



HAL
open science

Une approche originale pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes

Vincent Magnier, Géry de Saxcé, David Crépin

► To cite this version:

Vincent Magnier, Géry de Saxcé, David Crépin. Une approche originale pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01509262

HAL Id: hal-01509262

<https://hal.science/hal-01509262>

Submitted on 16 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Une approche originale pour déterminer les facteurs d'intensité de contraintes

Magnier vincent, de Saxcé géry & Crépin david

Laboratoire de Mécanique de Lille (LML)
UMR CNRS 8107
Boulevard Paul Langevin
59655 Villeneuve d'Ascq
France
v.magnier@ed.univ-lille1.fr

RÉSUMÉ. Ce travail porte sur l'extraction des facteurs d'intensité de contraintes dans les matériaux composites stratifiés. L'originalité de cette étude se fait dans l'utilisation d'une famille d'éléments finis mixtes tridimensionnels couplés à un code précis de concentrations de contraintes. Concernant la classe d'éléments finis, baptisée "Métis", elle fait partie de la famille des éléments finis hybrides. À propos du calcul des contraintes singulières, nous utilisons une méthode asymptotique. En illustration pour finir, l'exemple du "end-loaded split" sera traité.

ABSTRACT. This work deals on the stress intensity factors extraction in laminate composite. The originality of this study is done is the use of 3D mixed finite elements coupled with a code for precise evaluation of stress concentration. The mixed finite elements, named "Métis", is included in the family of hybrid finite element. Concerning calculation of singular stress, a asymptotic method is employed. And, to illustrate this method, the "end-loaded slit" example will be treated.

MOTS-CLÉS : facteurs d'intensité de contraintes, éléments finis mixtes, singularité de contraintes
KEYWORDS: stress intensity factors, mixed finite elements, stress' singularity

1. Introduction

Dans l'étude de l'endommagement des matériaux multicouches, il est apparu que des phénomènes de surcontraintes au voisinage de discontinuités géométriques ou matérielles peuvent être à l'origine de mécanismes de rupture ou de délaminage. Pour étudier ces phénomènes, il est indispensable d'évaluer ces surcontraintes, qui plus est sont de nature tridimensionnelle dans le cas des jonctions tel que les rivets, inserts etc... Nous proposons pour cela une méthode semi-analytique tridimensionnelle afin d'extraire les exposants de singularité de contraintes qui est basée sur une approche asymptotique. En incluant ces contraintes singulières dans un code d'élément finis, nous pouvons calculer les facteurs d'intensité de contraintes (F.I.C), ce qui nous donnera une idée sur l'endommagement. Néanmoins, pour avoir une bonne évaluation de ces facteurs d'intensité de contraintes, nous utilisons un élément fini original, baptisé "Métis" possédant la propriété d'avoir un lagrangien dépendant uniquement d'intégrale de volume pour une meilleure précision numérique. Pour conclure, un exemple sera traité pour illustrer la démarche.

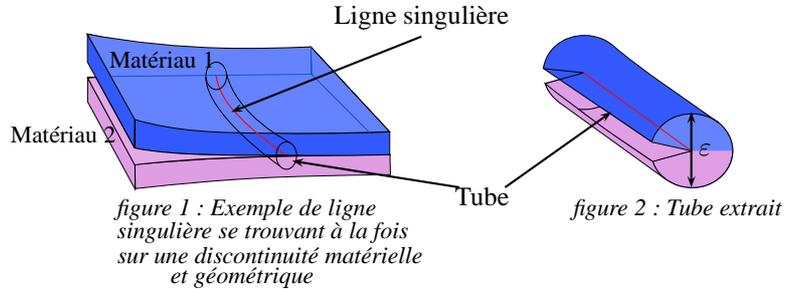
2. Méthodologie

2.1. Calcul de la singularité de contrainte

Dans les matériaux homogènes, la théorie de la mécanique de la rupture élastique linéaire prévoit que le champ de contraintes soit proportionnel à $r^{-\frac{1}{2}}$, r étant la distance d'un point matériel au front de fissure. Ce résultat n'est pas forcément le cas pour les matériaux hétérogènes, comme les matériaux composites qui font l'objet de notre propos. Pour ce type de matériaux, de nombreuses théories existent pour déterminer l'exposant de singularité. Cependant, très peu traite du cas 3D pur. Nous proposons une technique qui permet d'extraire les exposants de singularité dans le cas tridimensionnel via une approche semi-analytique (Crépin, 2001). Ce qui suit sont les principales étapes de la démarche.

Tout d'abord, nous modélisons chaque pli du composite par des poutres homogènes élastiques. L'hypothèse des petits déplacements est adoptée. Ensuite, nous nous plaçons sur une ligne particulière (appelée ligne "singulière") au voisinage de laquelle on peut s'attendre à la présence de contraintes singulières (ou surcontraintes). Nous privilégions les lignes se situant aux discontinuités géométriques et/ou matérielles (figure 1). La confirmation de la présence des contraintes singulières sera prouvée à posteriori. Autour de cette ligne singulière, nous construisons un tube de diamètre ε . Ce tube modélisera une poutre élastique dont tous les matériaux touchant la ligne singulière seront représentés par le biais de secteurs (figure 2).

En réécrivant les équations d'équilibre et de compatibilité en faisant tendre $\varepsilon \rightarrow 0$, nous arrivons à un modèle asymptotique qui nous conduira vers des équations proches de celles de la théorie des couches limites.



Ces équations nous fourniront un modèle à l'ordre dominant. Afin d'extraire les exposants de singularité, nous nous inspirons de la méthode des poutres de Lekhniskii (Lekhniskii, 1963), via les potentiels complexes (potentiels d'Airy et de Prandtl). Le problème à résoudre se résume finalement à un problème aux valeurs propres : $[C(\alpha)]\{X\}=\{0\}$ où α est l'exposant de singularité à déterminer. Ensuite, nous en déduisons les formes des déplacements singuliers u^s et des contraintes singulières σ^s :

$$u^s = \sum_{\alpha} \Re\{K_{\alpha}(\xi)r^{\alpha(\xi)}\Sigma(\theta, \xi)\}$$

$$\sigma^s = \sum_{\alpha} \Re\{K_{\alpha}(\xi)r^{\alpha(\xi)+1}\Lambda(\theta, \xi)\}$$

2.2. L'élément fini "Métis"

Afin d'extraire les facteurs d'intensité de contraintes, nous passons par la méthode des éléments finis. Pour cela, deux classes de méthodes sont fréquemment utilisées :

- Utilisation des fonctions singulières duales dues initialement à Babuska et Miller
- Utilisation d'éléments finis dont les fonctions de formes sont modifiées de sorte que les déplacements approchés aient un comportement du type $u_h = O(r^{\alpha+1})$

Pour les matériaux composites, la première méthode est inappropriée. Car les méthodes utilisées se rapportent souvent à une géométrie bidimensionnelle, ce qui est inadapté pour la modélisation d'assemblage de composite (inserts, rivets, etc...). De plus, se pose le problème délicat du chemin d'intégration convenable, indispensable à la mise en oeuvre des fonctions singulières duales sur lesquelles les contraintes singulières sont obtenues par lissage. Par ailleurs, un raffinement sensible du maillage le long de la ligne singulière serait indispensable afin d'obtenir une bonne approximation des contraintes régulières. De fait, cette approche souvent basée sur la formulation en déplacement pur, peut s'avérer moins robuste pour les structures en trois dimensions.

Concernant la deuxième méthode mentionnée, elle est de précision parfois discutable vis à vis des contraintes singulières. Pour contourner ces difficultés, nous proposons un élément fini mixte 3D (inspiré de S.S Wang (Wang *et al.*, 1983)) couplé avec

le code de calcul de concentrations de contraintes décrit auparavant. Cette dernière méthode permet notamment de s'affranchir des intégrales de contour pour une meilleure précision numérique.

2.3. Explication

La méthode des éléments mixtes utilisée fait partie de la famille des éléments hybrides à deux champs de variables u et σ . Les conditions à satisfaire pour notre type de formulation sont, dans un premier temps, que le champ de déplacement u est compatible uniquement sur le bord de l'élément et, dans un second temps, que le champ σ est en équilibre à l'intérieur de l'élément.

A titre de comparaison, la formulation en déplacement pur (méthode généralement utilisée) n'a qu'une variable (u) dont la seule condition à satisfaire est que u soit cinématiquement admissible dans l'élément.

Pour obtenir notre élément métis, nous ajoutons l'hypothèse d'unisolvence à l'élément hybride décrit précédemment. Cette dernière supposition signifie que le champ de déplacement est prolongé à l'intérieur de l'élément par un polynôme complet. Grâce à ces deux conditions, nous obtenons un élément fini dont le lagrangien s'écrit uniquement avec des intégrales volumiques et a pour forme :

$$\Pi(\sigma, u) = \sum_e \int_{\Omega_e} (W(\sigma) - \sigma : \varepsilon) d\Omega$$

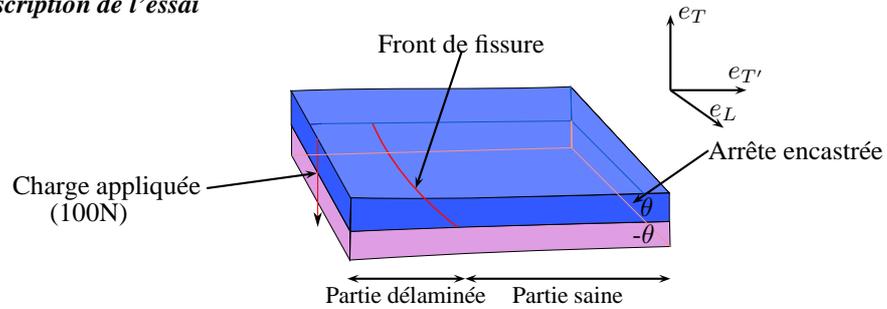
Où W est la densité d'énergie potentielle complémentaire. Pour extraire les F.I.C, nous décomposons en deux catégories l'élément fini en éléments finis "réguliers" et "singuliers" (Duong *et al.*, 2006). Les éléments finis réguliers sont les éléments finis dont les contraintes sont interpolées par des polynômes. Ces éléments se situent sur toute la structure. Près de la ligne singulière, les éléments sont dits singuliers, c'est à dire que les contraintes régulières sont enrichies par le terme singulier trouvé au chapitre 2.1. En décomposant les contraintes en partie régulière et singulière dans le principe variationnel d'Hellinger-Reissner (formulation à deux équations dont la première est le principe des puissances virtuelles et la seconde la loi de comportement), nous pouvons extraire les F.I.C en résolvant ce problème aux valeurs propres.

$$\begin{bmatrix} A & B^T \\ B & C \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{q\} \\ \{K\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{L\} \\ \{0\} \end{Bmatrix}$$

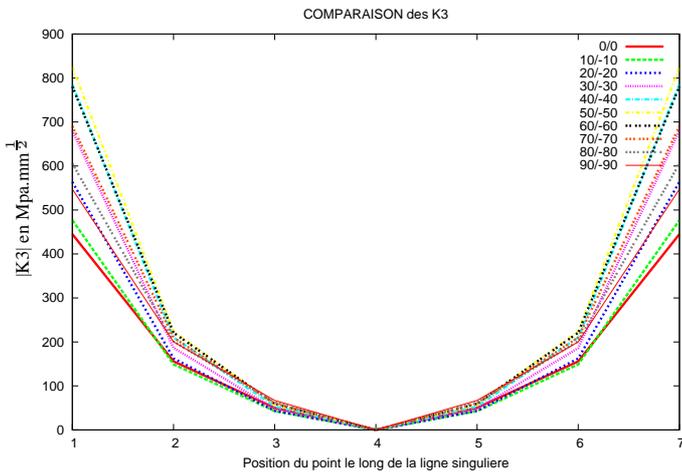
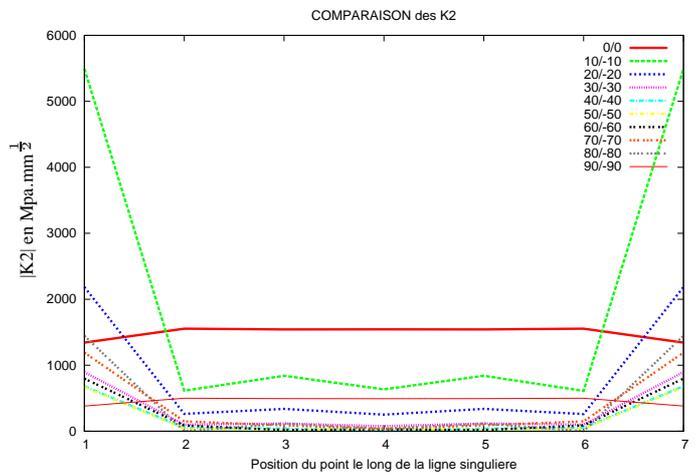
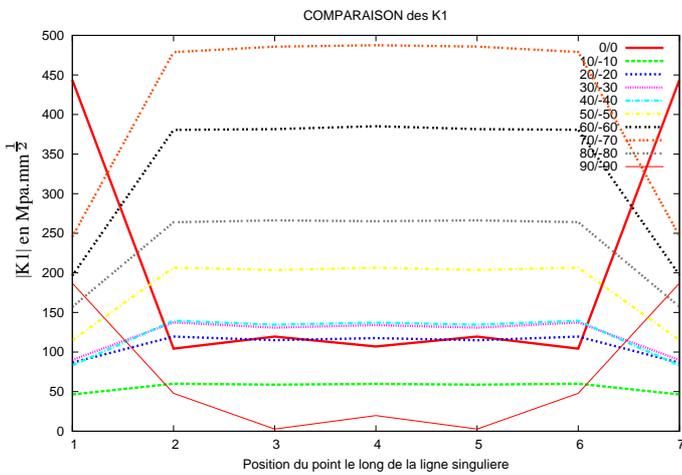
Où $\{K\} = \{K_1; K_2; K_3\}$ sont les F.I.C. $\{q\}$ sont les déplacements nodaux et $\{L\}$ sont les charges nodales. A, B, C sont des matrices connues calculées à partir des contraintes régulières et singulières

3. Resultats

3.1. Description de l'essai



L'essai sur lequel nous illustrons la méthode s'appelle "End-loaded split". Voici en quelques mots, la description de l'essai. Pour notre part, l'éprouvette est constituée d'un composite carbone/epoxy composé de deux plis dont les fibres ont pour orientation $\theta/-\theta$ autour de e_T . Une fissure débouchante traverse l'éprouvette dans sa largeur. Les propriétés mécaniques du pli homogénéisé sont données dans le tableau 2. Voici les valeurs des K_i pour chaque orientation de fibre ainsi que la partie réelle des exposants de singularité associée (tableau n°1).



Angle des fibres	Exposants de singularité		
	0°/0°	0.5	
10°/-10°	0.65	0.50	0.52
20°/-20°	0.67	0.50	0.54
30°/-30°	0.66	0.47	0.56
40°/-40°	0.62	0.42	0.57
50°/-50°	0.57	0.37	0.56
60°/-60°	0.52	0.33	0.56
70°/-70°	0.49	0.32	0.54
80°/-80°	0.49	0.34	0.52
90°/-90°	0.5		

Tableau n° 1 : Partie réelle des exposants de singularité

$E_L = 134 * 10^6 Pa$	$E_T = 10.2 * 10^6 Pa$	$E'_T = 10.2 * 10^6 Pa$
$\nu_{TT'} = 0.49$	$\nu_{LT'} = 0.3$	$\nu_{LT} = 0.3$
$G_{TT'} = 3.43 * 10^6 Pa$	$G_{LT'} = 5.52 * 10^6 Pa$	$G_{LT} = 5.52 * 10^6 Pa$

Tableau n° 2 : Propriétés mécaniques d'un pli dont les fibres sont suivant la direction L

hauteur d'un pli	longueur partie saine	longueur partie délaminée	largeur
0.125cm	1 cm	3 cm	1 cm

Tableau n° 3 : Caractéristiques géométriques de l'éprouvette

Nous voyons clairement que l'orientation des fibres joue un rôle majeur dans le mode de propagation de la rupture. Remarquons aussi, que dans le cas extrême des plis dont les fibres sont à $0^\circ/0^\circ$ et $90^\circ/-90^\circ$, le mode 2 est dominant, comme le prédit la théorie. Car le "end-loaded split" est un essai à l'origine qui caractérise le mode 2 dans les matériaux homogènes.

4. Conclusion et Perspective

Afin de prédire les facteurs d'intensité de contraintes dans les matériaux hétérogènes, nous avons décrit la méthode que nous utilisons qui se fait en deux étapes. La première phase se fait dans l'extraction de l'exposant de la singularité de contraintes qui est déterminé via une approche asymptotique. Après avoir obtenu ses exposants, nous les injectons dans un calcul d'éléments finis original baptisé "Métis". Cet élément a la particularité d'être un hybride dont la fonctionnelle ne s'écrit qu'en fonction d'intégrale de volume, pour une meilleure précision numérique. Pour finir, l'exemple du "end-loaded split" a été effectué. Dans l'avenir, il faudrait déterminer les facteurs d'intensité de contraintes critiques expérimentalement, ainsi nous pourrions les incorporer dans le code ce qui nous permettrait d'avoir une idée sur la propagation du front de fissure.

5. Bibliographie

- Crépin D., Éléments finis mixtes singuliers tridimensionnels pour l'étude des surcontraintes dans les structures en matériaux composites, Thèse de doctorat, Université de Lille, 2001.
- Duong N. T., Hung N. D., « Regular and singular metis finite element models for delamination in composite laminates », *Finite Elements in Analysis and Design*, vol. 42, n° 8, p. 650-659, 2006.
- Lekhniskii S., *Theory of Elasticity of an Anisotropic Body*, Holden-Day, San Francisco, 1963.
- Wang, F.G. Y., « A hybrid finite element approach to composite laminate elasticity problems with singularities », *Journal of Applied Mechanics*, vol. 50, p. 835-844, 1983.