Poutres composites piézoélectriques : modélisation des effets 3D, validations numériques et expérimentales

Corrado Maurini, Joël Pouget, Francesco Dell'Isola

▶ **To cite this version:**

Corrado Maurini, Joël Pouget, Francesco Dell'Isola. Poutres composites piézoélectriques : modélisation des effets 3D, validations numériques et expérimentales. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01509271

HAL Id: hal-01509271
https://hal.science/hal-01509271

Submitted on 16 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Poutres composites piézoélectriques : modélisation des effets 3D, validations numériques et expérimentales

Corrado Maurini* — Joël Pouget* — Francesco dell'Isola**

**Institut Jean Le Rond d'Alembert, CNRS (UMR 7190)*
Université Pierre et Marie Curie
4 place Jussieu, Tour 55-65, 4éme étage
75252 Paris Cedex 05 (France)
maurini@lmm.jussieu.fr; pouget@lmm.jussieu.fr

*** Dipartimento di Ingegneria Strutturale e Geotecnica*
Università di Roma La Sapienza
via Eudossiana 18
00184 Rome, Italie
francesco.dellisola@uniroma1.it

RÉSUMÉ. : *Dans ce travail, nous proposons un modèle du type Euler-Bernoulli amélioré pour des poutres multicouches piézoélectriques. Ce modèle est capable de prendre en compte les effets 3D et le potentiel électrique induit d'une manière satisfaisante. Le modèle est validé grâce à des tests numériques (EF) et des essais expérimentaux. L'accent est mis sur le rôle joué dans, la modélisation, par les hypothèses sur les distributions des contraintes et des déformations transverses (dans la direction de la largeur de la poutre).*

ABSTRACT. : *A coupled Euler-Bernoulli model of laminated piezoelectric beams is proposed. This enhanced model accounts for the influence of 3D distribution of mechanical stress and strain and induced electric potential. The model is tested by means of numerical simulations (FEM) and experimental tests. The role played by transverse (in the beam width direction) stress and strain distributions in beam modelling of piezoelectric laminates is underlined.*

MOTS-CLÉS : *Euler-Bernoulli, poutres multicouches piézoélectrique, capacitance piézoélectrique, tests expérimentaux.*

KEYWORDS Euler-Bernoulli, piezoelectric, laminates, beams, piezoelectric capacitance, experimental tests.

1. Introduction

Les structures élancées telles que les poutres multicouches comportant des couches actives piézoélectriques sont d'excellents candidats pour la conception de systèmes de contrôle actif ou passif de vibrations, de contrôle de forme ou encore de contrôle de santé des structures mécaniques. Le développement d'outils efficaces et robustes de modélisation de poutres multicouches piézoélectriques est particulièrement important afin d'obtenir des estimations précises des paramètres des modèles. Le présent travail se propose de mettre en évidence les effets 3D dans des poutres multicouches piézoélectriques et d'offrir une modélisation capable de prendre en compte ces effets et la réelle interaction entre les couches. Dans ce but, le point de départ est un modèle de plaque multicouche piézoélectrique du type Love-Kirchhoff. Une formulation permet la réduction du modèle plaque à celui d'une poutre et cela conduit à une poutre d'Euler-Bernoulli améliorée incluant les effets 3D. Le modèle ainsi déduit est alors validé par des tests numériques (EF 3D) et des essais expérimentaux (analyse de déformation et analyse modale).

2. Modèles

Dans des couches piézoélectriques polarisées suivant l'épaisseur, les déformations S_i et les contraintes normales T_i ($i = 1,2$ et on utilise la notation de Voigt) sont couplées au déplacement électrique D_3 et au champ électrique E_3 par les relations (voir Figure 1) :

$$\begin{cases} S_i = s_{ij}^E T_j + d_{3i} E_3 \\ D_3 = d_{3j} T_{ij} + \varepsilon_{33}^T E_3 \end{cases}, \text{ ou } \quad \begin{cases} T_i = \tilde{c}_{ij}^E S_j - \tilde{e}_{3i} E_3 \\ D_3 = \tilde{e}_{3j} S_j + \tilde{\varepsilon}_{33}^S E_3 \end{cases} \qquad [1]$$

Dans la deuxième forme (S-E), $\tilde{c}_{ij}^E, \tilde{e}_{3i}, \tilde{\varepsilon}_{33}^S$ sont les constantes de rigidité, de couplage et diélectrique effectives en contraintes planes ($T_3 = 0$).

Le modèle le plus simple pour la flexion plane d'une poutre piézoélectrique est celui d'Euler-Bernoulli. Dans la suite on considérera la poutre sandwich de la Figure 1 avec un couplage global en flexion. Dans ce cas, la loi de comportement est :

$$\begin{cases} M_1 = k_{Mw} \kappa_1 - e_{MV} V \\ q = e_{MV} \kappa_1 + \varepsilon_{qV} V \end{cases} \qquad [2]$$

où M_1 est le moment produisant une flexion dans le plan $\mathbf{e}_1$-$\mathbf{e}_3$, κ_1 est la courbure correspondante, q est la charge piézoélectrique pour unité de longueur et V la différence de potentiel entre les terminaux électriques. Notre objectif est de discuter l'influence des hypothèses pour les contraintes et les déformations de la section

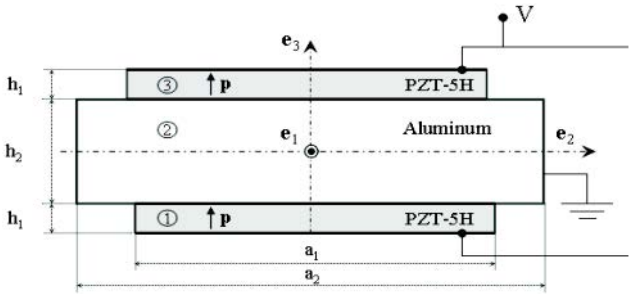

Figure 1. *Section droite d'une poutre sandwich avec couplage en flexion. La polarisation des couches piézoélectriques est indiquée* (**p**)

droite sur les estimations des constantes des équations [2]. On supposera que la couche centrale est élastique isotrope de module de Young $Y = 1/s_{11}$, de module de Poisson ν et de largeur (a_2), supérieure à celle des couches piézoélectriques (a_1).

2.1. Modèle standard en état de contrainte uniaxial (NS)

La plupart des modèles présentés dans la littérature acceptent l'hypothèse des contraintes transversales nulles : $T_2 = 0$. Alors, à partir des équations [1], avec les hypothèses cinématiques d'un modèle d'Euler-Bernoulli et avec la définition du moment fléchissant, on obtient les expressions standards pour les constantes constitutives :

$$k_{Mw}^{(NS)} = \frac{a_1 h_1^3}{6 s_{11}^D} + \frac{a_1 h_1 (h_1 + h_2)^2}{2 s_{11}^E} + \frac{a_2 h_2^3}{12 s_{11}},$$

$$e_{MV}^{(NS)} = -d_{31} a_1 (h_1 + h_2)/s_{11}^E, \qquad \varepsilon_{qV}^{(NS)} = \frac{2a_1}{h_1} \varepsilon_{33}^T \left(1 - \frac{d_{31}^2}{s_{11}^E \varepsilon_{33}^T}\right) \qquad [3]$$

où $s_{11}^D = s_{11}^E (1 + d_{31}^2 / s_{11}^E \varepsilon_{33}^T)$. Ces expressions prennent en compte la différence de rigidité pour les déformations en flexion (s_{11}^D) et membranaires (s_{11}^E) dans les couches piézoélectriques. Cet effet est dû à l'influence de la contribution au potentiel électrique (quadratique dans l'épaisseur) induite par des déformations en flexion, lorsque la loi de conservation de la charge est vérifiée. Les modèles élémentaires négligent cet effet et ne font pas la distinction entre s_{11}^D et s_{11}^E.

2.2 Modèle amélioré avec contraintes transverses (NSR)

Une plaque composite piézoélectrique de Kirchhoff-Love est caractérisée par la lois de comportement suivante :

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & -F_1 \\ D_{12} & D_{22} & -F_2 \\ F_1 & F_2 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \\ V \end{bmatrix}, \text{ avec } \begin{cases} D_{ij} = \sum_{r=1\ldots n} \tilde{c}_{ij}^{E} h_r z_r^2 + \tilde{c}_{ij}^{D} h_r^3 / 12, \\ F_i = \sum_{r=1\ldots n} \tilde{e}_{3i} z_r \alpha_r, \quad \varepsilon = \sum_{r=1\ldots n} \dfrac{\tilde{\varepsilon}_{33}^{S}}{h_r} \end{cases} \quad [4]$$

où m_1 et m_2 sont les moments pour unité de longueur du modèle plaque, σ est la charge électrique surfacique. Ici, le cisaillement est négligé. Les expressions données pour les constantes constitutives sont le résultat de l'application de la théorie des plaques multicouches ; elles incluent l'influence du potentiel induit, avec $\tilde{c}_{ij}^{D} = \tilde{c}_{ij}^{E}(1 + \tilde{e}_{3i}^2 / \tilde{c}_{ij}^{E} \tilde{\varepsilon}_{33}^{S})$. La constante α_r est égale à 1 pour les couches connectés en phase avec les terminaux électriques, -1 pour celles en opposition de phase et 0 pour les couches élastiques, z_r est la coordonnée du plan moyen de chaque couche.

Sur la base de ce modèle de plaque on introduit une hypothèse plus faible par rapport à celle du modèle NS : moment résultant des contraintes T_2 nul (flexion libre de la section droite) . Alors, avec $m_2 = 0$ dans [4] on obtient

$$\begin{bmatrix} m_1 \\ \sigma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} - D_{12}^2 / D_{22} & -\left(F_1 - D_{12} / D_{22}\right) \\ \left(F_1 - D_{12} / D_{22}\right) & \varepsilon + F_2^2 / D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \kappa_1 \\ V \end{bmatrix} \quad [5]$$
$$\kappa_2 = -D_{12} / D_{22} \kappa_1 + 1 / D_{22} m_2 + F_2 / D_{22} V$$

A noter que les coefficients en [5] ne sont pas constants sur la section droite de la poutre, car $a_1 \neq a_2$; les discontinuités géométriques impliquent des courbures distinctes pour les différentes parties régulières. On pourra trouver les expressions des coefficients des lois de comportement « poutre » [2] par intégration des équations [5] sur la largeur. On obtient :

$$\begin{aligned} k_{Mw}^{(NSR)} &= a_1 K_{11}(1 - K_{12}^2 / K_{11}^2) + (a_2 - a_1) h_2^3 \tilde{c}_{11}(1 - \nu^2) \\ e_{MV}^{(NSR)} &= a_1 \tilde{e}_{31}(h_1 + h_2)(1 - K_{12} / K_{11}) \\ \varepsilon_{qV}^{(NSR)} &= 2 a_1 \tilde{\varepsilon}_{33}^{S} / h_1 + a_1 (\tilde{e}_{31}(h_1 + h_2))^2 / K_{11} \\ K_{ij} &= \frac{\tilde{c}_{ij}^{E} h_1^3}{12} \left(6 \left(1 + \frac{h_2}{h_1} \right)^2 + 2 \frac{\tilde{c}_{ij}^{D}}{\tilde{c}_{ij}^{E}} + \frac{\tilde{c}_{ij}}{\tilde{c}_{ij}^{E}} \frac{h_2^3}{h_1^3} \right) \end{aligned} \quad [6]$$

Ce type de modélisation est adopté pour les poutres composites multicouches (Berthelot, 1999), et il est utilisé pour des poutres composites piézoélectriques dans (Bois et al., 2007). Les résultats obtenus, coïncident avec ceux trouvés dans (Maurini et al. 2007) sur la base d'un principe variationnel mixte à partir du modèle 3D.

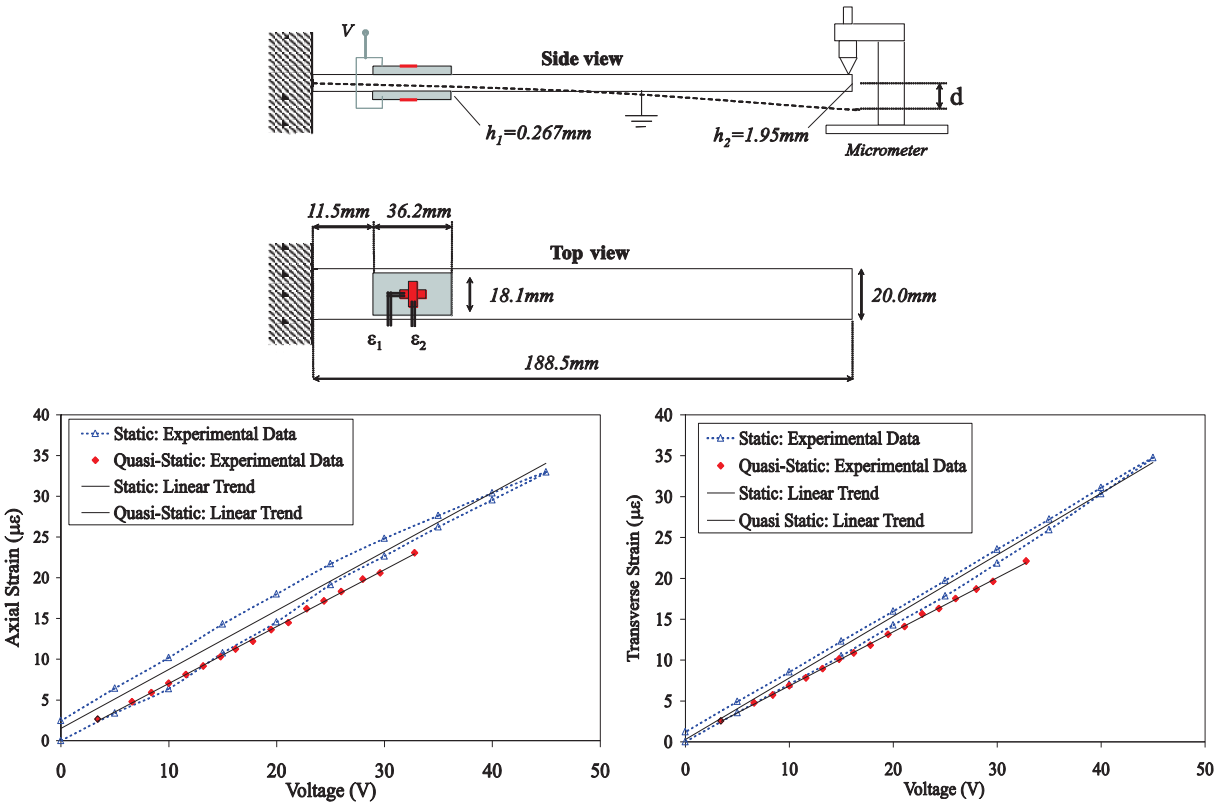

Figure 2. *Montage expérimental pour l'analyse des déformations axiale et transverse par des jauges de déformation sur les faces des éléments piézoélectriques avec potentiel électrique appliqué.*

3. Résultats numériques et expérimentaux : discussion

Le candidat retenu pour les études numériques et expérimentales est un prototype de poutre élastique (aluminium) encastrée-libre équipée de deux éléments piézoélectriques montés en sandwich (voir Figures 1 et 2). Les tests expérimentaux pour les mesures des déformations sont réalisés grâce à des jauges de déformation du type rosette à 90° placées sur les faces libres des actionneurs. Deux situations sont examinées : (i) déformations induites par un potentiel électrique appliqué et (ii) déformations dues à un déplacement imposé à l'extrémité libre de la poutre sous condition circuit fermé. Pour l'étude numérique (code ABAQUS), la structure est maillée avec 1162 élément C3D20R pour la partie élastique et C3D20RE pour la partie piézoélectrique. Ces sont des éléments *brick* quadratiques à 20 nœuds (avec 4 ddl par nœud dans le cas piézoélectrique).

La Figure 2 présente l'ensemble des mesures des déformations axiale et transverse en fonction du potentiel électrique appliqué. Deux types de mesure ont été réalisés (i) essai statique et (ii) essai quasi-statique par application d'un potentiel électrique harmonique à une fréquence de 6 Hz. Le test quasi-statique nous permet de s'affranchir du phénomène de dérive des céramiques piézoélectriques. Le Tableau 1 résume l'ensemble des résultats pour les déformations axiale et

transverse. La comparaison avec les mesures expérimentales et le calcul par les éléments finis démontre clairement que le présent modèle (NSR, Euler-Bernoulli amélioré) donne d'excellentes estimations des déformations et de leur rapport pour les deux conditions de chargement. Nous noterons que le modèle standard (NS, contrainte transverse nulle) fournit une estimation de la déformation transverse entachée d'erreurs. Le Tableau 2 donne les résultats pour la capacitance piézoélectrique. L'identification expérimentale est faite à l'aide d'un test dynamique où les éléments piézoélectriques sont connectés à un circuit RL (voir Porfiri et al., 2007). Les résultats sont sans équivoques ; le modèle proposé conduit à une estimation très proche de celle obtenue par le calcul EF et par l'identification expérimentale (erreur de 5,5%). Le modèle standard surestime la capacitance.

Les résultats et les comparaisons démontrent que le présent modèle incluant les effets 3D et le potentiel électrique induit fournit des estimations fiables. Le choix des hypothèses sur l'état de contrainte et des déformations est crucial pour la robustesse des modèles. L'estimation correcte de la capacitance piézoélectrique est essentielle pour la conception de systèmes de contrôle de vibrations.

	Déformations/Voltage appliqué ($\mu\varepsilon / V$)			**Déformations/Déplacement appliqué** ($\mu\varepsilon / mm$)		
	ε_1 / V	ε_2 / V	$\varepsilon_2 / \varepsilon_1$	ε_1 / V	ε_2 / V	$\varepsilon_2 / \varepsilon_1$
Exp. Static	0.72±0.05	0.75±0.03	1.04	57±0.5	-18±0.3	-.32
Exp. Quasi-St.	0.69±0.01	0.66±0.01	0.96	-	-	-
NSR model	0.60	0.65	1.08	58.2	-18.7	-.32
NS model	0.61	1.36	2.23	58.2	-19.9	-.34
EF 3D	0.63	0.60	0.95	60	-20	-.33

Tableau 1. *Déformations axiale et transverse.*

	Expérimentale	**Modèle NS**	**Modèle NSR**	**EF 3D**
C	109.4 nF	134.0 nF (+22.47%)	103.4 nF (-5.50%)	109.6 nF

Tableau 2. *Capacitance piézoélectrique.*

5. Bibliographie

Maurini C., Pouget J., dell'Isola F., "Extension of the Euler-Bernoulli model of piezoelectric laminates to include 3D effects via a mixed approach", *Comp & Struct* 84, 2006, p.1438-58.

Porfiri M., Maurini C., Pouget J., "Identification of electromechanical modal parameters of linear piezoelectric structures", *Smart Mart. Struct*., 2007, à paraître.

Berthelot J.-M., *Matériaux composites*, Paris, Tec&Doc, 1999.

Bois C., Herzog P., Hochard C., "Monitoring a delamination in a laminated composite beam sing in-situ measurements and parametric identification", *J. Sound and Vibration,* 299, 2007, p.786-805.