsetneq \underline{\mathscr{E}}(A_1) \subsetneq \cdots \subsetneq \underline{\mathscr{E}}(A_r) = \underline{\mathscr{E}}(A).$$

En particulier, A est faiblement admissible si et seulement si $\underline{\mathscr{E}}(A)$ *est semi-stable de pente* 0.

Démonstration. — Les sous-fibrés localement facteur direct de $\mathscr{E}(A)$ sont en bijection avec les sous-fibrés localement facteur direct de $\mathscr{E}(D,\varphi)$. De plus, d'après le théorème 10.2.14 les sous-fibrés G_K-invariants de $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi)_{|X\setminus\{\infty\}}$ sont en bijection avec les sous-isocristaux de (D,φ). Le résultat découle alors de l'invariance de la filtration de Harder-Narasimhan sous l'action de Galois et du lemme 10.5.5. □

On vérifie immédiatement que pour un tel A,

$$H^0(X,\underline{\mathscr{E}}(A)) = V_{cris}(A).$$

Rappelons que l'on dit que A est admissible si

$$\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(A) = \mathrm{rg}(A).$$

Théorème 10.5.7. — *Soit A un φ-module filtré. Il est faiblement admissible si et seulement si il est admissible. De plus :*

1. *Si $t_H(A) > t_N(A)$ alors $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(A) = +\infty$.*
2. *Si $t_H(A) = t_N(A)$, A est admissible si et seulement si $\dim_{\mathbb{Q}_p} V_{cris}(A) < +\infty$.*

Démonstration. — Cela résulte du théorème de classification des fibrés. Plus précisément, $\dim H^0(X,\mathcal{O}_X(\lambda))$ vaut 0 si $\lambda < 0$, 1 si $\lambda = 0$ et $+\infty$ si $\lambda > 0$. □

Remarque 10.5.8. — Le même schéma de preuve permet également de montrer qu'un (φ,N)-module filtré est admissible si et seulement si il est faiblement admissible.

10.6. De Rham implique potentiellement log-cristallin

10.6.1. Fibrés log-cristallins et φ-modules filtrés. —

Définition 10.6.1. — On a note (φ,N)-ModFil_{K/K_0} la catégorie des (φ,N)-modules filtrés c'est à dire les quadruplets $(D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ où $(D,\varphi,N) \in (\varphi,N)$-$\mathrm{Mod}_{K_0}$ et $\mathrm{Fil}^\bullet D_K \in \mathrm{VectFil}_K$.

Si $(D,\varphi,N) \in (\varphi,N)$-$\mathrm{Mod}_{K_0}$ on a une identification

$$\widehat{\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N)}_\infty = D \otimes_{K_0} B_{dR}^+$$

obtenue en posant $\log p = 0$ (prop. 10.3.18). Comme dans la proposition 10.5.3 on obtient le résultat suivant.

Proposition 10.6.2. — *Il y a une équivalence de catégories*

$$\begin{array}{ccc} (\varphi,N)\text{-}ModFil_{K/K_0} & \xrightarrow{\sim} & Fib_X^{G_K,log\text{-}cris} \\ (D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) & \longmapsto & \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \end{array}$$

où $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ st la modification équivariante de $\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N)$ telle que

$$\widehat{\underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)}_\infty = \mathrm{Fil}^0\big(D_K \otimes_K B_{dR}\big).$$

10.6.2. Fibrés potentiellement log-cristallins. — Si $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ et $L|K$ est une extension de degré fini de K dans $\overline{K}$ on note $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_L}$ le fibré équivariant obtenu par restriction de l'action de G_K en une action de G_L. Supposons $L|K$ galoisienne et soit $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_L}$ de fibré sous-jacent $\mathscr{E}$. Si $\tau \in G_L$ on note $u_\tau : \tau^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$ l'action de τ. Pour $\sigma \in G_K$ notons

$$\underline{\mathscr{E}}^{(\sigma)} \in \mathrm{Fib}_X^{G_L}$$

le fibré équivariant de fibré sous-jacent $\sigma^*\mathscr{E}$ et tel que l'action de $\tau \in G_L$ soit donnée par

$$\tau^*(\sigma^*\mathscr{E}) = \sigma^*((\sigma\tau\sigma^{-1})^*\mathscr{E}) \xrightarrow{\sigma^* u_{\sigma\tau\sigma^{-1}}} \sigma^*\mathscr{E}.$$

On a la formule

$$(\underline{\mathscr{E}}^{(\sigma_1)})^{(\sigma_2)} = \underline{\mathscr{E}}^{(\sigma_1\sigma_2)}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G_K.$$

Si $f : \underline{\mathscr{E}} \to \underline{\mathscr{E}}'$ est un morphisme de fibrés G_L-équivariants il induit un morphisme $f^{(\sigma)} : \underline{\mathscr{E}}^{(\sigma)} \to \underline{\mathscr{E}}'^{(\sigma)}$ qui est simplement le morphisme $\sigma^* f$ au niveau des fibrés. Lorsque $\sigma \in G_L$, il y a un isomorphisme canonique

$$can_\sigma : \underline{\mathscr{E}}^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{E}}$$

donné par u_σ au niveau des fibrés.

Définition 10.6.3. — Supposons $L|K$ galoisienne. Pour $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_L}$ on appelle donnée de descente de L à K sur $\underline{\mathscr{E}}$ la donnée pour tout $\sigma \in G_K$ d'un isomorphisme

$$f_\sigma : \underline{\mathscr{E}}^{(\sigma)} \xrightarrow{\sim} \underline{\mathscr{E}}$$

dans $\mathrm{Fib}_X^{G_L}$ vérifiant

$$\begin{aligned} f_{\sigma_1\sigma_2} &= f_{\sigma_2} \circ (f_{\sigma_1})^{(\sigma_2)}, \quad \sigma_1, \sigma_2 \in G_K, \\ f_\sigma &= can_\sigma, \quad \sigma \in G_L. \end{aligned}$$

Si $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$, $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}}$ est canoniquement muni d'une donnée de descente de L à K. En effet, si $\mathscr{E}$ est le fibré sous-jacent à $\underline{\mathscr{E}}$, si pour $\sigma \in G_K$, $u_\sigma : \sigma^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$ définit l'action de G_K, il suffit de poser $f_\sigma = u_\sigma$ dans la définition précédente. On a alors la proposition suivante dont la démonstration est formelle.

Proposition 10.6.4. — *Le foncteur qui à $\underline{\mathscr{E}} \in Fib_X^{G_K}$ associe $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}} \in Fib_X^{G_L}$ muni de sa donnée de descente induit une équivalence de catégories entre $Fib_X^{G_K}$ et la catégorie des fibrés G_L-équivariants munis d'une donnée de descente de L à K.*

Définition 10.6.5. — Un fibré G_K équivariant $\underline{\mathscr{E}}$ sur X est dit potentiellement log-cristallin s'il existe une extension finie L de K dans $\overline{K}$ telle que $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}}$ soit un fibré G_L-équivariant log-cristallin.

Supposons $L|K$ galoisienne. Alors, $L_0|K_0$ l'est également et il y a un morphisme de restriction $\mathrm{Gal}(L|K) \to \mathrm{Gal}(L_0|K_0)$.

Définition 10.6.6. — 1. Un $(\varphi, N, G_{L/K})$-module filtré est un (φ, N)-module filtré $(D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet D_L) \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{L/L_0}$ tel que via $\mathrm{Gal}(L|K) \to \mathrm{Gal}(L_0|K_0)$, D est muni d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L|K)$ commutant à φ et N et laissant invariant la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_L$ de $D \otimes_{L_0} L$. On note $(\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0}$ la catégorie correspondante.

2. On note
$$(\varphi, N, G)\text{-ModFil} = \bigcup_{L/K} (\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0}$$
où $L|K$ parcourt les extensions galoisiennes de degré fini de K dans $\overline{K}$. On l'appelle catégorie des (φ, N, G)-modules filtrés.

Dans le point (2) de la définition précédente, on utilise le fait que si $L'|L|K$ sont des extensions galoisiennes finies de K alors le foncteur d'extension des scalaires
$$(\varphi, N, G_{L/K})\text{-ModFil}_{L/L_0} \longrightarrow (\varphi, N, G_{L'/K})\text{-ModFil}_{L'/L'_0}$$
est pleinement fidèle.

Proposition 10.6.7. — *La catégorie des (φ, N, G)-modules filtrés est équivalente à celle des fibrés G_K-équivariants potentiellement log-cristallins.*

Démonstration. Pour $A = (D, \varphi, N, \mathrm{Fil}^\bullet N_L) \in (\varphi, N)\text{-ModFil}_{L/L_0}$ et $\sigma \in \mathrm{Gal}(L|K)$ on calcule que
$$\underline{\mathscr{E}}(A)^{(\sigma)} = \underline{\mathscr{E}}(A^{(\sigma)})$$
où
$$A^{(\sigma)} = (D \otimes_{L_0, \sigma_{|L_0}} L_0, \varphi \otimes \varphi, N \otimes Id, \mathrm{Fil}^\bullet D_L \otimes_{L,\sigma} L).$$
Il suffit alors d'appliquer la proposition 10.6.4. □

10.6.3. Enoncé du théorème. — Rappelons qu'un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}} \in \mathrm{Fib}_X^{G_K}$ est de de Rham si la B_{dR}^+-représentation $\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_\infty$ est génériquement plate i.e. $\widehat{\underline{\mathcal{E}}}_\infty[\frac{1}{t}]$ est engendré par ses invariants sous G_K. Géométriquement cela s'interprète en disant que le tiré en arrière du fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}}$ sur le « disque formel épointé » $\mathrm{Spec}(B_{dR})$ est trvial.

Lemme 10.6.8. — *Tout fibré G_K-équivariant potentiellement de de Rham est de de Rham.*

Démonstration. Il suffit de vérifier que toute B_{dR}-représentation potentiellement plate est plate. Mais si $L|K$ est galoisienne de degré fini et $W \in \mathrm{Rep}_{B_{dR}}(G_K)$, W^{G_L} est un $L = B_{dR}^{G_L}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(L|K)$. Puisque $W^{G^K} = (W^{G_L})^{\mathrm{Gal}(L|K)}$ on a $\dim_L W^{G_L} = \dim_K W^{G_K}$ (Hilbert 90). □

Puisque tout fibré équivariant log-cristallin est de de Rham, on en déduit la proposition suivante.

Proposition 10.6.9. — *Tout fibré G_K-équivariant potentiellement log-cristallin est de de Rham.*

Le théorème principal de ce chapitre est la réciproque à la proposition précédente.

Théorème 10.6.10. — *Tout fibré G_K-équivariant de de Rham sur X est potentiellement log-cristallin.*

Le théorème précédent appliqué aux fibrés équivariants semi-stables de pente 0 *permet de retrouver le théorème de la monodromie p-adique : toute représentation de de Rham est potentiellement log-cristalline.*

Étant donné un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}}$ de de Rham on peut le modifier au point ∞ en un fibré équivariant $\underline{\mathscr{E}}'$ de de Rham tel que

$$\widehat{\underline{\mathscr{E}}'}_\infty = \left(\widehat{\underline{\mathscr{E}}}_\infty[\tfrac{1}{t}]\right)^{G_K} \otimes_K B_{dR}^+$$

i.e. la B_{dR}^+-représentation $\widehat{\underline{\mathscr{E}}'}_\infty$ est plate. Le théorème 10.6.10 se réduit donc à l'énoncé suivant.

Théorème 10.6.11. — *Soit $\underline{\mathscr{E}} \in Fib_X^{G_K}$ tel que $\widehat{\underline{\mathscr{E}}}_\infty$ soit une B_{dR}^+-représentation plate de G_K. Alors $\underline{\mathscr{E}}$ est potentiellement log-cristallin.*

10.6.4. Le cas semi-stable. — On commence par démontrer le théorème 10.6.11 lorsque $\underline{\mathscr{E}}$ est semi-stable. Soit donc λ la pente de $\underline{\mathscr{E}}$. Si $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d,h) = 1$, quitte à remplacer K par une extension non-ramifiée de degré fini, on peut supposer que k_K contient $\mathbb{F}_{p^h}$. D'après le théorème 10.1.7 il existe alors un D_λ^{op}-espace vectoriel de dimension finie V et une représentation continue

$$\rho : G_K \longrightarrow \mathrm{GL}_{D_\lambda^{op}}(V)$$

tels que

$$\underline{\mathscr{E}} \simeq V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda).$$

Comme C-représentation de G_K,

$$\underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)_\infty \otimes k(\infty) = C^h$$

où l'on rappelle que $k(\infty) = C$. Il y a de plus un isomorphisme

$$D_\lambda \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \simeq M_h(C)$$

tel que l'action de D_λ sur $O_X(\lambda)$ induise sur $\mathcal{O}_X(\lambda)_\infty \otimes k(\infty)$ l'action canonique de l'algèbre de matrices $M_h(C)$ sur C^h. On a alors un isomorphisme de C-représentations de G_K

$$(V \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda))_\infty \otimes k(\infty) \simeq V_C \otimes_{M_h(C)} C^h$$

où l'on note $V_C = V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. On a donc

$$\underline{\mathscr{E}}_\infty \otimes k(\infty) \simeq V_C \otimes_{M_h(C)} C^h$$

où l'action semi-linéaire de $\sigma \in G_K$ est donnée par $(\rho(\sigma) \otimes \sigma) \otimes \sigma^{\oplus h}$, $(\rho(\sigma) \otimes \sigma)$ désignant l'action sur $V \otimes_{\mathbb{Q}_p} C$. Rappelons qu'il y a une équivalence de Morita entre $M_h(C)$-modules à droites et C-espaces vectoriels. Au $M_h(C)$-module M elle associe $M \otimes_{M_h(C)} C^h$. Au C-espace vectoriel W elle associe le module $W \otimes_C C^h$, l'action de la matrice $A \in M_h(C)$ étant donnée par $Id \otimes {}^tA$. On a alors un isomorphisme naturel

$$V_C \simeq (V_C \otimes_{M_h(C)} C^h) \otimes_C C^h.$$

C'est un isomorphisme de C-représentations de G_K. On en déduit que V_C est Hodge-Tate de poids 0. D'après Sen ([**58**] 3.2) il en résulte que si $I_K \subset G_K$ est le sous-groupe d'inertie alors $\rho_{|I_K}$ est d'image finie. Après une extension $L|K$ de degré fini on a donc $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}} \simeq (R_{L/K}V) \otimes_{D_\lambda} \underline{\mathcal{O}}_X(\lambda)$ avec $R_{L/K}V$ non-ramifiée. Le fibré $R_{L/K}\underline{\mathscr{E}}$ est donc cristallin. On a donc démontré le théorème 10.6.11 lorsque $\underline{\mathscr{E}}$ est semi-stable.

10.6.5. Dévissage à un énoncé de cohomologie galoisienne. —

10.6.5.1. Calculs d'extensions. — Soient $A_1 = (D_1, \varphi_1, N_1)$ et $A_2 = (D_2, \varphi_2, N_2)$ deux (φ, N)-modules filtrés. Le foncteur

$$\begin{array}{rcl} (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0} & \longrightarrow & \mathrm{Fib}_X^{G_K} \\ A & \longmapsto & \underline{\mathscr{E}}(A) \end{array}$$

induit une application

$$\alpha_{A_1,A_2} : \mathrm{Ext}^1_{(\varphi,N)\text{-Mod}_{K_0}}\big(A_1, A_2\big) \to \ker\big(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathscr{E}}(A_1), \underline{\mathscr{E}}(A_2)) \to \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)}\big(\widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_2)}_\infty\big)\big).$$

Le membre de droite

$$\ker\big(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathscr{E}}(A_1), \underline{\mathscr{E}}(A_2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)}\big(\widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_2)}_\infty\big)\big)$$

consiste en les classes d'extensions de $\underline{\mathscr{E}}(A_1)$ par $\underline{\mathscr{E}}(A_2)$ qui sont des fibrés équivariants de de Rham. On a

$$\begin{array}{rcl}
\mathrm{Ext}^1_{(\varphi,N)\text{-Mod}_{K_0}}\big(A_1, A_2\big) & = & \mathrm{Ext}^1_{(\varphi,N)\text{-Mod}_{K_0}}(\mathbf{1}, A_1^\vee \otimes A_2) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathscr{E}}(A_1), \underline{\mathscr{E}}(A_2)) & = & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(A_1)^\vee \otimes \underline{\mathscr{E}}(A_2)) \\
& = & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(A_1^\vee \otimes A_2)) \\
\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)}\big(\widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_2)}_\infty\big) & = & \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)}(B^+_{dR}, \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_1)}_\infty^\vee \otimes \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_2)}_\infty) \\
& = & H^1\big(G_K, D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} B^+_{dR}\big) \\
& = & D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} H^1(G_K, B^+_{dR}) \\
& = & D_1^\vee \otimes_{K_0} D_2 \otimes_{K_0} H^1(G_K, C).
\end{array}$$

Le lemme suivant permet de calculer les extensions de (φ, N)-modules dans le cas dont nous aurons besoin plus tard.

Lemme 10.6.12. — *Pour* $(D_1, \varphi_1, N_1), (D_2, \varphi_2, N_2) \in (\varphi, N)\text{-}Mod_{K_0}$ *n'ayant aucune pente de Dieudonné-Manin en commun il y a un isomorphisme*

$$\mathcal{H}om(D_1, D_2)^{\varphi=p^{-1}} \xrightarrow{\sim} Ext^1_{(\varphi,N)\text{-}Mod_{K_0}}\big((D_1, \varphi_1, N_1), (D_2, \varphi_2, N_2)\big).$$

Démonstration. Soit (E, φ, N) qui est une extension entre nos deux (φ, N)-modules. Puisque (D_1, φ_1) et (D_2, φ_2) n'ont pas de pente en commun, la suite exacte associée de φ-modules est canoniquement scindée. On peut donc supposer que

$$(E, \varphi) = (D_1, \varphi_1) \oplus (D_2, \varphi_2).$$

Dans une telle décomposition, l'opérateur de monodromie N est de la forme

$$N = \begin{pmatrix} N_1 & 0 \\ f & N_2 \end{pmatrix}$$

où $f \in \mathrm{Hom}_{K_0}(D_1, D_2)$. La condition $N\varphi = p\varphi N$ se traduit alors en l'équation

$$f \circ \varphi_1 = p\varphi_2 \circ f$$

soit encore

$$\varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1} = p^{-1} f.$$

□

Notons

$$(D, \varphi, N) = (D_1, \varphi_1, N_1)^\vee \otimes (D_2, \varphi_2, N_2).$$

Faisons maintenant l'hypothèse suivante : les pentes de (D_1, φ_1) sont strictement plus grandes que celles de (D_2, φ_2). Les pentes de Harder-Narasimhan du fibré $\mathscr{E}(D_1, \varphi_1)$ sont donc strictement plus petites que celles de $\mathscr{E}(D_2, \varphi_2)$. D'après la proposition 9.2.3 on a donc

$$\begin{aligned} \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathscr{E}}(A_1), \underline{\mathscr{E}}(A_2)) &= H^1(G_K, \mathrm{Hom}(\mathscr{E}(A_1), \mathscr{E}(A_2))) \\ &= H^1\big(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log})^{\varphi=Id, N=0}\big). \end{aligned}$$

L'application α_{A_1,A_2} s'identifie donc à l'application

$$\beta_{D,\varphi,N} : D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow \ker\Big(H^1\big(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}\big) \to H^1\big(G_K, D \otimes_{K_0} C\big)\Big).$$

Celle-ci est définie pour tout (φ, N)-module filtré (D, φ, N) de pentes strictement négatives, $\beta_{D,\varphi,N} = \alpha_{\mathbf{1},(D,\varphi,N)}$ où $\mathbf{1} = (K_0, \varphi, 0)$. On vérifie le lemme suivant par un calcul explicite.

Lemme 10.6.13. — *Soit* (D, φ) *un* φ*-module de pentes strictement négatives que l'on voit comme un* (φ, N)*-module en posant* $N = 0$*. Alors,*

$$\begin{aligned} \beta_{D,\varphi,0} : D^{\varphi=p^{-1}} &\longrightarrow H^1(G_K, (D \otimes_{K_0} B)^{\varphi=Id}) \\ a &\longmapsto [(a \otimes \log_{x,\sigma})_\sigma] \end{aligned}$$

où $(\log_{x,\sigma})_\sigma \in Z^1(G_K, B^{\varphi=p})$ *est le* 1*-cocyle défini dans la section 10.3.2.*

10.6.5.2. Dévissage à énoncé de cohomologie galoisienne d'espaces de Banach-Colmez. — Soit $\underline{\mathscr{E}}$ un fibré G_K-équivariant tel que la B^+_{dR}-représentation $\widehat{\underline{\mathscr{E}}}_\infty$ soit plate. Notons

$$0 = \underline{\mathscr{E}}_0 \subsetneq \underline{\mathscr{E}}_1 \subsetneq \cdots \subsetneq \underline{\mathscr{E}}_r = \underline{\mathscr{E}}$$

sa filtration de Harder-Narasimhan. Toute B^+_{dR}-représentation qui est un sous-quotient d'une B^+_{dR}-représentation plate est elle même plate. Il en résulte que pour $0 \leq i < j \leq r$, $\widehat{(\underline{\mathscr{E}}_j/\underline{\mathscr{E}}_i)_\infty}$ est plate. Si $r = 1$ on sait d'après la section 10.6.4 que $\underline{\mathscr{E}}$ est potentiellement associé à un (φ, N)-module. Procédons maintenant par récurrence sur r et supposons donc $r > 1$ et $\underline{\mathscr{E}}_{r-1}$ potentiellement associé à un (φ, N)-module. Quitte à remplacer K par une extension de degré fini on peut donc supposer que

$$\underline{\mathscr{E}}/\underline{\mathscr{E}}_{r-1} = \underline{\mathscr{E}}(A_1), \quad \underline{\mathscr{E}}_{r-1} = \underline{\mathscr{E}}(A_2)$$

avec $A_1, A_2 \in (\varphi, N)\text{-Mod}_{K_0}$. La classe de l'extension équivariante

$$0 \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}_{r-1} \longrightarrow \underline{\mathscr{E}} \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}/\underline{\mathscr{E}}_{r-1} \longrightarrow 0$$

vit dans

$$\ker\big(\mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathscr{E}}(A_1), \underline{\mathscr{E}}(A_2)) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Rep}_{B^+_{dR}}(G_K)}\big(\widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_1)}_\infty, \widehat{\underline{\mathscr{E}}(A_2)}_\infty\big)\big).$$

D'après les calculs d'extension de la section précédente, afin de montrer que $\underline{\mathscr{E}}$ est associé à un (φ, N)-module extensions de A_1 par A_2, on est ramené à démontrer la proposition suivante.

Proposition 10.6.14. — *Soit* (D, φ, N) *un* (φ, N)*-module de pentes strictement négatives. Alors,*

$$\beta_{D,\varphi,N} : D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow \ker\Big(H^1\big(G_K, (D \otimes_{K_0} B_{\log})^{\varphi=Id, N=0}\big) \to H^1\big(G_K, D \otimes_{K_0} C\big)\Big)$$

est un isomorphisme.

Commençons par remarquer que la pleine fidélité du foncteur associant à un (φ, N)-module un fibré équivariant implique que $\beta_{D,\varphi,N}$ est toujours injective (si l'extension de fibrés équivariants associée à une extension de (φ, N)-modules est scindée alors l'extension de (φ, N)-modules l'est également). Il reste donc à montrer sa surjectivité.

Montrons maintenant qu'il suffit de vérifier la proposition 10.6.14 précédente lorsque $N = 0$ et D est isocline. Pour cela soit

$$D = \bigoplus_{i=1}^{m} D_i$$

la décomposition en parties isoclines de D où D_i est de pente λ_i avec $\lambda_1 > \cdots > \lambda_m$. Puisque $N : (D, \varphi) \to (D, p\varphi)$, $N_{|D_m} = 0$ et $(D_m, \varphi, 0)$ est un sous-(φ, N)-module de

(D,φ,N). Notons $D' = D_m$ et $D'' = D/D'$ comme (φ,N)-modules. On a bien sûr une suite exacte

$$0 \longrightarrow (D')^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow D^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow (D'')^{\varphi=p^{-1}} \longrightarrow 0.$$

La suite exacte de fibrés équivariants

$$0 \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}(D',\varphi) \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N) \longrightarrow \underline{\mathscr{E}}(D'',\varphi,N) \longrightarrow 0$$

induit une suite exacte

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}\big(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(D',\varphi)\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}\big(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(D,\varphi,N)\big) \longrightarrow \mathrm{Ext}^1_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}\big(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(D'',\varphi,N)\big).$$

En effet,

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Fib}_X^{G_K}}(\underline{\mathcal{O}}_X, \underline{\mathscr{E}}(D'',\varphi,N)) = \mathrm{Hom}_{(\varphi,N)\text{-}\mathrm{Mod}_{K_0}}(\mathbf{1},(D'',\varphi,N)) = 0$$

car (D'',φ) ne possède pas de pente nulle. La proposition 9.2.3 permet de réécrire la suite exacte précédente sous la forme

$$0 \longrightarrow H^1(G_K,(D'\otimes B^+)^{\varphi=\mathrm{Id}}) \longrightarrow H^1(G_K,(D\otimes B^+_{\log})^{\varphi=Id,N=0}) \longrightarrow H^1(G_K,(D''\otimes B^+_{\log})^{\varphi=Id,N=0}).$$

Afin d'abréger les notations prenons la définition suivante.

Définition 10.6.15. — Pour un (φ,N)-module M on note

$$H^1_g(G_K,(M\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}) = \ker\big(H^1(G_K,(M\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0} \to H^1(G_K,M\otimes B^+_{dR})\big).$$

De la suite exacte précédente on déduit une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^1_g(G_K,(D'\otimes B)^{\varphi=\mathrm{Id}}) \longrightarrow H^1_g(G_K,(D\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}) \longrightarrow H^1_g(G_K,(D''\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}).$$

On a donc un diagramme commutatif à lignes exactes

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & D'^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{D',\varphi}"] & D^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{D,\varphi,N}"] & D''^{\varphi=p^{-1}} \arrow[r] \arrow[d, "\beta_{D'',\varphi,N}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & H^1_g(G_K,(D'\otimes B)^{\varphi=\mathrm{Id}}) \arrow[r] & H^1_g(G_K,(D\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}) \arrow[r] & H^1_g(G_K,(D''\otimes B_{\log})^{\varphi=Id,N=0}). &
\end{tikzcd}$$

Il en résulte que si $\beta_{D',\varphi}$ et $\beta_{D'',\varphi,N}$ sont des isomorphismes alors $\beta_{D,\varphi,N}$ est un également un. Par récurrence sur le nombres de pentes de l'isocristal (D,φ) on est donc ramené à montrer la proposition suivante.

Proposition 10.6.16. — *Soit (D,φ) un isocristal isocline de pente strictement négative.*

1. *Si la pente de (D,φ) est différente de -1 alors $H^1_g\big(G_K,(D\otimes B)^{\varphi=Id}\big) = 0$.*
2. *Si (D,φ) est de pente -1 alors l'injection*

$$\begin{array}{rcl} \beta_{D,\varphi} : D^{\varphi=p^{-1}} & \longrightarrow & H^1_g\big(G_K,(D\otimes B)^{\varphi=Id}\big) \\ a & \longmapsto & [(a\otimes \log_{x,\sigma})_\sigma] \end{array}$$

est un isomorphisme.

Soit (D, φ) comme dans le théorème précédent. Remarquons maintenant que l'on peut supposer k_K algébriquement clos. Soient en effet $I_K \subset G_K$ le sous-groupe d'inertie. Si $M = (D \otimes B^+)^{\varphi = Id}$, il y a une suite d'inflation restriction

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(k|k_K), M^{I_K}) \to H^1(G_K, M) \to H^1(I_K, M)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)} \to H^2(\mathrm{Gal}(k|k_K), M^{I_K}).$$

Puisque $(B^+)^{I_K} = W(k)_{\mathbb{Q}}$ on a

$$M^{I_K} = (D \otimes_{K_0} W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi = Id} = 0$$

car (D, φ) ne possède pas de pente nulle. Il y a donc un isomorphisme

$$\mathrm{Res}_{I_K}^{G_K} : H^1(G_K, M) \xrightarrow{\sim} H^1(I_K, M)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)}.$$

Soit K^{nr} l'extension maximale non-ramifiée de K dans $\overline{K}$. Puisque pour $i > 0$, $H^i(\mathrm{Gal}(k|k_K), k) = 0$, par approximations successives on a

$$H^i(\mathrm{Gal}(k|k_K), \widehat{K^{nr}}) = 0, \quad i > 0.$$

Rappelons de plus que d'après Tate, $C^{I_K} = \widehat{K^{nr}}$. La suite d'inflation restriction

$$0 \to H^1(\mathrm{Gal}(k|k_K), C^{I_K}) \to H^1(G_K, C) \to H^1(I_K, C)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)} \to H^2(\mathrm{Gal}(k|k_K), C^{I_K})$$

fournit donc un isomorphisme

$$\mathrm{Res}_{I_K}^{G_K} : H^1(G_K, C) \xrightarrow{\sim} H^1(I_K, C)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)}.$$

Mettant ensemble les deux isomorphismes de restriction que l'on vient d'établir on obtient un isomorphisme

$$\mathrm{Res}_{I_K}^{G_K} : H_g^1\big(G_K, (D \otimes B^+)^{\varphi = Id}\big) \xrightarrow{\sim} H_g^1\big(I_K, (D \otimes B^+)^{\varphi = Id}\big)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)}.$$

Puisque $D = (D \otimes_{K_0} w(k)_{\mathbb{Q}})^{\mathrm{Gal}(k|k_K)}$ on obtient donc que si

$$\beta_{(D,\varphi)\otimes W(k)_{\mathbb{Q}}} : (D \otimes W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi = p^{-1}} \to H_g^1\big(I_K, (D \otimes B^+)^{\varphi = Id}\big)^{\mathrm{Gal}(k|k_K)}$$

est un isomorphisme alors $\beta_{D,\varphi}$ en est un. On est donc ramené à démontrer le théorème lorsque k_K est algébriquement clos.

Si k_K est algébriquement clos on peut décomposer l'isocristal isocline (D, φ) en somme directe d'isocristaux simples. La proposition 10.6.16 se réduit donc à la proposition suivante de Colmez.

Proposition 10.6.17 **([13] prop. 10.11)**. — *Supposons k_K algébriquement clos. Soient d, h deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Si*

$$\begin{array}{rcl} u : (B^+)^{\varphi^h = p^d} & \longrightarrow & C^h \\ x & \longmapsto & (\theta(x), \theta(\varphi(x)), \ldots, \theta(\varphi^{h-1}(x)) \end{array}$$

notons

$$H_g^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h = p^d}\big) = \ker\Big(H^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h = p^d}\big) \xrightarrow{u_*} H^1\big(G_K, C^h\big)\Big).$$

1. *Si $d = h = 1$ alors $H^1_g\big(G_K, (B^+)^{\varphi=p}\big)$ est un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1 engendré par la classe du cocycle $(\log_{x,\sigma})_\sigma$, classe qui est celle de l'extension $0 \to \mathbb{Q}_p(1) \to V_p(E) \to \mathbb{Q}_p \to 0$ associée à une courbe elliptique de Tate E sur K via le plongement $\mathbb{Q}_p(1) = \mathbb{Q}_p.t \subset (B^+)^{\varphi=p}$.*
2. *Si $(d,h) \neq (1,1)$ alors*
$$H^1_g\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}\big) = 0.$$

10.6.5.3. Interprétation en termes de l'exponentielle de Bloch-Kato des puissances du caractère de Lubin-Tate. — Soient $d, h > 0$ avec $(d,h) = 1$. Notons $\chi_{\mathcal{LT}_h} : G_K \to \mathbb{Q}_{p^h}^\times$ le caractère de Lubin-Tate. Il y a une suite exacte de G_K-modules
$$0 \longrightarrow \chi^d_{\mathcal{LT}_h} \longrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \longrightarrow B^+_{dR}/t^d B^+_{dR} \longrightarrow 0.$$
Celle-ci fournit une suite exacte
$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\delta} H^1(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h}) \longrightarrow H^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}\big) \longrightarrow H^1(G_K, B^+_{dR}/t^d B^+_{dR}) = H^1(G_K, C)$$
où δ est l'exponentielle de Bloch-Kato de $\chi^d_{\mathcal{LT}_h}$. On a donc
$$\operatorname{coker}(\delta) = \ker\Big(H^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}\big) \xrightarrow{\theta_*} H^1(G_K, C)\Big).$$

L'application composée
$$\chi^d_{\mathcal{LT}_h} \hookrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \hookrightarrow B^+_{dR}$$
est à valeurs dans $t^d B^+_{dR}$ et définit donc par composition avec la projection sur $\operatorname{gr}^d B^+_{dR}$ une application
$$\chi^d_{\mathcal{LT}_h} \longrightarrow C(d).$$
Pour $0 < i < h$, on a une application composée
$$\chi^d_{\mathcal{LT}_h} \hookrightarrow (B^+)^{\varphi^h=p^d} \xrightarrow{\theta\circ\varphi^i} C.$$
Mises ensembles cela définit une application
$$\chi^d_{\mathcal{LT}_h} \longrightarrow C(d) \oplus C^{h-1}$$
qui fournit la décomposition de Hodge-Tate de $\chi^d_{\mathcal{LT}_h}$
$$\chi^d_{\mathcal{LT}_h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C \xrightarrow{\sim} C(d) \oplus C^{h-1}.$$
On a donc
$$\begin{aligned} H^1_g(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h}) &:= \ker\Big(H^1(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h}) \longrightarrow H^1(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h} \otimes_{\mathbb{Q}_p} C)\Big) \\ &= \ker\Big(H^1\big(G_K, (B^+)^{\varphi^h=p^d}\big) \xrightarrow{(\theta_*, \theta\circ\varphi_*, \ldots, \theta\circ\varphi_*^{h-1})} H^1(G_K, C^h)\Big) \end{aligned}$$
qui paramètre les extensions de $\mathbb{Q}_p$ par $\chi^d_{\mathcal{LT}_h}$ qui sont de de Rham. De façon équivalente, $H^1(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h})$ paramètre les extensions de $\mathbb{Q}_{p^h}$-représentations de $\mathbb{Q}_{p^h}$ par $\chi^d_{\mathcal{LT}_h}$. La classe d'une telle extension
$$0 \longrightarrow \chi^d_{\mathcal{LT}_h} \longrightarrow V \longrightarrow \mathbb{Q}_{p^h} \longrightarrow 0$$

est dans $H^1_g(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h})$ si et seulement si V est de de Rham comme $\mathbb{Q}_p$-représentation.

Voici maintenant la traduction de la proposition 10.6.17 en termes de représentations galoisiennes.

Proposition 10.6.18. — *Soient $d, h > 0$ avec $(d, h) = 1$. Notons $\chi_{\mathcal{LT}_h} : G_K \to \mathbb{Q}_{p^h}^\times$ le caractère de Lubin-Tate.*

1. *Si $d = h = 1$, l'exponentielle de Bloch-Kato $\delta : K \to H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1))$ a pour conoyau un $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel de dimension 1. En d'autres termes, si V est une extension de $\mathbb{Q}_p$ par $\mathbb{Q}_p(1)$ alors soit V est cristalline isomorphe au module de Tate d'une courbe elliptique ayant bonne réduction ordinaire, soit V est semi-stable isomorphe au module de Tate d'une courbe elliptique de Tate.*
2. *Si $(d, h) \neq (1, 1)$, l'exponentielle de Bloch-Kato*
$$\delta : K \longrightarrow H^1(G_K, \chi^d_{\mathcal{LT}_h})$$
est un isomorphisme. En d'autres termes, toute $\mathbb{Q}_{p^h}$-représentation de dimension 2 qui est une extension de $\mathbb{Q}_{p^h}$ par $\chi^d_{\mathcal{LT}_h}$ et qui est de de Rham en tant que $\mathbb{Q}_p$-représentation est cristalline.

Remarque 10.6.19. — Le cas (1) de la proposition précédente découle en fait facilement de la théorie de Kümmer (cf. [**51**]). Plus précisément, si $\widehat{K^\times}$ désigne le complété p-adique de $K^\times$, la théorie de Kümmer fournit une identification
$$H^1(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) = \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p.$$
Il y a une application exponentielle
$$\begin{array}{rcl} \exp : K & \longrightarrow & \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \\ x & \longmapsto & \exp(p^n x) \otimes p^{-n}, \quad n \gg 0 \end{array}$$
où $\exp(p^n x) \in 1 + \mathfrak{m}_K \subset \widehat{K^\times}$. Cette application s'identifie à l'exponentielle de Bloch-Kato. La valuation $v : K^\times \to \mathbb{Z}$ s'étend en une application $v : \widehat{K^\times} \to \mathbb{Z}_p$ et on a une suite exacte
$$0 \longrightarrow K \xrightarrow{\exp} \widehat{K^\times} \otimes_{\mathbb{Z}_p} \mathbb{Q}_p \xrightarrow{v \otimes Id} \mathbb{Q}_p \longrightarrow 0.$$

10.6.5.4. Preuve alternative lorsque le corps résiduel est fini d'après Hyodo. — Supposons que le corps résiduel de K est fini c'est à dire K est une extension de degré fini de $\mathbb{Q}_p$ et reprenons la preuve du théorème **??** à la proposition 10.6.16, juste avant le dévissage au cas d'un corps résiduel algébriquement clos.

Soit donc (D, φ) un isocristal isocline de pente strictement négative.

Lemme 10.6.20. — *Il existe une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ de D_K telle que $(D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)$ soit admissible et $\mathrm{Fil}^i D_K = 0$ si $i > 0$.*

Démonstration. Si (D,φ) est simple il suffit de choisir une filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ telle que $t_H(D_K,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) = t_N(D,\varphi)$ et $\mathrm{Fil}^i D_K = 0$ lorsque $i > 0$ (cette dernière conditions est possible car la pente de D est strictement négative). En général, supposons que l'on ait une extensions d'isocristaux

$$0 \longrightarrow (D',\varphi) \longrightarrow (D,\varphi) \longrightarrow (D'',\varphi) \longrightarrow 0.$$

Soit $\mathrm{Fil}^\bullet D'_K$, resp. $\mathrm{Fil}^\bullet D''_K$, une filtration admissible de (D',φ), resp. (D'',φ), telle que $\mathrm{Fil}^i D'_K = 0$, resp. $\mathrm{Fil}^i D''_K = 0$, lorsque $i > 0$. Soit $u : D'' \to D$ une section K_0-linéaire de $D' \to D''$. Posons alors $\mathrm{Fil}^\bullet D_K = \mathrm{Fil}^\bullet D'_K + u(\mathrm{Fil}^\bullet D''_K)$. La suite de φ-modules filtrés

$$0 \longrightarrow (D',\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D'_K) \longrightarrow (D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K) \longrightarrow (D'',\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D''_K) \longrightarrow 0$$

est exacte. On conclut puisqu'une extension de φ-modules filtrés (faiblement) admissibles est admissible (dans une catégorie de Harder-Narasimhan, une extension entre objets semi-stables de pente 0 est semi-stable de pente 0). □

Soit donc $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ une telle filtration et $V = V_{cris}(D,\varphi,\mathrm{Fil}^\bullet D_K)$, une représentation cristalline à poids de Hodge-Tate positifs. Remarquons que puisque la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ est concentrée en degrés négatifs ou nuls,

$$\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR}) \subset D\otimes B_{dR}^+.$$

Il y a une suite exacte

$$0 \longrightarrow V \longrightarrow (D\otimes B^+)^{\varphi=Id} \longrightarrow D\otimes B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR}) \longrightarrow 0.$$

Puisque les pentes de (D,φ) sont strictement positives, $H^0(G_K,(D\otimes B^+)^{\varphi=Id}) = 0$. On en déduit une suite exacte

$$\begin{aligned} 0 \quad &\longrightarrow \quad H^0(G_K, D\otimes B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})) \xrightarrow{\delta} H^1(G_K,V) \longrightarrow H^1(G_K,(D\otimes B^+)^{\varphi=Id}) \\ &\longrightarrow \quad H^1(G_K, D\otimes B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR})). \end{aligned}$$

L'application naturelle

$$D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \longrightarrow H^0(G_K, D\otimes B_{dR}^+/\mathrm{Fil}^0(D\otimes B_{dR}))$$

est un isomorphisme (cela résulte de ce que d'après Tate, pour $a > 0$, θ : $H^0(G_K, B_{dR}^+/t^a B_{dR}^+) \xrightarrow{\sim} H^0(G_K,C) = K$). L'homomorphisme de connexions δ dans la suite exacte précédente est l'exponentielle de Bloch-Kato de V ([**7**] §3) :

$$\delta = \exp_V : D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \longrightarrow H^1(G_K,V).$$

Notons maintenant

$$H_g^1(G_K,V) = \ker\big(H^1(G_K,V) \longrightarrow H^1(G_K, V\otimes B_{dR})\big)$$

qui paramètre les extensions de $\mathbb{Q}_p$ par V qui sont de de Rham. L'exponentielle de Bloch-Kato est à valeurs dans H_g^1. La suite exacte précédente fournit l'égalité

$$H_g^1(G_K,(D\otimes B^+)^{\varphi=Id}) = \mathrm{coker}\big(D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\exp_V} H_g^1(G_K,V)\big).$$

Soit $\mathbf{1} \in \varphi\text{-ModFil}_{K/K_0}$ l'unité de la catégorie tensorielle des φ-modules filtrés. Puisque (D, φ) ne possède pas de pente 0 on a

$$\mathrm{Ext}^1_{(\varphi,N)\text{-ModFil}_{K/K_0}}(\mathbf{1}, (D, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K)) = D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K$$

où le facteur $D^{\varphi=p^{-1}}$ paramètre l'opérateur de monodromie dans l'extension (cf. lemme 10.6.12) et $D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K$ paramètre la filtration. Par application du foncteur $V_{log\text{-}cris}$ à de telles extensions cela induit une application injective

$$D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \hookrightarrow H^1_g(G_K, V)$$

qui coïncide avec l'exponentielle de Bloch-Kato sur la seconde composante. L'énoncé de la proposition 10.6.16 est alors équivalent à ce que cette application soit un isomorphisme c'est à dire : toute extension de $\mathbb{Q}_p$ par V qui est de de Rham est log-cristalline. Remarquons maintenant que l'application

$$H^1(G_K, \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{dR})) \longrightarrow H^1(G_K, D \otimes B_{dR})$$

est injective (c'est une conséquence de ce que la filtration $\mathrm{Fil}^\bullet D_K$ est concentrée en degrés négatifs ou nuls et des calculs de cohomologie galoisienne de Tate). On a donc

$$H^1_g(G_K, V) = \ker\big(H^1(G_K, V) \longrightarrow H^1(G_K, \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{dR}))\big).$$

D'après Tate,

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\sim} & H^1(G_K, C) \\ 1 & \longmapsto & -[\log \circ \chi_{cyc}] \end{array}$$

qui induit un isomorphisme (toujours d'après les calculs de cohomologie galoisienne de Tate)

$$\mathrm{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\sim} H^1(G_K, \mathrm{Fil}^0(D \otimes B_{dR}))\big).$$

L'application déduite

$$H^1(G_K, V) \longrightarrow \mathrm{Fil}^0 D_K$$

coïncide alors avec l'exponentielle duale de Bloch-Kato $\exp^*_V$ (cf. preuve prop. 3.8 de [**7**] ou bien [**40**] théo. 1.4.1) : via l'accouplement de dualité de Tate parfait

$$H^1(G_K, V^*(1)) \times H^1(G_K, V) \xrightarrow{\cup} H^2(G_K, \mathbb{Q}_p(1)) = \mathbb{Q}_p$$

on a pour $x \in (\mathrm{Fil}^0 D_K)^* = D_{cris}(V^*(1))/\mathrm{Fil}^0 D_{cris}(V^*(1))$ et $y \in H^1(G_K, V)$

$$< \exp_{V^*(1)}(x), y >= \mathrm{tr}_{K/\mathbb{Q}_p} < x, \exp^*_V(y) > .$$

La perfection des accouplement précédents couplée à l'injectivité de $\exp_{V^*(1)}$ montrent que $\exp^*_V$ est surjectif.

On dispose donc d'une suite

$$0 \longrightarrow D^{\varphi=p^{-1}} \oplus D_K/\mathrm{Fil}^0 D_K \xrightarrow{\alpha} H^1(G_K, V) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Fil}^0 D_K \longrightarrow 0$$

telle que $\beta \circ \alpha = 0$, α est injectif et β surjectif. On veut montrer que cette suite est exacte. Il suffit pour cela de montrer que la dimension du $\mathbb{Q}_p$-espace vectoriel du milieu est la somme de celle des termes extrêmes. D'après Tate,

$$\dim H^0(G_K, V) - \dim H^1(G_K, V) + \dim H^2(G_K, V) = -[K : \mathbb{Q}_p] \dim V.$$

Puisque (D, φ) ne possède pas de pente nulle, $V^{G_K} = 0$. Par dualité de Tate,

$$\dim H^2(G_K, V) = \dim H^0(G_K, V^*(1)) = \dim \mathrm{Fil}^1(D^*)^{\varphi=p}.$$

Utilisant la faible admissibilité de $(D^*, \varphi, \mathrm{Fil}^\bullet D_K^*)$ appliquée au sous-isocristal $(D^*)^{\varphi=p} \otimes_{\mathbb{Q}_p} K_0$ de D^* on vérifie que $\mathrm{Fil}^1(D^*)^{\varphi=p} = (D^*)^{\varphi=p}$. Soit $W = (D \otimes_{K_0} W(k)_{\mathbb{Q}})^{\varphi=p^{-1}}$ comme représentation de $\mathrm{Gal}(k|k_K)$. Notons $u \in \mathrm{End}(W)$ l'action du Frobenius de $\mathrm{Gal}(k|k_K)$. On a $D^{\varphi=p^{-1}} = \ker(Id - u)$. De plus, $(D^*)^{\varphi=p} = \ker(Id - {}^t u)$. On a donc $\dim (D^*)^{\varphi=p} = \dim D^{\varphi=p^{-1}}$. On conclut.

CHAPITRE 11

φ-MODULES ET FIBRÉS

Introduction

Ce chapitre a un triple but :

— Donner une classification des φ-modules sur B^+ et en déduire que lorsque F est algébriquement clos la catégorie des φ-modules sur B^+ est équivalente à celle des fibrés vectoriels sur la courbe.

— Faire le lien entre les classifications de φ-modules sur l'anneau de Robba données par Kedlaya et notre classification des fibrés sur la courbe.

— Expliquer géométriquement le théorème de Berger ([**5**]) classifiant les B-paires en termes de (φ, Γ)-modules.

Dans la section 11.1 on donne la classification des φ-modules sur B^+ (théo. 11.1.12). D'un point de vue géométrique cette classification s'énonce de la façon suivante (coro. 11.1.14) : pour $\mathfrak{a} \subsetneq \mathcal{O}_F$ un idéal monogène non-nul, tout F-isocristal sur $\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})$ est isotrivial au sens où il provient par extension des scalaires d'un F-isocristal sur k_F via le choix d'une section de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$. Ce résultat a été utilisé dans [**57**] afin de montrer que si $K|\mathbb{Q}_p$ est un corps perfectoïde alors tout groupe p-divisible sur $\mathcal{O}_K/p\mathcal{O}_K$ est isogène à un groupe p-divisible provenant de k_K. La preuve du résultat passe par l'étrange anneau $\overline{B}$ et l'on montre en fait que les φ-modules sur B^+ sont équivalents aux φ-modules sur $\overline{B}$.

Les résultats des sections 11.2 et 11.3 ne sont pas nouveaux. *Ils sont entièrement dus à Kedlaya (*[**43**],[**42**],[**45**]*) et Kedlaya et Liu (*[**44**]*)*. Nous les avons inclus par soucis de complétude afin de faire le lien avec notre point de vue ainsi que nos notations et celles des auteurs précédents.

11.1. φ-modules sur B^+

11.1.1. Définitions. — Rappelons (sec. 1.10.4) que l'on note

$$\overline{B} = B^{b,+}/\mathfrak{p}$$

où

$$\begin{aligned} \mathfrak{p} &= \{x \in B^{b,+} \mid v_0(x) > 0\} \\ &= \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi^n \in B^{b,+} \mid \exists \epsilon > 0,\ \forall n \ \ v(x_n) \geq \epsilon \Big\}. \end{aligned}$$

Notons

$$\begin{aligned} \mathfrak{m} &= \ker(B_E^{b,+} \twoheadrightarrow W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}) \\ &= \Big\{ \sum_{n \gg -\infty} [x_n]\pi_E^n \in B_E^{b,+} \mid \forall n \ \ v(x_n) > 0 \Big\} \end{aligned}$$

et $\mathfrak{m}_{\overline{B}} = \mathfrak{m}/\mathfrak{p}$. L'anneau $\overline{B}$ est local d'idéal maximal $\mathfrak{m}_{\overline{B}}$ et de corps résiduel $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$. Rappelons également que le morphisme naturel induit par l'inclusion $B^{b,+} \subset B^+$

$$\overline{B} \longrightarrow B^+/\{x \in B^+ \mid v_0(x) > 0\}$$

est un isomorphisme. Dans cette section on notera

$$L := W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}.$$

Définition 11.1.1. — Pour $A \in \{L, B^+, \overline{B}\}$ on note

$$\varphi\text{-mod}_A$$

la catégorie formée des couples (M, φ) où M est un A-module libre de rang fini et $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ un isomorphisme φ_E-linéaire.

Bien sûr, la catégorie $\varphi\text{-Mod}_L$ est la catégorie Tannakienne des k-isocristaux relatifs à E. Cette catégorie abélienne est semi-simple, complètement décrite par le théorème de Dieudonné-Manin lorsque k_F est algébriquement clos. Pour $A \in \{L, B^+; \overline{B}\}$, la catégorie $\varphi\text{-Mod}_A$ est tensorielle symétrique E-linéaire, munie d'un objet unité $\mathbb{1}_A = (A, \varphi_E)$, de duaux et de Hom internes. Plus précisément, on a

$$\begin{aligned} (M_1, \varphi_1) \otimes (M_2, \varphi_2) &= (M_1 \otimes_A M_2, \varphi_1 \otimes \varphi_2) \\ \mathcal{H}om\big((M_1, \varphi_1), (M_2, \varphi_2)\big) &= \big(\mathrm{Hom}_A(M_1, M_2), \psi\big) \end{aligned}$$

où $\psi(f) = \varphi_2 \circ f \circ \varphi_1^{-1}$. Le dual de $X \in \varphi\text{-Mod}_A$ est alors

$$\check{X} := \mathcal{H}om(X, \mathbb{1}_A).$$

On dispose de la formule usuelle

$$\check{X}_1 \otimes X_2 \xrightarrow{\sim} \mathcal{H}om(X_1, X_2).$$

Pour $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_A$ posons

$$H^0(X) := \mathrm{Hom}(\mathbb{1}_A, X) = M^{\varphi = Id}$$

et

$$H^1(X) := \mathrm{Ext}^1(\mathbb{1}_A, X) = \mathrm{coker}\big(M \xrightarrow{Id-\varphi} M\big)$$

où les extensions sont prises au sens de Yoneda. On a alors

$$Hom(X_1, X_2) = H^0(\mathcal{H}om(X_1, X_2)).$$

La catégorie φ-Mod_A est naturellement une catégorie exacte dans laquelle tout suite exacte courte

$$0 \longrightarrow X_1 \longrightarrow X_2 \longrightarrow X_3 \longrightarrow 0$$

donne naissance à une suite exacte longue de E-espaces vectoriels

$$0 \longrightarrow H^0(X_1) \longrightarrow H^0(X_2) \longrightarrow H^0(X_3) \longrightarrow H^1(X_1) \longrightarrow H^1(X_2) \longrightarrow H^1(X_3) \longrightarrow 0.$$

Fixons une uniformisante π de E. On a alors des objets « à la Tate » dans φ-Mod_A, pour $n \in \mathbb{Z}$

$$A(n) := (A, \pi^n \varphi_E)$$

et des torsions à la Tate, si $X = (M, \varphi)$

$$X(n) := X \otimes A(n) = (M, \pi^n \varphi).$$

On a bien sûr $A(n) = A(1)^{\otimes n}$ et $A(0) = \mathbb{1}_A$.

11.1.2. Module gradué associé à un φ-module. — Il y a un morphisme de E-espaces vectoriels pour deux φ-modules X et Y

$$H^0(X) \otimes_E H^0(Y) \longrightarrow H^0(X \otimes Y).$$

On peut ainsi former la E-algèbre graduée

$$\bigoplus_{d \geq 0} H^0(B^+(-d))$$

qui n'est rien d'autre que $P_{E,\pi}$. D'après la proposition 4.1.6 on obtient la même algèbre en remplaçant B^+ par $\overline{B}$: via l'application de réduction $B^+ \to \overline{B}$ on a

$$P_{E,\pi} = \bigoplus_{d \geq 0} H^0(B^+(-d)) \xrightarrow{\sim} \bigoplus_{d \geq 0} H^0(\overline{B}(-d)).$$

De plus, si $X = (M, \varphi) \in \varphi$-$\mathrm{Mod}_{B^+}$ alors

$$\Gamma_\bullet(X) = \bigoplus_{d \geq 0} \Gamma_d(X) := \bigoplus_{d \geq 0} H^0(X(-d)) = \bigoplus_{d \geq 0} M^{\varphi = \pi^d}$$

est un $P_{E,\pi}$-module gradué via $H^0(B^+(-d)) \otimes H^0(X(-d')) \to H^0(X(-d+d'))$. Cela définit un foncteur

$$\Gamma_\bullet : \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B^+} \longrightarrow P_{E,\pi}\text{-modules gradués.}$$

11.1.3. Changement de corps E. — Soit $E'|E$ une extension de degré fini. On suppose les corps résiduels de E et E', k_E et $k_{E'}$, plongés dans $\mathcal{O}_F$. Pour $A \in \{L, B^+, \overline{B}\}$ notons

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'$$

la catégorie formée des couples (X, ι) où $X \in \varphi\text{-Mod}_{A_E}$ et $\iota : E' \to \mathrm{End}(X)$ est un morphisme de E-algèbres. L'extension $W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}}|E$ est l'extension maximale non-ramifiée de E dans E'. Si $(M, \varphi, \iota) \in \varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'$ on a une décomposition

$$M = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}/f_{E'/E}\mathbb{Z}} M_i$$

où

$$M_i = \{x \in M \mid \forall a \in W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}},\ \iota(a)(x) = \varphi_E^i(a)x\}.$$

Alors,

$$\varphi : M_i \xrightarrow{\sim} M_{i+1},$$

M_0 est un $A_E \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_{E'})_{\mathbb{Q}}} E' = A_{E'}$-module libre et

$$\left(M_0, \varphi^{f_{E'/E}}\right) \in \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

Cela définit un foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

Soit maintenant $(M', \varphi') \in \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}$. Posons

$$M = \bigoplus_{i=0}^{f_{E'/E}-1} M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^i} A_{E'}.$$

Pour $0 \leq i \leq f_{E'/E} - 1$ posons

$$\begin{array}{rcl} \psi_i : M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^i} A_{E'} & \longrightarrow & M' \otimes_{A_{E'}, \varphi_E^{i+1}} A_{E'} \\ m \otimes x & \longmapsto & \begin{cases} m \otimes \varphi_E(x) & \text{si } i < f_{E'/E} - 1 \\ \varphi'(m) \otimes \varphi_E(x) & \text{si } i = f_{E'/E} - 1. \end{cases} \end{array}$$

Alors,

$$\left(M, \oplus_{i=0}^{f_{E'/E}-1} \psi_i\right) \in \varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E'.$$

On vérifie que les deux foncteurs précédents sont adjoints et induisent des équivalences inverses de catégories

$$\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}.$$

On dispose mainteant d'un couple de foncteurs adjoints

$$\varphi\text{-Mod}_{A_{E'}} \underset{\pi^*_{E'/E}}{\overset{\pi_{E'/E*}}{\rightleftarrows}} \varphi\text{-Mod}_{A_E}$$

qui est donné via l'équivalence $\varphi\text{-Mod}_{A_E} \otimes_E E' \simeq \varphi\text{-Mod}_{A_{E'}}$ par les formules

$$\begin{aligned} \pi_{E'/E*}(X,\iota) &= X \\ \pi^*_{E'/E}(Y) &= Y \otimes_E E', \end{aligned}$$

l'action de E' sur $Y \otimes_E E'$ étant l'action canonique. En termes de φ-modules,

$$\pi^*_{E'/E}(M,\varphi) = (M \otimes_{A_E} A_{E'}, \varphi^{f_{E'/E}} \otimes \varphi_{E'}).$$

11.1.4. Les φ-modules $A(\lambda)$. — Soit toujours $A \in \{L, B^+, \overline{B}\}$. Fixons une uniformisante π de E.

Définition 11.1.2. — Soit $\lambda \in \mathbb{Q}$, $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $h \geq 1$, $d \in \mathbb{Z}$ et $(d,h) = 1$. On pose

$$A(\lambda) = \langle e_0, \cdots, e_{h-1} \rangle$$

avec $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $0 \leq i < h-1$ et $\varphi(e_{h-1}) = \pi^d e_0$.

Supposons que $k_F^{\varphi_E^h = Id} | \mathbb{F}_q$ soit une extension de degré h, $\mathbb{F}_{q^h}$. Soit $E_h | E$ l'extension non-ramifiée associée. On a alors avec les notations de la section précédente

$$A_E(\lambda) = \pi_{E_h/E*} A_{E_h}(d).$$

Lorsque k_F est algébriquement clos le théorème de Dieudonné-Manin affirme que la catégorie abélienne $\varphi\text{-Mod}_{L_E}$ est semi-simple d'objets simples les $L(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Via les foncteurs d'extension des scalaires

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_L,$$

le φ-module $B^+(\lambda)$ s'envoie sur $\overline{B}(\lambda)$ et $L(\lambda)$.

11.1.5. Classification des φ-modules. — La proposition qui suit généralise la proposition 4.1.6.

Proposition 11.1.3. — *Le foncteur de réduction*

$$\varphi\text{-}Mod_{B^+} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\overline{B}}$$

est pleinement fidèle.

Démonstration. L'existence de Hom internes et la formule

$$Hom(X,Y) = H^0(\mathcal{H}om(X,Y))$$

dans les catégories $\varphi\text{-Mod}_{B^+}$ et $\varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$ montrent que la proposition est équivalente à ce que si $X \in \varphi\text{-Mod}_{B^+}$ et $\overline{X} = X \otimes_{B^+} \overline{B}$ alors

$$H^0(X) \xrightarrow{\sim} H^0(\overline{X}).$$

Soit donc $X = (M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B^+}$. Fixons une base $(e_1, \ldots, e_n)$ de M et soit $A = (a_{ij})_{i,j} \in \mathrm{GL}_n(B^+)$ la matrice de φ dans cette base, $\varphi(e_j) = \sum_i a_{ij} e_i$. Pour $r \geq 0$ définissons une norme additive sur M en posant

$$\begin{array}{rcl} \|.\|_r : M & \longrightarrow & \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i e_i & \longmapsto & \displaystyle\inf_{1 \leq i \leq n} \{v_r(x_i)\}. \end{array}$$

Par norme additive on entend les propriétés

$$\begin{cases} \|m\|_r = 0 \Leftrightarrow x = 0 \\ \|\lambda m\|_r = v_r(\lambda) + \|m\|_r \\ \|m_1 + m_2\|_r \geq \inf\{\|m_1\|_r, \|m_2\|_r\}. \end{cases}$$

Les propriétés suivantes sont vérifiées :

— M est complet pour la famille de normes additives $(\|.\|_r)_{r>0}$,

— $\|.\|_0 : M \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$,

— $\|m\|_0 = \lim\limits_{\substack{r \to 0 \\ >}} \|m\|_r$.

Si

$$\Lambda = \{m \in M \mid \|m\|_0 > 0\},$$

un sous B^+-module stable sous l'action de φ, on a alors

$$M \otimes_{B^+} \overline{B} = M/\Lambda.$$

Pour montrer que $H^0(M) \xrightarrow{\sim} H^0(M/\Lambda)$ il suffit donc de démontrer que

$$Id - \varphi : \Lambda \longrightarrow \Lambda$$

est un isomorphisme.

Pour $r \geq 0$ posons

$$\|A\|_r = \inf_{1 \leq i,j \leq n} v_r(a_{i,j}) \in \mathbb{R}.$$

Puisque pour tout $x \in B^+$ on a $v_r(\varphi(x)) = q v_{\frac{r}{q}}(x)$ où q est le cardinal du corps résiduel de E, l'inégalité suivante est vérifiée :

$$\|\varphi(m)\|_r \geq q \|m\|_{\frac{r}{q}} + \|A\|_r.$$

On en déduit par récurrence que pour tout entier $k \geq 1$

$$\|\varphi^k(m)\|_r \geq q^k \|m\|_{\frac{r}{q^k}} + \sum_{i=0}^{k-1} q^i \|A\|_{\frac{r}{q^i}}.$$

Lorsque $r = 0$ cette formule donne

$$\|\varphi^k(m)\|_0 \geq q^k \|m\|_0 + \big(\sum_{i=0}^{k-1} q^i\big) \|A\|_0$$

où $\|A\|_0 \geq 0$. Ainsi, si $m \in \Lambda$ vérifie $\varphi(m) = m$, de l'inégalité précédente on déduit que $\|m\|_0 = +\infty$ et donc $m = 0$. L'application $Id - \varphi : \Lambda \to \Lambda$ est donc injective.

Soit maintenant $r > 0$ et $m \in \Lambda$. Il existe $r_0 > 0$ et $\alpha \geq 0$ tels que pour $0 \leq r' \leq r_0$ on ait $\|A\|_{r'} \geq -\alpha r'$. Il existe donc des constantes $A, B \in \mathbb{R}$ telles que

$$\sum_{i=0}^{k-1} q^i \|A\|_{\frac{r}{q^i}} \geq Ak + B.$$

Puisque $\lim\limits_{k \to +\infty} \|m\|_{\frac{r}{q^k}} = \|m\|_0 > 0$ on en déduit que

$$\lim_{k \to +\infty} \|\varphi^k(m)\|_r = +\infty.$$

Cela étant vrai pour tout $r > 0$, M étant complet pour $(\|.\|_r)_{r>0}$, on en déduit que $Id - \varphi : \Lambda \to \Lambda$ possède un inverse donné par

$$\begin{array}{ccc} \Lambda & \longrightarrow & \Lambda \\ m & \longmapsto & \sum\limits_{k \geq 0} \varphi^k(m). \end{array}$$

□

Lemme 11.1.4. — *Soit M un $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$-module libre de rang fini muni d'un endomorphisme φ_E-linéaire $\varphi : M \to M$. Soit $M_{k_F} := M \otimes W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$. Alors,*

$$M^{\varphi = Id} \xrightarrow{\sim} M_{k_F}^{\varphi = Id}.$$

Si $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ est une section de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$ alors $M^{\varphi=Id} \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_F)} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est un sous-φ-module de M facteur direct.

Démonstration. Fixons une base de M, ce qui permet de l'identifier à $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^n$. Pour montrer la première assertion il suffit de vérifier que

$$Id - \varphi : W(\mathfrak{m}_F)^n \longrightarrow W(\mathfrak{m}_F)^n$$

est bijectif. Munissons $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^n$ de la topologie produit de la topologie faible sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. Si l'on pose pour $r > 0$, $\|(x_1, \ldots, x_n)\|_r = \inf\{v_r(x_1), \ldots, v_r(x_n)\}$ il s'agit alors de la topologie déduite de la famille de normes additives $(\|.\|_r)_{r>0}$. C'est également la topologie $([a], \pi)$-adique sur M pour un $a \in \mathcal{O}_F \setminus \{0\}$ vérifiant $v(a) > 0$. Pour cette topologie, M est complet. On vérifie facilement que pour tout $m \in W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)^n$,

$$\lim_{k \to +\infty} \varphi^k(m) = 0.$$

Ainsi, $(Id - \varphi)_{|W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)^n}$ possède comme inverse l'application $m \mapsto \sum_{k \geq 0} \varphi^k(m)$. On a donc $M^{\varphi=Id} \xrightarrow{\sim} M_{k_F}^{\varphi=Id}$.

Le noyau de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \to W_{\mathcal{O}_E}(k)$ est contenu dans le radical de Jacobson de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$. On peut donc appliquer le lemme de Nakayama pour conclure que puisque $M_{k_F}^{\varphi=Id}$ est facteur direct dans M_{k_F}, $M^{\varphi=Id} \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(k_F)} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est facteur direct dans M. □

Lemme 11.1.5. — *Soient $X, Y \in \varphi\text{-}Mod_{\overline{B}_E}$. On a alors*

$$Ext^1(X,Y) \simeq H^1(\check{X} \otimes Y).$$

Lemme 11.1.6. — *Pour $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ on a*

$$Ext^1\big(\overline{B}(\lambda), \overline{B}(\mu)\big) = 0$$

lorsque k_F est algébriquement clos. L'annulation précédente est encore valable lorsque k_F est quelconque et $\lambda \neq \mu$.

Démonstration. On a $\overline{B}(\lambda)^\vee = \overline{B}(-\lambda)$. De plus, $\overline{B}(-\lambda) \otimes \overline{B}(\mu)$ est une somme directe de φ-modules isomorphes à $\overline{B}(\mu - \lambda)$. Il suffit donc de montrer que pour tout $\nu \in \mathbb{Q}$, $H^1\big(\overline{B}(\nu)\big) = 0$. Si $\nu = \frac{d}{h}$ avec $(d,h) = 1$, $h \geq 1$ et $d \in \mathbb{Z}$ alors

$$H^1\big(\overline{B}(\tfrac{d}{h})\big) = \mathrm{coker}\big(\overline{B} \xrightarrow{Id - \pi^d \varphi^h} \overline{B}_E\big).$$

Si $d > 0$ cela résulte de ce que

$$Id - \pi^d \varphi^h : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$$

car $\pi^d \varphi^h$ est topologiquement π-adiquement nilpotent et $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ est π-adique. Si $d < 0$ cela résulte de ce que

$$\pi^{-d}\varphi^{-h} : \mathrm{coker}\big(\overline{B} \xrightarrow{Id - \pi^d \varphi^h} \overline{B}\big) \xrightarrow{\sim} \mathrm{coker}\big(\overline{B} \xrightarrow{\pi^{-d}\varphi^{-h} - Id} \overline{B}\big)$$

et du cas précédent $d > 0$. Si $d = 0$, après avoir fixé une section $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$, on a $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) = W_{\mathcal{O}_E}(k_F) \oplus W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$. Puisque k_F est algébriquement clos,

$$\mathrm{coker}\big(W_{\mathcal{O}_E}(k_F) \xrightarrow{Id - \varphi} W_{\mathcal{O}_E}(k_F)\big) = 0.$$

Puisque φ est topologiquement nilpotent pour la topologie faible sur $W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F)$ et que celui-ci est complet pour cette topologie,

$$Id - \varphi : W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F) \xrightarrow{\sim} W_{\mathcal{O}_E}(\mathfrak{m}_F).$$

D'où le résultat. □

Théorème 11.1.7. — *Supposons k_F algébriquement clos.*

1. *Pour chaque choix d'un scindage $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$, le foncteur d'extension des scalaires de L à B^+*

$$\varphi\text{-}Mod_L \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{B^+}$$

est essentiellement surjectif.

2. *Tout $X \in \varphi\text{-}Mod_{B^+}$ est isomorphe à une somme directe de $B^+(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$.*
3. *Le foncteur de réduction des coefficients de B^+ à $\overline{B}$*

$$\varphi\text{-}Mod_{B^+} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\overline{B}}$$

induit une équivalence de catégories.

Démonstration. D'après le théorème de Dieudonné-Manin, les points (1) et (2) sont équivalents. La proposition 11.1.3 dit que le théorème revient alors à prouver que tout $X \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$ est isomorphe à une somme directe de $\overline{B}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Le lemme 11.1.6 nous dit qu'il suffit de montrer qu'un tel X possède une filtration par des sous-φ-modules facteurs directs dont les gradués sont isomorphes à des $\overline{B}(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Soit donc $X = (M, \varphi)$. Notons $M_{k_F} = M \otimes L$. Soit λ la plus petite pente de Dieudonné-Manin de (M_{k_F}, φ). Si $\lambda = \frac{d}{h}$ avec $(d, h) = 1$ et $h \geq 1$, il existe un $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)$-réseau $\Lambda \subset M_{k_F}$ vérifiant

$$\varphi^h \Lambda \subset \pi^d \Lambda \quad \text{et} \quad \Lambda^{\varphi^h = \pi^d} \neq 0.$$

Soient $e_1, \ldots, e_n \in M$ relevant une base de Λ. D'après le lemme de Nakayama c'est une base de M. Notons $\psi = \pi^{-d}\varphi^h$. Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\overline{B})$ la matrice de ψ dans la base $(e_1, \ldots, e_n)$. Puisque la réduction de A dans $W_{\mathcal{O}_E}(k_F)_{\mathbb{Q}}$ est dans $M_n(W_{\mathcal{O}_E}(k_F))$, il existe $B \in M_n(W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F))$ dont l'image dans $M_n(\overline{B})$ coïncide avec A. On peut donc trouver un $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$-module libre N muni d'un morphisme φ^h-linéaire $\tilde{\psi} : N \to N$ tel que

$$(N, \tilde{\psi}) \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)} \overline{B} = (M, \psi).$$

D'après le lemme 11.1.4

$$N^{\psi = Id} \xrightarrow{\sim} \Lambda^{\varphi^h = \pi^d} \neq 0.$$

On peut donc trouver un morphisme non-nul

$$\overline{B}(\lambda) \longrightarrow (M, \varphi)$$

qui après réduction via $\overline{B} \to L$ définit un sous-isocristal $L(\lambda) \hookrightarrow (M_{k_F}, \varphi)$. D'après le lemme de Nakayama, $\overline{B}(\lambda) \to (M, \varphi)$ est un sous-φ-module facteur direct. □

Lorsque le corps k_F n'est pas algébriquement clos on dispose également du théorème suivant dont la démonstration est légèrement plus compliquée.

Théorème 11.1.8. — *On ne suppose pas nécessairement k_F algébriquement clos.*

1. *Pour chaque choix d'un scindage $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ de la projection $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$, le foncteur d'extension des scalaires de L à B^+*

$$\varphi\text{-}Mod_L \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{B^+}$$

est essentiellement surjectif.

2. *Le foncteur de réduction des coefficients de B^+ à $\overline{B}$*

$$\varphi\text{-}Mod_{B^+} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\overline{B}}$$

induit une équivalence de catégories.

Démonstration. — Il suffit de prouver le point (1). Soit $M \in \varphi\text{-Mod}_{\overline{B}}$ de réduction M_{k_F} sur L. Soit $\lambda = \frac{d}{h}$ la plus petite pente de Dieudonné-Manin de M_{k_F} et $\Lambda \subset M_{k_F}$ un réseau satisfaisant

$$\varphi^h(\Lambda) \subset \pi^d \Lambda.$$

Considérons la décomposition canonique

$$\Lambda = \Lambda_{bij} \oplus \Lambda_{nilp}$$

relativement à l'action de l'opérateur $\pi^{-d}\varphi^h$. Ainsi, $\Lambda_{bij}\left[\frac{1}{\pi}\right]$ est le facteur de pente λ dans la décomposition de Dieudonné-Manin de $M_{k_F}\left[\frac{1}{\pi}\right]$. Notons

$$\Lambda_{bij}(-\lambda) = \bigoplus_{i=0}^{h-1} \varphi^i(\Lambda_{bij})$$

sur lequel φ agit de façon bijective via

$$\varphi(x_0, \ldots, x_{h-1}) = \big(\pi^{-d}\varphi(x_{h-1}), \varphi(x_0), \ldots, \varphi(x_{h-2})\big).$$

On note de même $\Lambda(-\lambda)$ qui est stable sous l'action de φ. On a ainsi $\Lambda(-\lambda)\left[\frac{1}{\pi}\right] = M_{k_F} \otimes L(-\lambda)$. Comme dans la preuve de 11.1.7, il existe un $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$-module libre N muni d'un Frobenius φ tel que

$$\begin{aligned} (N,\varphi) \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)} \overline{B} &= (M,\varphi) \otimes \overline{B}(-\lambda) \\ (N,\varphi) \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)} \mathcal{O}_L &= (\Lambda(-\lambda),\varphi). \end{aligned}$$

Considérons alors le module

$$A = \mathrm{Hom}_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)}\big(\Lambda_{bij}(-\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_L} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F), N\big)$$

muni du Frobenius défini par $\varphi(f) = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}$. D'après le lemme 11.1.4

$$A^{\varphi = Id} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\varphi}(\Lambda_{bij}(-\lambda), \Lambda(-\lambda)).$$

On en déduit l'existence d'un morphisme

$$\Lambda_{bij}(-\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_L} W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F) \longrightarrow N$$

induisant l'inclusion $\Lambda_{bij}(-\lambda) \hookrightarrow \Lambda(-\lambda)$ après application de $- \otimes_{W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)} \mathcal{O}_L$. Ce morphisme induit lui-même un morphisme

$$u : \Lambda_{bij}(-\lambda) \otimes_{\mathcal{O}_L} \overline{B} \longrightarrow M \otimes \overline{B}(-\lambda)$$

qui se réduit sur l'inclusion $\Lambda_{bij}\left[\frac{1}{\pi}\right] \otimes L(-\lambda) \hookrightarrow M_{k_F} \otimes L(-\lambda)$. D'après le lemme de Nakayama u est injectif et fait de $(\Lambda_{bij}\left[\frac{1}{\pi}\right] \otimes_L \overline{B}) \otimes \overline{B}(-\lambda)$ un sous $\overline{B}$-module facteur direct.

Avant d'aller plus loin, remarquons que la preuve du lemme 11.1.6 s'adapte pour montrer que si $\mu_1 \neq \mu_2$ et $D_1, D_2 \in \varphi\text{-Mod}_L$ sont isoclines de pente 0 alors

$$\mathrm{Ext}^1(D_1 \otimes_L \overline{B}(\mu_1), D_2 \otimes \overline{B}(\mu_2)) = 0. \tag{5}$$

On peut maintenant procéder par récurrence sur le nombre de pentes de M_{k_F} pour en déduire que

$$M \otimes \overline{B}(-\lambda) \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} U_i \otimes_L \overline{B} \tag{6}$$

pour des isocristaux isoclines $(U_i)_{1\leq i\leq r}$ de pentes strictement croissantes lorsque l'indice i croît. Notons $D_\lambda = \mathrm{End}(\overline{B}(-\lambda)) = \mathrm{End}(L(-\lambda))$ l'algèbre à division sur E d'invariant λ. Il y a une action de D_λ sur $M \otimes \overline{B}(-\lambda)$ qui induit une action sur le membre de droite de (6). Puisque

$$\mathrm{Hom}(U_i \otimes_L \overline{B}, U_j \otimes_L \overline{B}) = 0$$

lorsque $i > j$, cette action respecte la filtration

$$\mathrm{Fil}^\bullet = \bigoplus_{i\geq \bullet} U_i \otimes_L \overline{B}.$$

De cela on déduit une action sur les gradués de cette filtration, c'est à dire une action de D_λ sur les $U_i \otimes_L \overline{B}$, $1 \leq i \leq r$. Puisque pour tout i l'isocristal U_i est isocline on a

$$\mathrm{End}(U_i \otimes_L \overline{B}) = \mathrm{End}(U_i)$$

(cela se ramène au cas où k_F est algébriquement clos) et l'action de D_λ sur $U_i \otimes_L \overline{B}$ provient donc d'une action sur U_i. Remarquons maintenant qu'il y a un isomorphisme canonique de φ-modules sur $\overline{B}$

$$M \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{D_\lambda\otimes\overline{B}}\big(\overline{B}(-\lambda), M \otimes \overline{B}(-\lambda)\big).$$

Le foncteur $\mathrm{Hom}_{D_\lambda\otimes\overline{B}}(\mathbb{B}(-\lambda), -)$ étant exact sur la catégorie exacte des $\overline{B}$-modules libres munis d'une action de D_λ, le φ-module M possède une filtration dont les gradués sont isomorphes aux φ-modules

$$\mathrm{Hom}_{D_\lambda\otimes\overline{B}}(\overline{B}(-\lambda), U_i \otimes_L \overline{B}) = \mathrm{Hom}_{D_\lambda}(L(-\lambda), U_i) \otimes_L \overline{B}, \quad 1 \leq i \leq r.$$

On conclut en utilisant l'annulation des groupes d'extensions (5). □

11.1.6. φ-modules sur B^+ et fibrés. — Définissons un foncteur

$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_E^+} \longrightarrow \mathrm{Fib}_{X_E}.$$

Soit $(M, \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B_E^+}$ et

$$\Gamma_\bullet(M, \varphi) = \bigoplus_{d\geq 0} M^{\varphi_E = \pi_E^d}$$

l'algèbre graduée sur P_{E,π_E} associée. Il lui est associé un faisceau quasi-cohérent

$$\mathscr{E}(M, \varphi) = \widetilde{\Gamma_\bullet(M, \varphi)}$$

sur $X_E = \mathrm{Proj}(P_{E,\pi_E})$. Avec les notations du théorème 11.1.8, si $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$ est une section de $\mathcal{O}_F \twoheadrightarrow k_F$ et $(D, \varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_L$ alors

$$\mathscr{E}(D \otimes_L B^+, \varphi \otimes \varphi) = \mathscr{E}(D, \varphi)$$

où $\mathscr{E}(D, \varphi)$ est le fibré vectoriel associé à l'isocristal (D, φ). Du théorème 11.1.8 on déduit donc que $\mathscr{E}(M, \varphi)$ est un fibré vectoriel.

Le théorème suivant se déduit maintenant du théorème 8.2.10 de classification des fibrés.

Théorème 11.1.9. — *Supposons F algébriquement clos. Le foncteur*

$$\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-}Mod_{B_E^+} \longrightarrow Fib_{X_E}$$

induit une équivalence de catégories tensorielles pour laquelle

$$H^0(X_E, \mathscr{E}(M,\varphi)) = H^0(M,\varphi) = M^{\varphi = Id}.$$

De plus, si E'/E est une extension de degré fini, $\pi_{E',E} : X_{E'} \to X_E$, il y a un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
\varphi\text{-}Mod_{B_{E'}^+} \arrow[r, "\mathscr{E}(-)"] \arrow[d, shift left, "\pi_{E'/E*}"] & Fib_{X_{E'}} \arrow[d, shift left, "\pi_{E',E*}"] \\
\varphi\text{-}Mod_{B_E^+} \arrow[r, "\mathscr{E}(-)"] \arrow[u, shift left, "\pi^*_{E'/E}"] & Fib_{X_E}. \arrow[u, shift left, "\pi^*_{E',E}"]
\end{tikzcd}$$

Remarque 11.1.10. — Le foncteur $\mathscr{E}(-) : \varphi\text{-Mod}_{B_E^+} \to \text{Fib}_{X_E}$ est exact. Cependant son inverse ne l'est pas et l'équivalence de catégories précédente n'est pas un équivalence de catégories exactes. Par exemple, il résulte du lemme 11.1.6 et de la proposition 11.1.3 que pour tout $X, Y \in \varphi\text{-Mod}_{B_E^+}$ on a $\text{Ext}^1(X,Y) = 0$ alors qu'en général $\text{Ext}^1(\mathscr{E}(X), \mathscr{E}(Y)) \neq 0$.

Remarque 11.1.11. — Le théorème précédent est faux lorsque F n'est plus algébriquement clos. Via le théorème de classification 9.4.3, le foncteur $\varphi\text{-Mod}_{B^+} \to \text{Fib}_X$ est pleinement fidèle d'image essentielle les fibrés associés à $(\lambda_i, [\rho_i])_i$ avec pour tout i, ρ_i *non-ramifiée* i.e. ρ_i se factorise via $\text{Gal}(\overline{F}|F) \to \text{Gal}(\overline{k}_F|k_F)$.

Donnons maintenant une description de l'inverse du foncteur $\mathscr{E}(-)$ lorsque F est algébriquement clos. Fixons le corps E et une uniformisante π de E. On note $X := X_E$, pour $h \geq 1$, $P_h := P_{E_h,\pi_E}$ et $X_h := X_{E_h} = \text{Proj}(P_h)$. Soit

$$P_\infty = \varinjlim_{h \geq 1} P_h.$$

C'est une E-algèbre $\mathbb{Q}_+$-graduée,

$$P_\infty = \bigoplus_{\lambda \in \mathbb{Q}_+} P_{\infty,\lambda}$$

où

$$P_{\infty,\lambda} = \bigcup_{h \gg 1} (B^+)^{\varphi^h = \pi^{h\lambda}} = (B^+)^{\varphi^s = \pi^r} \otimes_{E_s} E_\infty$$

si $\lambda = \frac{r}{s}$ avec $(r,s) = 1$ et E_∞ est l'extension maximale non-ramifiée de E. Pour $\mathscr{E} \in \text{Fib}_X$ et $h \geq 1$ soit

$$M_h(\mathscr{E}) = \bigoplus_{\lambda \in \frac{1}{h}\mathbb{Z}} \Gamma(X_h, (\pi_h^* \mathscr{E})(h\lambda))$$

où $\pi_h : X_h \to X$ et

$$M_\infty(\mathscr{E}) = \varinjlim_{h\geq 1} M_h(\mathscr{E}) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \bigcup_{h\gg 1} \Gamma(X_h, (\pi_h^*\mathscr{E})(h\lambda)).$$

C'est un P_∞-module $\mathbb{Q}$-gradué.

La tour de courbes $(X_h)_{h\geq 1}$ est un pro-revêtement galoisien de groupe $\widehat{\mathbb{Z}}$. Plus précisément, si on note $\sigma = \varphi \in \mathrm{Gal}(E_\infty|E)$ alors $Gal(X_h/X) = \sigma^{\mathbb{Z}/h\mathbb{Z}}$. Le fibré en droites $\mathcal{O}_{X_h}(1) = \widetilde{P_h[1]}$ est muni d'un isomorphisme

$$u_h : \sigma^*\mathcal{O}_{X_h}(1) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h}(1)$$

vérifiant

$$\sigma^{h-1*}u_h \circ \ldots \sigma^* u_h \circ u_h = \pi \in \mathrm{Aut}(\mathcal{O}_{X_h}(1)).$$

Cet isomorphisme est celui associé à l'isomorphisme φ-linéaire de P_h-modules gradués

$$\varphi : P_h[1] \xrightarrow{\sim} P_h[1].$$

On dispose de même pour tout $d \in \mathbb{Z}$ d'un isomorphisme

$$u_h^{\otimes d} : \sigma^*\mathcal{O}_{X_h}(d) \xrightarrow{\sim} \mathcal{O}_{X_h}(d)$$

associé à l'isomorphisme φ-linéaire $\varphi : P_h[d] \xrightarrow{\sim} P_h[d]$. Cela définit un isomorphisme φ-linéaire de P_∞-modules

$$\varphi : M_\infty(\mathscr{E}) \xrightarrow{\sim} M_\infty(\mathscr{E}),$$

l'action de φ sur $\Gamma(X_h, (\pi_h^*\mathscr{E})(d))$ étant définie par

$$\varphi : \Gamma(X_h, (\pi_h^*\mathscr{E})(d)) \xrightarrow{\sigma^*} \Gamma(X_h, (\sigma^*\pi_h^*\mathscr{E})\otimes\sigma^*\mathcal{O}_{X_h}(d)) \xrightarrow{Id\otimes u_h^{\otimes d}} \Gamma(X_h, (\sigma^*\pi_h^*\mathscr{E})(d)) = \Gamma(X_h, (\pi_h^*\mathscr{E})(d))$$

puisque $\pi_h \circ \sigma = \pi_h$.

Si $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_{B^+}$ on a

$$M_\infty(\mathscr{E}(M, \varphi)) = \bigoplus_{\lambda\in\mathbb{Q}} \bigcup_{h\gg 1} M^{\varphi^h = \pi^{h\lambda}}.$$

Calculons en particulier $M_\infty(\mathcal{O}_X(-\mu))$. Si $\mu = \frac{r}{s}$ avec $(r, s) = 1$, on a $B^+(\mu) = B^+e_1 \oplus \cdots \oplus B^+e_s$ sur lequel φ agit via $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < s$ et $\varphi(e_s) = \pi^r e_1$. On a alors

$$M_\infty(\mathscr{E}(B^+(\mu))) = P_\infty[-\mu]e_1 \oplus \cdots \oplus P_\infty[-\mu]e_s$$

où $P_\infty[-\mu]$ est graduée de telle manière que les éléments homogènes de degré λ soient les éléments homogènes de degré $\lambda - \mu$ de P_∞. De plus l'action de φ sur $M_\infty(B^+(\mu))$ est celle donnée par $\varphi(e_i) = e_{i+1}$ si $i < s$ et $\varphi(e_s) = \pi^r e_1$.

De ce calcul et du théorème de classification des fibrés on déduit que si $\varphi\text{-Mod}_{P_\infty}$ désigne la catégorie des P_∞-modules $\mathbb{Q}$-gradués M_∞ munis d'un isomorphisme φ-linéaire $\varphi : M_\infty \xrightarrow{\sim} M_\infty$ et tels que M_∞ soit isomorphe à une somme finie de $P_\infty[\mu]$, $\mu \in \mathbb{Q}$, on a un foncteur

$$M_\infty(-) : \mathrm{Fib}_X \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{P_\infty}.$$

D'après le calcul explicite précédent, le composé

$$\mathrm{Fib}_X \xrightarrow{M_\infty(-)} \varphi\text{-Mod}_{P_\infty} \xrightarrow{-\otimes_{P_\infty} B^+} \varphi\text{-Mod}_{B^+}$$

est un inverse du foncteur $\mathscr{E}(-)$.

11.1.7. Variante : φ-modules sur B_ρ^+ et F-isocristaux. — Rappelons (sec. 1.10) que

$$B^+ = \bigcap_{\rho>0} B_\rho^+$$

avec $\varphi : B_\rho^+ \xrightarrow{\sim} B_{\rho^q}^+ \subset B_\rho^+$. Soit $\rho \in]0,1[$. Appelons φ-module sur B_ρ^+ un couple (M,φ) où M est un B_ρ^+-module libre de rang fini et φ un endomorphisme semi-linéaire de M induisant un isomorhisme

$$M \otimes_{B_\rho^+,\varphi} B_\rho^+ \xrightarrow{\sim} M$$

(i.e. la matrice de φ dans une base de M est inversible). Des arguments identiques à ceux de la section précédente fournissent l'énoncé suivant.

Théorème 11.1.12. — *Le théorème 11.1.8 reste valable en remplaçant φ-Mod$_{B^+}$ par φ-Mod$_{B_\rho^+}$: pour tout $(M,\varphi) \in \varphi$-Mod$_{B_\rho^+}$ de réduction $(D,\varphi) \in \varphi$-Mod$_L$ et tout choix de section $k_F \subset \mathcal{O}_F$ il y a un isomorphisme (non canonique)*

$$(M,\varphi) \simeq (D,\varphi) \otimes_L B_\rho^+.$$

Remarquons le corollaire immédiat suivant.

Corollaire 11.1.13. — *Le foncteur d'extension des scalaires*

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{B_\rho^+}$$

est une équivalence de catégories. Un inverse est donné par le foncteur

$$(M,\varphi) \longmapsto \Big(\bigcap_{n\geq 0} \varphi^n(M), \varphi\Big).$$

Notons également le corollaire suivant (cf. sec. 1.10.3).

Corollaire 11.1.14. — *Soit $\mathfrak{a} \subset \mathcal{O}_F$ un idéal principal propre non nul et*

$$B_{cris,\rho}^+ = \Gamma\Big(\big(Spec(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})/Spec(\mathbb{Z}_p)\big)_{cris}, \mathcal{O}_{Spec(\mathcal{O}_F/\mathfrak{a})/Spec(\mathbb{Z}_p)}\Big)\big[\tfrac{1}{p}\big]$$

l'anneau des périodes p-adiques cristallines associées à $\mathcal{O}_F/\mathfrak{a}$, $\rho = |\mathfrak{a}|$. Soit φ-Mod$_{B^+_{cris,\rho}}$ la catégorie formée des $B^+_{cris,\rho}$-modules libres de rang fini munis d'un isomorphisme semi-linéaire. Choisissons une section $k_F \hookrightarrow \mathcal{O}_F$.

1. *Pour tout $(M,\varphi) \in \varphi$-Mod$_{B^+_{cris,\rho}}$ si $(D,\varphi) = (M,\varphi) \otimes_{B^+_{cris,\rho}} L$ il y a un isomorphisme (non canonique)*
$$(M,\varphi) \simeq (D,\varphi) \otimes_L B^+_{cris,\rho}.$$
2. *Le foncteur section globale induit une équivalence de catégorie entre F-isocristaux sur Spec$(O_F/\mathfrak{a})$/Spec$(\mathbb{Z}_p)$ et φ-Mod$_{B^+_{cris,\rho}}$. Ainsi, tout F-isocristal sur Spec$(O_F/\mathfrak{a})$/Spec$(\mathbb{Z}_p)$ est isotrivial au sens où il est isomorphe à l'extension des scalaires de k_F à $\mathcal{O}_F$ d'un F-isocristal sur Spec(k_F)/Spec$(\mathbb{Z}_p)$.*
3. *La catégorie des F-isocristaux sur Spec$(O_F/\mathfrak{a})$/Spec$(\mathbb{Z}_p)$ est équivalente à celle des « F-isocristaux convergents sur Sp(F) » i.e. celle des φ-modules sur B^+.*
4. *Lorsque F est algébriquement clos la catégorie des fibrés vectoriels sur la courbe X_F est équivalente à celle des F-isocristaux sur Spec$(O_F/\mathfrak{a})$/Spec$(\mathbb{Z}_p)$ (il ne s'agit pas d'une équivalence de catégories exactes, cf. rem. 11.1.10).*

11.2. φ-modules sur B et l'anneau de Robba d'après Kedlaya

11.2.1. Définitions et premières propriétés. — Rappelons que si I est un intervalle compact dans $[0,1]$ alors l'anneau B_I est un anneau principal (3.5.1).

Définition 11.2.1. —
1. Soit I un intervalle de $[0,1[$. On note Proj_{B_I} la catégorie des B_I-modules projectifs de type fini sur B_I.
2. On note
$$\mathrm{Fib}_{Y_I} := 2 - \varprojlim_J \mathrm{Proj}_{B_J}$$
la 2-limite projective des catégories de B_J-modules libres de rang fini où J parcourt les intervalles *compacts* contenus dans I i.e. les collections $(M_J)_{J\subset I}$ de tels modules munis d'isomorphismes $M_J \otimes_{B_J} B_{J'} \xrightarrow{\sim} M_{J'}$, lorsque $J' \subset J$, satisfaisant les relations de compatibilité usuelles.

Soit I comme dans la définition précédente. D'après le théorème 3.5.1 le système projectif $(B_J)_{J\subset I,\mathrm{compact}}$ forme une algèbre de Fréchet-Stein au sens de la section 3 de [**55**]. Des corollaires 3.3 et 3.4 de [**55**] on tire la proposition suivante.

Proposition 11.2.2. — *Il y a un foncteur sections globales*
$$\begin{array}{rcl} \Gamma : \mathit{Fib}_{Y_I} & \longrightarrow & \mathit{Proj}_{B_I} \\ (M_J)_J & \longmapsto & \varprojlim_J M_J \end{array}$$

qui est une équivalence exacte de catégories. De plus

$$\Gamma\big((M_J)_J\big) \otimes_{B_I} B_J \xrightarrow{\sim} M_J.$$

Rappelons que pour tout $\rho \in]0,1[$ l'anneau $B_{]0,\rho]}$ est de Bezout (3.5.7). On a donc le résultat suivant.

Proposition 11.2.3. — *Pour tout $\rho \in]0,1[$, $Fib_{Y_{]0,\rho]}}$ s'identifie via le foncteur sections globales à la catégorie des $B_{]0,\rho]}$-modules libres de rang fini.*

On dispose également d'une notion de faisceau cohérent.

Définition 11.2.4. — On note

$$\mathrm{Coh}_{Y_I} := 2 - \varprojlim_J \mathrm{Mod}^{tf}_{B_J}$$

la 2-limite projective des catégories de B_J-modules de type fini où J parcourt les intervalles *compacts* contenus dans I.

Utilisant la structure des modules de type fini sur un anneau principal et les résultats de [**55**] on déduit le résultat suivant.

Proposition 11.2.5. — *1. Le foncteur sections globales induit une équivalence entre Coh_{Y_I} et la catégorie des B_I-modules isomorphes à*

$$M \oplus \prod_{y \in |Y_I|} N_y$$

avec M projectif de type fini et N_y est un $B^+_{dR,y}$-module de type fini de torsion tel que pour tout $J \subset I$ compact l'ensemble des $y \in |Y_J|$ tels que $N_y \neq 0$ soit fini.

2. Le foncteur sections globales induit une équivalence de catégories entre les faisceaux cohérents $(M_J)_J$ tels que

$$\sup_{y \in |Y_I|} long_{k(y)} M_J \otimes k(y) < +\infty$$

(où J est n'importe que intervalle tel que $y \in |Y_J|$) et les B_I-modules de présentation finie.

11.2.2. Propriété de faisceau de $I \mapsto B_I$. —

Lemme 11.2.6. — *Soit I un intervalle de $[0,1]$. Notons I^+ l'enveloppe convexe de $I \cup \{1\}$ et I^- celle de $I \cup \{0\}$. On a alors*

$$B_I = B_{I^+} + B_{I^-}.$$

Démonstration. — Pour $x = \sum_{\gg -\infty} \in B^b$ on note

$$\begin{aligned} x^+ &= \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n \\ x^- &= \sum_{n<0}[x_n]\pi^n. \end{aligned}$$

Remarquons que pour $\rho, \rho' \in [0,1]$ avec $\rho \leq \rho'$

$$\begin{aligned} |x^+|_\rho &\leq |x^+|_{\rho'} \\ |x^-|_{\rho'} &\geq |x^-|_{\rho'}. \end{aligned}$$

Dès lors, si $f \in B_I$, $f = \sum_{k\geq 0} f_k$ est une série convergente dans B_I avec $f_k \in B^b$ on a

$$f = \underbrace{\sum_{k\geq 0} f_k^+}_{\in B_{I^-}} + \underbrace{\sum_{k\geq 0} f_k^-}_{\in B_{I^+}}.$$

□

Proposition 11.2.7. — *Soient $I, J \subset [0,1]$ des intervalles tels que $I \cap J \neq \emptyset$. Il y a alors une suite exacte de Mayer-Vietoris*

$$0 \longrightarrow B_{I\cup J} \longrightarrow B_I \oplus B_J \longrightarrow B_{I\cap J} \longrightarrow 0.$$

En d'autres termes, via les inclusions $B_I \subset B_{I\cap J}$, $B_J \subset B_{I\cap J}$ on a

$$\begin{aligned} B_{I\cup J} &= B_I \cap B_J \\ B_{I\cap J} &= B_I + B_J. \end{aligned}$$

Démonstration. — La partie de l'énoncé $B_{I\cap J} = B_I + B_J$ résulte immédiatement du lemme 11.2.6. Soit maintenant $f \in B_I \cap B_J$ dont on veut montrer qu'il appartient à $B_{I\cup J}$. On peut supposer que $I \not\subset J$, $J \not\subset I$ et $\sup(I) < \sup(J)$. Écrivons (lemme 11.2.6)

$$f = a + b, \quad a \in B_{I^+}, b \in B_{I^-}.$$

Puisque $B_{I^-} \subset B_{I\cup J}$ on a donc

$$a \in B_{I^+} \cap B_J.$$

Mais d'après la description explicite donnée dans la proposition 1.6.23 on a $B_{I^+} \cap B_J \subset B_{I\cup J}$. □

Remarque 11.2.8. — Soit $I = \cup_{\alpha\in A} J_\alpha$ un recouvrement d'un intervalle I de $[0,1]$ par des sous-intervalles. On dit qu'il est admissible si pour tout compact $K \subset I$, il existe un sous-ensemble fini $A' \subset A$ d'indices tel que $K \subset \cup_{\alpha\in A'} J_\alpha$. Munissons la catégorie des intervalles de $[0,1]$ de la topologie de Grothendieck dont les recouvrements sont les recouvrements admissibles. Il résulte alors de la proposition précédente que $\mathcal{O} : I \mapsto B_I$ est un faisceau pour cette topologie tel que pour tout intervalle I on ait $H^1(I, \mathcal{O}) = 0$.

Remarque 11.2.9. — La théorie des espaces perfectoïdes a apporté entre temps une nouvelle preuve de la proposition 11.2.7 (cf. [**20**] théo. 2.1). Néanmoins nous avons préféré inclure la preuve précédente bien plus élémentaire et largement suffisante pour nos besoins.

11.2.3. Recollement de fibrés. —

11.2.3.1. Un lemme d'approximation. —

Lemme 11.2.10. — *Soient B_1, B_2, A des E-algèbres de Banach munies de morphismes $B_1 \to A$ et $B_2 \to A$ tels que l'application déduite $B_1 \oplus B_2 \to A$ soit surjective. Soit $Z \in GL_n(A)$. Il existe alors un voisinage de l'identité dans $GL_n(A)$ tel que toute matrice dans ce voisinage s'écrive sous la forme*

$$XZYZ^{-1}$$

avec $X \in GL_n(B_1)$ et $Y \in GL_n(B_2)$.

Démonstration. — On sait que si D est une E-algèbre de Banach alors

$$\exp : p^2 M_n(D^0) \xrightarrow{\sim} Id + p^2 M_n(D^0)$$

d'inverse donné par le logarithme. L'application

$$(U, V) \longmapsto \log\big(\exp(U) Z \exp(V) Z^{-1}\big) \in M_n(A)$$

est alors définie sur un voisinage suffisamment petit de $0 \in M_n(B_1) \oplus M_n(B_2)$. On peut alors appliquer le lemme 11.2.11 qui suit pour conclure. □

Si D est une E-algèbre de Banach et $f \in D[\![T_1, \dots, T_n]\!]$,

$$f = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} a_\alpha T_1^{\alpha_1} \dots T_n^{\alpha_n},$$

dans le lemme qui suit on dit que f est holomorphe au voisinage de 0 s'il existe $\rho > 0$ tel que

$$\sup_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \|a_\alpha\| \rho^{|\alpha|} < +\infty.$$

Lemme 11.2.11. — *Soient $C_1, \cdots, C_n, D_1, \dots, D_m$ des E-algèbres de Banach munies de morphismes*

$$u_{ij} : C_j \to D_i, \quad 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n.$$

Soient pour $i \in \{1, \dots, m\}$

$$f_i \in D_i[\![T_1, \dots, T_n]\!]$$

que l'on suppose holomorphe au voisinage de zéro. Cela définit une fonction

$$\begin{array}{rcl} g : \mathcal{U}_1 \times \cdots \times \mathcal{U}_n & \longrightarrow & D_1 \times \cdots \times D_m \\ (x_1, \dots, x_n) & \longmapsto & \big(f_i\big(u_{i1}(x_1), \dots, u_{in}(x_n)\big)\big)_{1 \le i \le m} \end{array}$$

sur des voisinages $\mathcal{U}_1, \dots, \mathcal{U}_n$ de zéro suffisamment petits dans $C_1, \dots, C_n$.

Supposons que l'application linéaire tangente en 0

$$\begin{array}{rcl} C_1 \oplus \cdots \oplus C_n & \longrightarrow & D_1 \oplus \cdots \oplus D_m \\ (x_1, \ldots, x_n) & \longmapsto & \Big(\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial T_j}(0) u_{ij}(x_j) \Big)_{1 \leq i \leq m} \end{array}$$

soit surjective et pour tout i, $f_i(0, \ldots, 0) = 0$.

L'image de l'application g *contient alors un voisinage de* 0 *(et ce quels que soient les voisinages* $\mathcal{U}_1, \ldots, \mathcal{U}_n$ *de zéro suffisamment petits choisis).*

Démonstration. — C'est une conséquence du théorème de l'application ouverte et de la méthode d'approximation de Newton. Plus précisément, d'après le théorème de l'application ouverte de Banach et puisque E est de valuation discrète il existe une section E-linéaire continue

$$s : D_1 \oplus \cdots \oplus D_m \longrightarrow C_1 \oplus \cdots \oplus C_n$$

de l'application tangente en 0. On vérifie alors que si $y \in D_1 \oplus \cdots \oplus D_m$ est de norme suffisamment petite alors la suite définie par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = s(y) \\ u_{n+1} = u_n - s(g(u_n) - y) \end{cases}$$

est bien définie pour tout entier n et converge vers un élément x tel que $g(x) = y$. □

11.2.3.2. Recollement. — Si $I' \subset I \subset [0, 1[$ sont des intervalles il y a un foncteur de restriction

$$\mathrm{Fib}_{Y_I} \longrightarrow \mathrm{Fib}_{Y_{I'}}$$

que l'on note $\mathscr{E} \mapsto \mathscr{E}_{|Y_{I'}}$.

Proposition 11.2.12. — *Soient* I_1, I_2 *deux intervalles de* $[0, 1[$ *vérifiant* $I_1 \cap I_2 \neq \emptyset$. *La catégorie* $Fib_{Y_{I_1 \cup I_2}}$ *s'identifie à celle des triplets* $(\mathscr{E}_1, \mathscr{E}_2, \iota)$ *où* $\mathscr{E}_1 \in Fib_{Y_{I_1}}$, $\mathscr{E}_2 \in Fib_{Y_{I_2}}$ *et* $\iota : \mathscr{E}_{1|Y_{I_1 \cap I_2}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{2|Y_{I_2}}$.

Démonstration. — Il suffit de traiter le cas où I_1 et I_2 sont compacts, ce que l'on suppose donc. Il y a un foncteur naturel de la catégorie $\mathrm{Fib}_{Y_{I_1 \cup I_2}}$ vers celle des triplets de l'énoncé. La pleine fidélité de ce foncteur résulte de ce que $B_{I_1} \cap B_{I_2} = B_{I_1 \cup I_2}$ (prop. 11.2.7). Passons à la surjectivité essentielle. Les classes d'isomorphisme de triplets de rang n s'identifient à l'ensemble quotient

$$\mathrm{GL}_n(B_{I_1}) \backslash \mathrm{GL}_n(B_{I_1 \cap I_2}) / \mathrm{GL}_n(B_{I_2}).$$

Il s'agit de montrer qu'il est trivial. Soit $U \in \mathrm{GL}_n(B_{I_1 \cap I_2})$. Puisque $B_{I_1 \cup I_2}$ est dense dans $B_{I_1 \cap I_2}$ on peut trouver

$$Z \in \mathrm{M}_n(B_{I_1 \cup I_2}) \cap \mathrm{GL}_n(B_{I_1 \cap I_2})$$

tel que UZ^{-1} soit aussi proche que l'on veut de l'identité de $\mathrm{GL}_n(B_{I_1\cap I_2})$. Utilisant la proposition 11.2.7, d'après le lemme 11.2.10 il existe $X \in \mathrm{GL}_n(B_{I_1})$ et $Y \in \mathrm{GL}_n(B_{I_2})$ tels que

$$UZ^{-1} = XZYZ^{-1}$$

et donc

$$U = XZY.$$

Puisque $B_{I_1\cup I_2}$ est un anneau principal et $\det(Z) \neq 0$, on peut écrire

$$Z = Z'DZ''$$

où $Z', Z'' \in \mathrm{GL}_n(B_{I_1\cup I_2})$ et D est une matrice diagonale. Tout élément de $B_{I_1\cup I_2} \cap B^\times_{I_1\cap I_2}$ s'écrit sous la forme x_1x_2 avec $x_1 \in B^\times_{I_1}$ et $x_2 \in B^\times_{I_2}$ (cela résulte de la description du spectre maximal de ces anneaux principaux). On en déduit que l'on peut écrire $D = D_1D_2$ avec $D_1 \in \mathrm{GL}_n(B_{I_1})$ et $D_2 \in \mathrm{GL}_n(B_{I_2})$. □

Remarque 11.2.13. — Avec les notations de la remarque 11.2.8 il résulte de la proposition précédente que Fib_{Y_I} s'identifie à la catégorie des $\mathcal{O}$-modules localement libres.

Remarque 11.2.14. — De la structure des modules de type fini sur un anneau principal on déduit que la proposition 11.2.12 s'étend aussitôt à Coh_{Y_I}.

11.2.4. Descente galoisienne. —

Proposition 11.2.15. — *Soit $I \subset [0,1[$ un intervalle compact d'extrémités dans $|F| \cap [0,1[$ et $L|F$ une extension de degré fini.*

1. *$B_{L,I}$ est une $B_{F,I}$-algèbre étale finie de degré $[L:F]$. Si de plus $L|F$ est galoisienne alors $B_{L,I}|B_{F,I}$ est galoisienne de groupe*

$$Gal(L|F) \xrightarrow{\sim} Aut_{B_{F,I}}(B_{L,I}).$$

2. *La $B^0_{F,I}$-algèbre $B^0_{L,I}$ est presque étale au sens où pour tout $\epsilon \in \mathfrak{m}_F$*

$$[\epsilon]B^0_{F,I} \subset tr_{L/F}(B^0_{L,I}) \subset B^0_{F,I}.$$

Démonstration. — On peut supposer que $L|F$ est galoisienne. L'assertion est claire si $I = \{0\}$. On suppose donc $I \neq \{0\}$. Notons $d = [L:F]$. Soit $\alpha \in \mathcal{O}_L$ tel que $L = F[\alpha]$. Choisissons $b \in \mathcal{O}_F$ tel que

$$b\mathcal{O}_L \subset \mathcal{O}_F[\alpha] \subset \mathcal{O}_L.$$

Pour tout entier $k \geq 0$ considérons le morphisme de $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$-module

$$\begin{array}{rcl} u_k : W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)^d & \longrightarrow & W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_L) \\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i \big[\alpha^{i/p^k}\big]. \end{array}$$

Modulo π, u_k est l'inclusion $\mathcal{O}_F[\alpha^{1/p^k}] \subset \mathcal{O}_L$. On en déduit que u_k est injectif et que de plus

$$[b^{1/p^k}]W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_L) \subset \mathrm{Im}(u_k) + \pi W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_L).$$

Si $I = [\rho_1, \rho_2]$ choisissons $a_1, a_2 \in F$ tels que $|a_1| = \rho_1,\ |a_2| = \rho_2$. On a alors pour $* \in \{L, F\}$

$$B^{0,b}_{*,I} := B^0_{*,I} \cap B^b = W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_*)\big[\tfrac{[a_1]}{\pi}, \tfrac{\pi}{[a_2]}\big].$$

On en déduit que le morphisme

$$v_k : \big(B^{0,b}_{F,I}\big)^d \longrightarrow B^{0,b}_{L,I}$$

déduit de u_k vérifie

$$[b^{1/p^k}]B^{0,b}_{L,I} \subset \mathrm{Im}(v_k) + \pi B^{0,b}_{L,I}.$$

Choisissons $k \gg 0$ de telle manière que

$$|a_2| < |b^{1/p^k}|$$

et posons

$$\delta = [a_2 b^{-1/p^k}] \in B^{00}_{L,I}.$$

On a alors

$$\begin{aligned}[b^{1/p^k}]B^{0,b}_{L,I} &\subset \mathrm{Im}(v_k) + [b^{1/p^k}]\delta\frac{\pi}{[a_2]}B^0_{L,I} \\ &\subset \mathrm{Im}(v_k) + [b^{1/p^k}]\delta B^0_{L,I}\end{aligned}$$

Puisque δ est topologiquement nilpotent dans $B_{L,I}$ on en déduit que le conoyau de

$$\begin{aligned}\hat{v}_k : (B^0_{F,I})^d &\longrightarrow B^0_{L,I} \\ (\lambda_0, \ldots, \lambda_{d-1}) &\longmapsto \sum_{i=0}^{d-1} \lambda_i [\alpha^{i/p^k}]\end{aligned}$$

est annulé par $[b^{1/p^k}]$.

Pour $k \gg 0$ on a donc des inclusions

$$[b^{1/p^k}]B^0_{L,I} \subset B^0_{F,I}\Big[[\alpha^{1/p^k}]\Big] \subset B^0_{L,I}$$

desquelles il découle que

$$B_{L,I} = B_{F,I}\Big[[\alpha^{1/p^k}]\Big] = \sum_{i=0}^{d-1} B^0_{F,I}[\alpha^{i/p^k}].$$

Montrons maintenant qu'en fait

$$B_{L,I} = \bigoplus_{i=0}^{d-1} B_{F,I}[\alpha^{i/p^k}].$$

Si ce n'était pas le cas alors le degré de $[\alpha^{1/p^k}]$ dans l'extension algébrique

$$\mathrm{Frac}(B_{L,I})|\mathrm{Frac}(B_{F,I})$$

serait strictement plus petit que d. Mais l'action de $\mathrm{Gal}(L|F)$ sur $B_{L,I}$ induit une action

$$f : \mathrm{Gal}(L|F) \longrightarrow \mathrm{Aut}\big(\mathrm{Frac}(B_{L,I})|\mathrm{Frac}(B_{F,I})\big).$$

L'ensemble des conjugués de α^{1/p^k}, $\{\sigma(\alpha^{1/p^k}) \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L|F)\}$, étant de cardinal d,

$$\{\tau([\alpha^{1/p^k}]) \mid \tau \in \mathrm{Im}(f)\} = \{[\sigma(\alpha^{1/p^k})] \mid \sigma \in \mathrm{Gal}(L|F)\}$$

est de cardinal d. Ainsi, $[\alpha^{1/p^k}]$ est de degré supérieur ou égal à d dans l'extension algébrique précédente ce qui est une contradiction.
Il s'en suit que $[\alpha^{1/p^k}]$ est de degré d et que $B_{L,I}$ est un $B_{F,I}$-module libre de base $(1, [\alpha^{1/p^k}], \ldots, [\alpha^{(d-1)/p^k}])$. De plus, $\mathrm{Frac}(B_{L,I})$ est une extension galoisienne de groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L|F)$.

Notons $\mathrm{Gal}(L|F) = \{\sigma_0, \ldots, \sigma_{d-1}\}$. Le discriminant de la forme quadratique trace dans la base $(1, [\alpha^{1/p^k}], \ldots, [\alpha^{(d-1)/p^k}])$ est donné par

$$\Delta_k = \det\Big(\big[\sigma_i(\alpha)^{j/p^k}\big]\Big)^2_{0\leq i,j\leq d-1}.$$

Il appartient donc à $W_{\mathcal{O}_E}(\mathcal{O}_F)$ et est congru modulo π au discriminant de la forme quadratique trace de $L|F$ dans la base $(1, \alpha^{1/p^k}, \ldots, \alpha^{(d-1)/p^k})$ qui est lui-même la racine p^k-ième du discriminant associé à la base $(1, \alpha, \ldots, \alpha^{d-1})$. On a donc pour tout $\rho \in I$

$$\lim_{k\to\infty} |\Delta_k|_\rho = 1.$$

On en déduit que $B_{L,I}|B_{F,I}$ est étale ainsi que l'assertion concernant le caractère presque étale. □

Remarque 11.2.16. — La proposition précédente redonne comme cas particulier une preuve du corollaire 1.8.3.

Remarque 11.2.17. — Lorsque $1 \in I$ le raisonnement précédent ne marche pas (cf. étape « Choisissons $k \gg 0$ de telle manière que $|a_2| < |b^{1/p^k}|$... »). Le résultat précédent est faux pour $B_{]0,1]} = B^+\big[\frac{1}{[\varpi_F]}\big]$. Cela a des répercussions importantes concernant la classification des φ-modules sur B^+ et B lorsque F n'est pas algébriquement clos (les φ-modules sur B^+ ne satisfont pas la descente galoisienne contrairement à ceux sur B, cf. 11.1.11).

De la méthode de Sen on déduit le résultat suivant.

Proposition 11.2.18. — *Soit $I \subset [0,1[$ un intervalle compact d'extrémités dans $|F| \cap [0,1[$. On a alors*

$$B^{G_F}_{\widehat{\overline{F}},I} = B_{F,I}.$$

De plus, le foncteur d'extension des scalaires $-\otimes_{B_{F,I}} B_{\widehat{\overline{F}},I}$ induit une équivalence de catégories entre $B_{F,I}$-modules libres de rang fini et $B_{\widehat{\overline{F}},I}$-modules libres de rang fini munis d'une action semi-linéaire continue de $Gal(\overline{F}|F)$.

Ainsi, pour tout intervalle $I \subset [0,1[$, $\mathrm{Fib}_{Y_{F,I}}$ s'identifie aux fibrés $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_{Y_{\widehat{\overline{F}},I}}$ munis d'une action semi-linéaire de $\mathrm{Gal}(\overline{F}|F)$, $(c_\sigma)_{\sigma \in G_F}$ avec $c_\sigma : \sigma^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$, continue au sens où pour tout intervalle compact $J \subset I$ l'action induite sur l'espace de Banach $\Gamma(Y_J, \mathscr{E})$ est continue.

11.2.5. Fibrés φ-équivariants. — Si $\mathscr{E} = (M_J)_{J \subset I}$ est un fibré sur Y_I on note $\varphi^*\mathscr{E}$ le fibré $(M_{\varphi^{-1}(J)} \otimes_{B_{\varphi^{-1}(J)},\varphi} B_J)_{J \subset \varphi(I)}$ sur $Y_{\varphi(I)}$.

Définition 11.2.19. — On note

1. On note $\mathrm{Fib}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ la catégorie des fibrés $\mathscr{E}$ sur $Y = Y_{]0,1[}$ munis d'un isomorphisme $\varphi^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$.
2. On note $\mathrm{Fib}_{Y \cup \{0\}/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ la catégorie des fibrés $\mathscr{E}$ sur $Y_{[0,1[}$ munis d'un isomorphisme $\varphi^*\mathscr{E} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}$.

D'après 11.2.2 la catégorie $\mathrm{Fib}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ s'identifie à la catégorie φ-Mod_B formée des couples (M, φ) où M est un B-module projectif de type fini et $\varphi : M \xrightarrow{\sim} M$ est un isomorphisme semi-linéaire. Quant-à $\mathrm{Fib}_{Y \cup \{0\}/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ elle s'identifie à φ-$\mathrm{Mod}_{B_{[0,1[}}$.

Soient $\mathscr{R} = \lim\limits_{\rho \to 0} B_{]0,\rho]}$, et $\mathscr{E}^\dagger = \lim\limits_{\rho \to 0} B_{[0,\rho]}$ (def. 1.8.1). Le premier est un anneau de Bezout (3.5.8) et le second est un corps valué hensélien (1.8.2).

Proposition 11.2.20. — *1. Soit I un intervalle de $]0,1[$ satisfaisant $\varphi(I) \cap I \neq \emptyset$. La restriction à Y_I induit une équivalente entre $Fib_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ et la catégorie des couples $(\mathscr{E}, u)$ où $\mathscr{E} \in Fib_{Y_I}$ et*

$$u : (\varphi^*\mathscr{E})_{|Y_{\varphi(I) \cap I}} \xrightarrow{\sim} \mathscr{E}_{|\varphi(I) \cap I}.$$

2. Il en est de même pour $Fib_{Y \cup \{0\}/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ si I est un intervalle de $[0,1[$ contenant 0.

Démonstration. — Remarquons que

$$\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} \varphi^n(I) = \begin{cases}]0,1[\text{ dans le cas (1)} \\ [0,1[\text{ dans le cas (2).} \end{cases}$$

La proposition résulte alors de 11.2.12. □

Exemple 11.2.21. — Fixons $\rho \in]0,1[$. Les classes d'isomorphisme de fibrés sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ s'identifient à l'ensemble quotient

$$\mathrm{GL}_n(B_{[\rho^q,\rho]}) \backslash \mathrm{GL}_n(B_{\rho^q})$$

où l'action de $X \in GL_n(B_{[\rho^q,\rho]})$ sur $A \in \mathrm{GL}_n(B_{\rho^q})$ est donnée par $XA\varphi(X)^{-1}$.

On en déduit le résultat suivant.

Corollaire 11.2.22. — *Soient φ-Mod$_{\mathscr{R}}$ la catégorie des modules libres de rang fini sur l'anneau de Robba munis d'un isomorphisme semi-linéaire et φ-Mod$_{\mathscr{E}^\dagger}$ celle des $\mathscr{E}^\dagger$-espaces vectoriels de dimension finie munis d'un isomorphisme semi-linéaire. Il y a des équivalences*

$$\begin{array}{rcl} Fib_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}} & \xrightarrow{\sim} & \varphi\text{-}Mod_{\mathscr{R}} \\ Fib_{Y\cup\{0\}/\varphi^{\mathbb{Z}}} & \xrightarrow{\sim} & \varphi\text{-}Mod_{\mathscr{E}^\dagger}. \end{array}$$

Remarque 11.2.23. — Si $\mathscr{E} \in \mathrm{Coh}_Y$ est muni d'une structure φ-équivariante alors la condition (2) de 11.2.5 est satisfaite. On en déduit donc de la même façon que dans le corollaire précédent que $\mathrm{Coh}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ s'identifie aux couples (M, φ) avec M un $\mathscr{R}$-module de type fini et φ un isomorphisme semi-linéaire.

Enfin on notera le résultat suivant parfois appelé « le cas facile du théorème de Kedlaya ».

Proposition 11.2.24 **(Kedlaya [45] prop. 5.11 et coro. 5.12)**
Le foncteur de complétion

$$\varphi\text{-}Mod_{\mathscr{E}^\dagger} \longrightarrow \varphi\text{-}Mod_{\mathscr{E}}$$

est une équivalence de catégories et donc la classification de Dieudonné-Manin s'applique à φ-Mod$_{\mathscr{E}^\dagger}$.

Démonstration. — D'après la proposition 11.2.15 les objets de φ-Mod$_{\mathscr{E}^\dagger}$ satisfont à la descente galoisienne relativement à $\widehat{\overline{F}}|F$. Puisqu'il en est de même pour φ-Mod$_{\mathscr{E}}$ on est ramené à montrer le résultat pour F algébriquement clos.
Pour $\lambda \in \mathbb{Q}$ on note $\mathscr{E}^\dagger(\lambda)$ l'isocristal isocline de pente λ usuel (defini sur $\mathbb{F}_q$ en fait). Soit alors $(V, \varphi) \in \varphi$-Mod$_{\mathscr{E}^\dagger}$. On procède par récurrence sur $\dim_{\mathscr{E}^\dagger}(V)$ afin de montrer que (V, φ) est somme directe de $\mathscr{E}^\dagger(\lambda)$, $\lambda \in \mathbb{Q}$. Soit $\lambda = \frac{d}{h}$, $(d, h) = 1$, la plus grande pente de Dieudonné-Manin de $(\widehat{V}, \varphi)$. Il existe alors un réseau $\Lambda \subset V$ tel que $\varphi^h(\Lambda) \subset \pi^d\Lambda$ (l'existence d'un tel réseau n'a aucun rapport avec la complétude ou non de $\mathscr{E}^\dagger$, cf. la preuve de Dieudonné-Manin donnée dans la section 2 du chapitre VI de [**62**]). On peut alors appliquer le lemme 11.2.25 qui suit couplé à l'hypothèse de récurrence pour conclure que (V, φ) est extension d'un isocristal de la forme $\oplus_i \mathscr{E}^\dagger(\mu_i)$ par $\mathscr{E}^\dagger(\lambda)^r$, $r \geq 1$, avec pour tout i, $\mu_i < \lambda$. Pour conclure il suffit maintenant de constater que

$$\mathrm{Ext}^1(\mathscr{E}^\dagger(\mu), \mathscr{E}^\dagger(\lambda)) = 0$$

dès que $\lambda > \mu$. Cela se ramène à vérifier que le conoyau de

$$\mathscr{E}^\dagger \xrightarrow{Id - \pi^{-d}\varphi^h} \mathscr{E}^\dagger$$

est nul dès que $d > 0$ et $h \geq 1$ ce qui ne pose pas de problème. □

Lemme 11.2.25. — *Soit Λ un $\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$-module libre de rang fini muni d'un endomorphisme semi-linéaire φ. Il y a alors une bijection*

$$\Lambda^{\varphi=Id} \xrightarrow{\sim} \widehat{\Lambda}^{\varphi=Id}.$$

Démonstration. — Soit $A \in M_n(\mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger})$ la matrice de φ dans une base de Λ. Quitte à remplacer cette base $(e_i)_i$ par $([\lambda]e_i)_i$ avec $\lambda \in F^\times$ tel que $|\lambda| \ll 1$ on peut supposer que $A \bmod \pi \in M_n(\mathcal{O}_F)$. Pour $x = \sum_{n\geq 0}[x_n]\pi^n \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}}$, $k \in \mathbb{N}$ et $\rho \in]0,1[$ on note

$$\|f\|_{k,\rho} = \sup_{0\leq i\leq k} |x_i|\rho^i.$$

On notera que les semi-normes $\|.\|_{k,\rho}$ sont sous-multiplicatives sur $\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$. Soit maintenant $X \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}}^n$ tel que

$$\varphi(X) = AX. \tag{7}$$

Si $X = (x_i)_{1\leq i\leq n}$ on note $\|X\|_{k,\rho} = \sup_{1\leq i\leq n} \|x_i\|_{k,\rho}$. Remarquons que si $f \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}^\dagger}$ vérifie $f \bmod \pi \in \mathcal{O}_F$ alors pour $\rho \in]0,1[$ suffisemment proche de 0 on a $|f|_\rho \leq 1$ (regarder le polygone de Newton de f). Choisissons donc $\rho_0 \in]0,1[$ tel que $A \in M_n(B_{[0,\rho_0]})$ et pour tout $\rho \in [0,\rho_0]$, $\sup_{i,j}|a_{ij}|_\rho \leq 1$. Pour tout entier $k \geq 0$, de l'égalité (7) on tire que

$$\|X\|_{k,\rho_0}^q = \|\varphi(X)\|_{k,\rho_0^q} \leq \|X\|_{k,\rho_0^q}.$$

De cela on déduit par récurrence que pour tout $m \geq 1$,

$$\|X\|_{k,\rho_0} \leq \|X\|_{k,\rho_0^{q^m}}^{1/q^m}.$$

Remarquons maintenant que si $f \in \mathcal{O}_{\mathscr{E}} \setminus \pi^{k+1}\mathcal{O}_{\mathscr{E}}$

$$\lim_{m\to+\infty} \|f\|_{k,\rho_0^{q^m}}^{1/q^m} = \rho^{i_0}$$

où si $f = \sum_{i\geq 0}[f_i]\pi^i$ alors $i_0 \leq k$ est le plus petit indice tel que $f_{i_0} \neq 0$. On en déduit aussitôt que

$$\sup_k \|X\|_{k,\rho_0} < +\infty$$

et donc $X \in B_{[0,\rho]}^n$ dès que $\rho < \rho_0$. □

11.3. GAGA d'après Kedlaya-Liu

Via le morphisme de ind-schémas φ-invariant

$$\varinjlim_{I\subset]0,1[} \operatorname{Spec}(B_I) \longrightarrow X$$

il y a un foncteur d'analytification

$$(-)^{an} : \mathrm{Coh}_X \longrightarrow \mathrm{Coh}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}.$$

***Théorème 11.3.1* (Kedlaya-Liu [44] théo. 8.7.8).** — *Le foncteur*

$$(-)^{an} : Coh_X \longrightarrow Coh_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$$

est une équivalence.

Démonstration. — Le cas des faisceaux cohérents de torsion est immédiat puisque si $y \in |Y|$ s'envoie sur $x \in |X|$ via $|Y|/\varphi^{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\sim} |X|$ alors $B^+_{dR,y} \xrightarrow{\sim} \widehat{\mathcal{O}}_{X,x}$. On se ramène alors aisément à montrer que

$$(-)^{an} : \mathrm{Fib}_X \longrightarrow \mathrm{Fib}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$$

est une équivalence. Commençons par la pleine fidélité. Utilisant les Hom internes on est ramené à montrer que

$$H^0(X, \mathscr{E}) = H^0(Y/\varphi^{\mathbb{Z}}, \mathscr{E}^{an})$$

qui par définition est $\Gamma(\mathscr{E}^{an})^{\varphi = Id}$ (cf. notations de la déf. 11.2.2). Soit donc $\mathscr{E} \in \mathrm{Fib}_X$. Fixons un recouvrement fini

$$X = \bigcup_i U_i$$

tel que pour tout i, $U_i = D^+(t_i)$ avec $t_i \in P$ homogène non nul et $\mathscr{E}_{|U_i}$ soit trivial. Notons $B_{e,i} = B[\frac{1}{t_i}]^{\varphi = Id}$ et $B_{e,ij} = B[\frac{1}{t_i t_j}]^{\varphi = Id}$. Après avoir fixé des trivialisations des $(\mathscr{E}_{|U_i})_i$ on obtient un cocyle

$$A_{ij} \in \mathrm{GL}_n(B_{e,ij}), \quad A_{ij} A_{jk} = A_{ik}.$$

Dès lors

$$\Gamma(X, \mathscr{E}) = \Big\{ (X_i)_i \in \prod_i B^n_{e,i} \mid A_{ij} X_j = X_i \Big\}.$$

Si $I \subset]0,1[$ est un intervalle compact on dispose alors d'un recouvrement

$$\mathrm{Spec}(B_I) = \bigcup_i \mathrm{Spec}(B_I[\tfrac{1}{t_i}]). \tag{8}$$

On a alors $\mathscr{E}^{an} = (M_I)_I$ où M_I est donné par le cocyle de Cech précédent sur le recouvrement (8) via les plongements

$$\mathrm{GL}_n(B_{e,ij}) \subset \mathrm{GL}_n(B_I[\tfrac{1}{t_i t_j}]).$$

Dès lors,

$$M_I = \Big\{ (X_i)_i \in \prod_i B_I[\tfrac{1}{t_i}] \mid A_{ij} X_j = X_i \Big\}.$$

Il s'en suit que

$$\Gamma(Y, \mathscr{E}^{an}) = \Big\{ (X_i)_i \in \prod_i \varprojlim_{I \subset]0,1[} \big(B_I[\tfrac{1}{t_i}] \big) \mid A_{ij} X_j = X_i \Big\}$$

et donc

$$\begin{aligned}\Gamma(Y/\varphi^{\mathbb{Z}},\mathscr{E}^{an}) &= \Gamma(Y,\mathscr{E}^{an})^{\varphi=Id}\\ &= \Big\{(X_i)_i \in \prod_i \Big(\varprojlim_{I\subset]0,1[}\big(B_I[\tfrac{1}{t_i}]\big)\Big)^{\varphi=Id} \;\Big|\; A_{ij}X_j = X_i\Big\}\end{aligned}$$

On a

$$\varprojlim_{I\subset]0,1[}\big(B_I[\tfrac{1}{t_i}]\big) \subset \mathcal{M}(Y)$$

le corps des fonctions méromorphes sur Y (sec. 3.5.4). De plus la partie négative du diviseur d'une telle fonction méromorphe est contenu dans le support du diviseur de t_i. Puisque

$$B = \{f \in \mathcal{M}(Y) \mid \mathrm{div}(f) \geq 0\}$$

on en déduit que

$$\Big(\varprojlim_{I\subset]0,1[}\big(B_I[\tfrac{1}{t_i}]\big)\Big)^{\varphi=Id} = B_{e,i}.$$

Cela conclut quant à la pleine fidélité.

La surjectivité essentielle résulte du théorème 11.3.2. En effet, si $\mathscr{E} = ((M_I)_I,\varphi) \in \mathrm{Fib}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ est de rang n et

$$u : \mathcal{O}^n_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}} \hookrightarrow \mathscr{E}$$

alors u est une modification au sens où son conoyau est un faiceau cohérent de torsion : pour tout I, $M_I/u(B_I^n)$ est de torsion. Mais se donner une telle modification φ-équivariante est équivalent à se donner une collection de réseaux $(\Lambda_y)_{y\in|Y|}$, $(B^+_{dR,y})^n \subset \Lambda_y$, vérifiant :

— $\varphi(\Lambda_y) = \Lambda_{\varphi(y)}$

— $\Lambda_y = (B^+_{dR,y})^n$ pour presque tout y mod $\varphi^{\mathbb{Z}}$.

Cela est équivalent à se donner une collection de réseaux $(N_x)_{x\in|X|}$, $\widehat{\mathcal{O}}^n_{X,x} \subset N_x$ avec égalité pour presque tout x. Mais cela est encore équivalent à se donner une modification

$$\mathcal{O}^n_X \hookrightarrow \mathscr{F}$$

avec $\mathscr{F} \in \mathrm{Fib}_X$. On a alors $\mathscr{F}^{an} = \mathscr{E}$. □

Pour $d \in \mathbb{Z}$ notons $\mathcal{O}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}(d) = \mathcal{O}_X(d)^{an}$ qui correspond au φ-module $(B,\pi^{-d}\varphi) \in \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_B$.

***Théorème 11.3.2* (Kedlaya).** — *Soit $\mathscr{E} \in Fib_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}}$ de rang n. Pour $d \gg 0$ il existe un monomorphisme*

$$\mathcal{O}^n_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}} \hookrightarrow \mathscr{E}(d)$$

qui est donc une modification.

Nous n'allons pas donner la preuve en détails. Le point consiste à construire suffisamment de sections globales de $\mathscr{E}(d)$ pour $d \gg 0$. Lorsque $E = \mathbb{F}_q(\!(\pi)\!)$ la preuve est donnée dans le théorème 4.3 de [**34**] en suivant un argument de Kedlaya ([**45**]). On retrouve cet argument dans la preuve de la proposition 6.2.2 de [**44**] elle même appliquée dans la démonstration du théorème 6.3.9 de [**44**].

Remarque 11.3.3. — Le théorème GAGA 11.3.1 précédent a été démontré en tout premier dans l'article [**20**] (théo. 3.5) par l'un des auteurs afin de comprendre le lien entre les résultats de ce texte et ceux de Kedlaya. La preuve donnée dans [**20**] de GAGA n'est cependant pas naturelle. La méthode de démonstration consiste en effet à vérifier que les deux théorèmes de classification des fibrés vectoriels, celui de ce livre et celui de Kedlaya, coïncident via le foncteur d'analytification. La preuve précédente de Kedlaya et Liu répond à la question posée dans la section 7.5 de [**22**] (après la proposition 7.14) de donner une démonstration plus naturelle de GAGA.

Remarque 11.3.4. — Réciproquement, la preuve donnée dans le chapitre 8 de ce livre du théorème de classification des fibrés s'adapte aussitôt pour donner une preuve du théorème de Kedlaya de classification des φ-modules sur $\mathscr{R}_F$ utilisant les périodes des groupes p-divisibles (cependant il n'est pas impossible que certains des calculs dans l'anneau de Robba $\mathscr{R}_F$ avec F sphériquement complet effectués par Kedlaya tels que ceux de la section 2.6 de [**42**] puissent s'interpréter en termes de quasi-logarithmes). *Néanmoins* le lecteur affuté remarquera qu'afin de disposer de filtrations de Harder-Narasimhan pour les fibrés sur $Y/\varphi^{\mathbb{Z}}$ on a besoin de savoir que ceux-ci sont extensions successives de fibrés en droites. La seule méthode connue pour démontrer cela est d'appliquer le théorème 11.3.2, résultat auquel on ne peut donc pas échapper pour classifier les φ-modules sur $\mathscr{R}_F$.

11.4. En résumé

On a donc obtenu un diagramme d'équivalence qui est le suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Fib}_X \arrow[r, "\sim", "\mathrm{GAGA}"'] & \mathrm{Fib}_{Y/\varphi^{\mathbb{Z}}} \arrow[r, equal] & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_B \arrow[d, "\simeq"] & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{B^+} \arrow[l, "\sim", "\text{si } F \text{ alg clos}"'] \arrow[d, equal] \\
 & & \varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}} & F\text{-isocristaux}/\mathrm{Spec}(\mathcal{O}_F/\varpi_F)
\end{tikzcd}$$

En partant de la gauche, la première flêche horizontale GAGA est induite par le morphisme de ind-schémas $\varinjlim_{\substack{I \subset]0,1[\\ \text{compact}}} \mathrm{Spec}(B_I) \to X$. La seconde égalité est donnée par le foncteur section globales qui à $(M_I)_I$ associe le module projectif $\varprojlim_I M_I$. Les

autres flêches sont simplement données par les inclusions $B^+ \subset B$ et $B \subset \mathscr{R}$.

En termes géométriques l'équivalence

$$\varphi\text{-Mod}_{B^+} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_B$$

lorsque F est algébriquement clos signifie que tout fibré φ-équivariant sur Y s'étend canoniquement en un fibré φ-équivariant sur « $Y \cup \{|.|_1 = 1\}$ ». Comme remarqué précédemment (rem. 11.1.10) ce foncteur extension canonique n'est pas un foncteur exact.

Remarque 11.4.1. — Il résulte donc du théorème de classification des fibrés que si $(M, \varphi) \in \varphi\text{-Mod}_B$ avec F algébriquement clos alors le module projectif M est un B-module libre. Il n'y a pas de raison pour que ce soit le cas pour F parfait quelconque. Remarquons de plus qu'en général les B-modules projectifs ne sont pas libres (i.e. tout fibré sur Y est trivial) même si F est algébriquement clos bien que ce soit probablement le cas lorsque F est sphériquement complet.

En toutes généralités le foncteur

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathscr{E}^\dagger} \longrightarrow \varphi\text{-Mod}_{\mathscr{R}}$$

est essentiellement surjectif. C'est une conséquence du fait que la filtration de Harder-Narasimhan est scindée (9.4.1) et du théorème de classification 9.4.3 couplé à la proposition 11.2.24. Cepdendant ce n'est pas une équivalence de catégories. Bien sûr le foncteur précédent n'est pas pleinement fidèle. En termes géométriques, tout fibré φ-équivariant sur Y s'étend de façon non-canonique en un fibré φ-équivariant sur « $Y \cup \{0\}$ ».

Spécialisons nous maintenant en pente de Harder-Narasimhan $\lambda \in \mathbb{Q}$. Alors,

$$\varphi\text{-Mod}_{\mathscr{E}^\dagger}^{isoc.,-\lambda} \xrightarrow{\sim} \varphi\text{-Mod}_{\mathscr{R}}^{ss.,\lambda}$$

est une équivalence où le membre de gauche est formé des isocristaux isoclines de pente $-\lambda$ au sens de Dieudonné-Manin et celui de droite des fibrés semi-stables de pentes λ au sens de Harder-Narasimhan.

11.5. Le théorème de Berger

Supposons maintenant que $K|\mathbb{Q}_p$ est un corps local à corps résiduel parfait dont on fixe une clôture algébrique $\overline{K}$. Soit $K_\infty = K(\zeta_{p^\infty})|K$. Notons $\Gamma = \mathrm{Gal}(K_\infty|K)$, un sous-groupe ouvert de $\mathbb{Z}_p^\times$ et $\widetilde{K}_\infty$ le corps des normes *non parfait* tel qu'introduit dans [**61**], un corps local de caractéristique positive. Rappelons que l'on a alors

$$\widehat{K}_\infty^\flat = \left(\widetilde{K}_\infty^{1/p^\infty}\right)^{\widehat{}}.$$

Considérons l'anneau de Robba « classique » $\mathscr{R}_{\widetilde{K}_\infty}$ et la catégorie associée de (φ, Γ)-modules

$$(\varphi, \Gamma) - \mathrm{mod}_{\mathscr{R}_{\widetilde{K}_\infty}}.$$

D'après le théorème principal de [**11**] on peut décompléter la complétion de $\widetilde{K}_\infty^{1/p^\infty}$ en utilisant l'action de Γ grâce à des traces à la Tate pour obtenir une équivalence

$$(\varphi, \Gamma) - \mathrm{mod}_{\mathscr{R}_{\widetilde{K}_\infty}} \xrightarrow{\sim} (\varphi, \Gamma) - \mathrm{mod}_{\widehat{K}^\flat_\infty}$$

De cela et du théorème GAGA on déduit le théorème suivant de Berger (qui est exprimé en termes de B-paires dans [**5**]).

Théorème 11.5.1 **(Berger [5])**. — *Il y a une équivalence de catégories entre* $(\varphi, \Gamma) - mod_{\mathscr{R}_{\widetilde{K}_\infty}}$ *et fibrés* Γ*-équivariants sur* $X_{\widehat{K}^\flat_\infty}$.

On remarquera que puisqu'il existe des représentations p-adiques non surconvergentes de $\mathrm{Gal}(\overline{K}|K_\infty)$, l'action de Γ est essentielle dans le théorème précédent et le foncteur

$$\varphi\text{-}\mathrm{Mod}_{\mathscr{R}_{\widetilde{K}_\infty}} \longrightarrow \mathrm{Fib}_{X_{\widehat{K}^\flat_\infty}}$$

n'est pas essentiellement surjectif.

BIBLIOGRAPHIE

[1] *Revêtements étales et groupe fondamental (SGA 1)* – Documents Mathématiques (Paris) [Mathematical Documents (Paris)], 3, Société Mathématique de France, Paris, 2003, Séminaire de géométrie algébrique du Bois Marie 1960–61. [Algebraic Geometry Seminar of Bois Marie 1960-61], Directed by A. Grothendieck, With two papers by M. Raynaud, Updated and annotated reprint of the 1971 original [Lecture Notes in Math., 224, Springer, Berlin ; MR0354651 (50 #7129)].

[2] Y. André – « Slope filtrations », *Confluentes Mathematici* **1** (2009).

[3] A. Beauville & Y. Laszlo – « Un lemme de descente », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* **320** (1995), no. 3, p. 335–340.

[4] L. Berger – « Représentations p-adiques et équations différentielles », *Invent. Math.* **148** (2002), no. 2, p. 219–284.

[5] L. Berger – « Construction de (ϕ, Γ)-modules : représentations p-adiques et B-paires », *Algebra Number Theory* **2** (2008), no. 1, p. 91–120.

[6] V. Berkovich – *Spectral theory and analytic geometry over non-archimedean fields*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 33, American Mathematical Society, Providence, 1990.

[7] S. Bloch & K. Kato – « L-functions and Tamagawa numbers of motives », in *The Grothendieck Festschrift, Vol. I*, Progr. Math., vol. 86, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1990, p. 333–400.

[8] S. Bosch, U. Güntzer & R. Remmert – *Non-archimedean analysis*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, vol. 261, Springer-Verlag, Berlin.

[9] N. Bourbaki – *Éléments de mathématique. Algèbre. Chapitres 1 à 3*, Hermann, Paris, 1970.

[10] C. Breuil – « Schémas en groupes et corps des normes », *http://www.ihes.fr/~breuil/publications*.

[11] F. Cherbonnier & P. Colmez – « Représentations p-adiques surconvergentes », *Invent. Math.* **133** (1998), no. 3, p. 581–611.

[12] P. Colmez – « Espaces de Banach de dimension finie », *J. Inst. Math. Jussieu* **1** (2002), no. 3, p. 331–439.

[13] ———, « Espaces vectoriels de dimension finie et représentations de de Rham », *Astérisque* (2008), no. 319, p. 117–186, Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ)-modules.

[14] V. G. Drinfeld – « Elliptic modules », *Mat. Sb. (N.S.)* **136** (1974), no. 94, p. 594–627.

[15] V. G. Drinfeld – « Coverings of p-adic symmetric domains », *Functional Analysis and its Applications* **10** (1976), no. 2, p. 29–40.

[16] G. Faltings – « Group schemes with strict $\mathcal{O}$-action », *Mosc. Math. J.* **2** (2002), no. 2, p. 249–279.

[17] ———, « A relation between two moduli spaces studied by V. G. Drinfeld », in *Algebraic number theory and algebraic geometry*, Contemp. Math., vol. 300, 2002, p. 115–129.

[18] L. Fargues – « L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld et applications cohomologiques », in *L'isomorphisme entre les tours de Lubin-Tate et de Drinfeld*, Progress in math., 262, Birkhäuser, 2008, p. 1–325.

[19] ———, « La filtration de Harder-Narasimhan des schémas en groupes finis et plats », *J. Reine Angew. Math.* **645** (2010), p. 1–39.

[20] ———, « Quelques résultats et conjectures concernant la courbe », in *De la géométrie algébrique aux formes automorphes (I)*, Asterisque, vol. 369, 2015.

[21] L. Fargues & J.-M. Fontaine – « Vector bundles and p-adic galois representations », *AMS/IP Studies in Advanced Mathematics Volume 51, 2011.*

[22] ———, « Vector bundles on curves and p-adic hodge theory ».

[23] L. Fargues – « Théorie de la réduction pour les groupes p-divisibles », *Prépublication, http://www.math.u-psud.fr/~fargues/Prepublications*.

[24] J.-M. Fontaine – *Groupes p-divisibles sur les corps locaux*, Société Mathématique de France, Paris, 1977, Astérisque, No. 47-48.

[25] ———, « Le corps des périodes p-adiques », *Astérisque* (1994), no. 223, p. 59–111, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[26] J.-M. Fontaine – « Représentations p-adiques semi-stables », *Astérisque* (1994), no. 223, p. 113–184, With an appendix by Pierre Colmez, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[27] ———, « Presque C_p-représentations », *Doc. Math.* (2003), no. Extra Vol., p. 285–385 (electronic), Kazuya Kato's fiftieth birthday.

[28] ———, « Arithmétique des représentations galoisiennes p-adiques », *Astérisque* (2004), no. 295, p. xi, 1–115, Cohomologies p-adiques et applications arithmétiques. III.

[29] B. Gross & M. Hopkins – « Equivariant vector bundles on the Lubin-Tate moduli space », in *Topology and representation theory (Evanston, IL, 1992)*, Contemp. Math., vol. 158, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1994, p. 23–88.

[30] A. Grothendieck – « Sur la classification des fibrés holomorphes sur la sphère de Riemann », *Amer. J. Math.* **79** (1957), p. 121–138.

[31] ———, « Éléments de géométrie algébrique. III. Étude cohomologique des faisceaux cohérents. I », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 11, p. 167.

[32] A. Grothendieck – « Éléments de géométrie algébrique. II. Étude globale élémentaire de quelques classes de morphismes », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1961), no. 8, p. 222.

[33] G. Harder & M. S. Narasimhan – « On the cohomology groups of moduli spaces of vector bundles on curves », *Math. Ann.* **212** (1974/75), p. 215–248.

[34] U. Hartl & R. Pink – « Vector bundles with a Frobenius structure on the punctured unit disc », *Compos. Math.* **140** (2004), no. 3, p. 689–716.

[35] M. Hazewinkel – « Une théorie de Cartier-Dieudonné pour les A-modules formels », *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A-B* **284** (1977), no. 12, p. A655–A657.

[36] ———, *Formal groups and applications*, Pure and Applied Mathematics, vol. 78, Academic Press Inc. [Harcourt Brace Jovanovich Publishers], New York, 1978.

[37] ———, « Constructing formal groups. VIII. Formal A-modules », *Compositio Math.* **38** (1979), no. 3, p. 277–291.

[38] ———, « Twisted Lubin-Tate formal group laws, ramified Witt vectors and (ramified) Artin-Hasse exponentials », *Trans. Amer. Math. Soc.* **259** (1980), no. 1, p. 47–63.

[39] A. J. de Jong – « Étale fundamental groups of non-Archimedean analytic spaces », *Compositio Math.* **97** (1995), no. 1-2, p. 89–118, Special issue in honour of Frans Oort.

[40] K. Kato – « Lectures on the approach to Iwasawa theory for Hasse-Weil L-functions via B_{dR}. I », in *Arithmetic algebraic geometry (Trento, 1991)*, Lecture Notes in Math., vol. 1553, Springer, Berlin, 1993, p. 50–163.

[41] N. M. Katz – « Slope filtration of F-crystals », in *Journées de Géométrie Algébrique de Rennes (Rennes, 1978), Vol. I*, Astérisque, vol. 63, Soc. Math. France, Paris, 1979, p. 113–163.

[42] K. Kedlaya – « Slope filtrations revisited », *Doc. Math.* **10** (2005), p. 447–525.

[43] ———, « Slope filtrations for relative Frobenius », *Astérisque* (2008), no. 319, p. 259–301, Représentations p-adiques de groupes p-adiques. I. Représentations galoisiennes et (ϕ, Γ)-modules.

[44] K. Kedlaya & R. Liu – « Relative p-adic hodge theory : foundations », *Asterisque* **371** (2015).

[45] K. S. Kedlaya – « A p-adic local monodromy theorem », *Ann. of Math. (2)* **160** (2004), no. 1, p. 93–184.

[46] M. Kisin – « Crystalline representations and F-crystals », in *Algebraic geometry and number theory*, Progr. Math., vol. 253, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2006, p. 459–496.

[47] G. Laffaille – « Groupes p-divisibles et corps gauches », *Compositio Math.* **56** (1985), no. 2, p. 221–232.

[48] G. Laffaille – « Construction de groupes p-divisibles. Le cas de dimension 1 », **65** (1979), p. 103–123.

[49] M. Lazard – « Les zéros des fonctions analytiques d'une variable sur un corps valué complet », *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math.* (1962), no. 14, p. 47–75.

[50] M. S. Narasimhan & C. S. Seshadri – « Stable and unitary vector bundles on a compact Riemann surface », *Ann. of Math. (2)* **82** (1965), p. 540–567.

[51] B. Perrin-Riou – « Représentations p-adiques ordinaires », *Astérisque* (1994), no. 223, p. 185–220, With an appendix by Luc Illusie, Périodes p-adiques (Bures-sur-Yvette, 1988).

[52] J. Plût – « Espaces de banach analytiques p-adiques et espaces de banach-colmez », *Thèse de l'université Paris-Sud Orsay, septembre 2009.*

[53] B. Poonen – « Maximally complete fields », *Enseign. Math. (2)* **39** (1993), no. 1-2, p. 87–106.

[54] M. Rapoport & T. Zink – *Period spaces for p-divisible groups.*, Annals of Mathematics Studies, no. 141, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1996.

[55] P. Schneider & J. Teitelbaum – « Algebras of p-adic distributions and admissible representations », *Invent. Math.* **153** (2003), no. 1, p. 145–196.

[56] P. Scholze – « Perfectoid spaces », *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.* **116** (2012), p. 245–313.

[57] P. Scholze & J. Weinstein – « Moduli of p-divisible groups », *Camb. J. Math.* **1** (2013), no. 2, p. 145–237.

[58] S. Sen – « Continuous cohomology and p-adic Galois representations », *Invent. Math.* **62** (1980/81), no. 1, p. 89–116.

[59] J.-P. Serre – *Corps locaux (troisiéme édition)*, Hermann.

[60] J. T. Tate – « *p-divisible groups.* », in *Proc. Conf. Local Fields (Driebergen, 1966)*, Springer, Berlin, 1967, p. 158–183.

[61] J.-P. Wintenberger – « Le corps des normes de certaines extensions infinies de corps locaux ; applications », *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)* **16** (1983), no. 1, p. 59–89.

[62] T. Zink – *Cartiertheorie kommutativer formaler gruppen.*, no. 68, Teubner-Texte zur Mathematik [Teubner Texts in Mathematics],, 1984.