



# Un nouvel élément fini à quatre nœuds pour l'analyse des coques composites

Siham Sakami, Hamid Sabhi, Rezak Ayad

## ► To cite this version:

Siham Sakami, Hamid Sabhi, Rezak Ayad. Un nouvel élément fini à quatre nœuds pour l'analyse des coques composites. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01509134

**HAL Id: hal-01509134**

**<https://hal.science/hal-01509134>**

Submitted on 16 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Un nouvel élément fini à quatre nœuds pour l'analyse des coques composites

**Siham SAKAMI\*-Hamid SABHI\*-Rezak AYAD\*\***

\* *Laboratoire d'Analyse des Contraintes Mécaniques LACM, IFTS, Université de Reims Champagne-Ardenne, 7 bd Jean Delautre, 08000 Charleville Mézières, France. siham.sakami@univ-reims.fr*

\*\* *Groupe Mécanique, Matériau et structures, EA 2617, ESIEC, Université de Reims Champagne-Ardenne, Esp. Roland Garros, BP 1029, 51686 Reims Cedex 2, France. rezak.ayad@univ-reims.fr*

---

**RÉSUMÉ.** Dans ce travail, nous présentons la formulation théorique et la validation numérique d'un nouvel élément fini de coque isoparamétrique DMQS (Discrete Mindlin Quadratic for Shell), à 4 nœuds et 6 ddl par nœud. Celui-ci est basé sur un modèle variationnel en déplacement DDM (Displacement Discrete Mindlin) [Ayad02] et sur deux hypothèses modifiées de Mindlin. Le modèle DMQS est considéré comme une alternative intéressante à l'élément fini connu DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral) de coque mince sans cisaillement transverse (CT). Il est validé sur des cas tests standards de coque isotrope et orthotrope.

*Abstract. In this paper, we present the theoretical formulation and the numerical validation of a new element DMQS (Discrete Mindlin Quadratic for Shell) of 4-node, and 6 ddls by node. This one is based on variational model in displacement DDM (Displacement Discrete Mindlin) [Ayad02] and on two modified Mindlin hypotheses. The model DMQS is considered as an interesting alternative to the finite element known DKQ (Discrete Kirchhoff Quadrilateral) of thin shell without transverse shearing. It is validated on standard tests cases of isotropic and orthotropic shell.*

*MOTS-CLÉS : éléments finis, coque, cisaillement transverse, Mindlin*

*KEYWORDS : finite element, shell, transverse shearing, Mindlin..*

---

## 1. Introduction

Plusieurs travaux ont été consacrés au développement de la méthode des éléments finis. Les premiers à avoir eu l'idée d'introduire une base relative aux éléments dits "de Kirchhoff-Discret", en particulier l'élément DKQ sans CT sont Batoz et al [Bato82]. Le nouvel élément DMQS avec CT, enrichie en flexion grâce à une approximation quadratique des rotations, pourrait être une alternative intéressante. Pour formuler le modèle DMQS qui possède 8 nœuds au début, nous avons développé un formalisme variationnel dans le cadre d'une formulation en déplacement basé sur l'approche du solide 3D dégénéré. Nous avons introduit deux

hypothèses modifiées de Mindlin sous forme discrète, pour aboutir à un modèle simple, précis et peu coûteux, à 4 nœuds et 6 ddls par nœud dans le repère globale X,Y,Z (figure 1): les déplacements  $U_i, V_i, W_i$  et les rotations  $\theta_{xi}, \theta_{yi}, \theta_{zi}$ . Il permet de modéliser les coques isotropes ou orthotropes monocouches, minces ou épaisses.

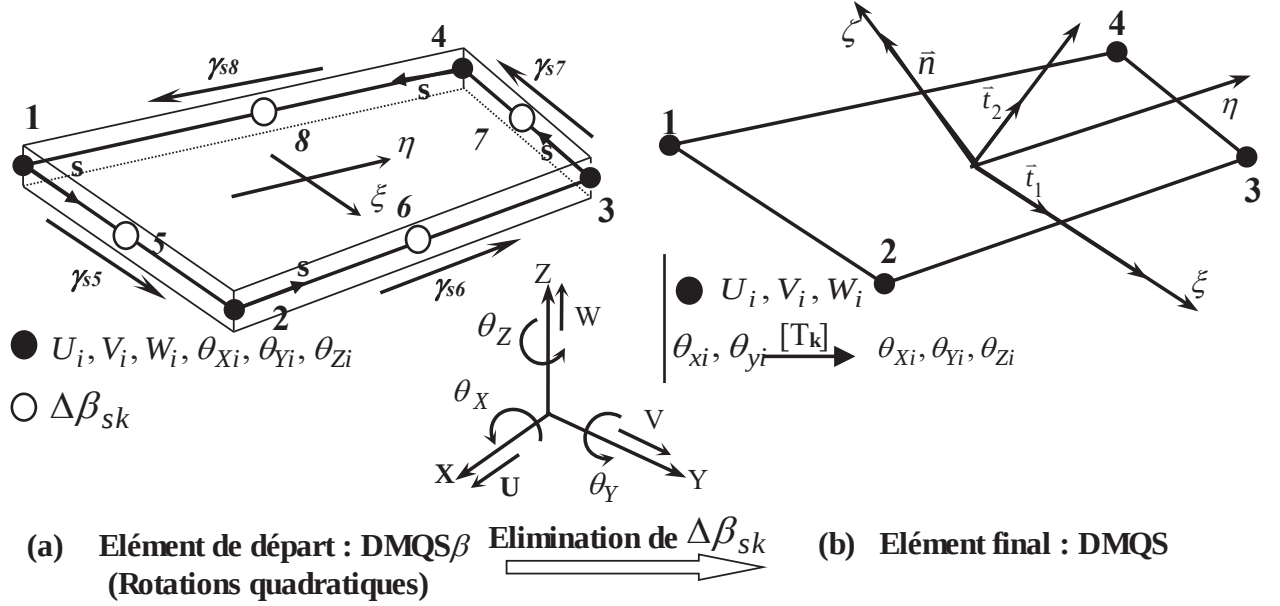


Figure 1. Elément de coque courbe DMQS.

## 2. La formulation théorique du modèle DMQS.

### 2.1. Les champs de déformations.

Les expressions des formulations variationnelles de DMQS sont assez complexes à mettre en œuvre. Pour cela, nous avons retenu une approximation linéaire en  $z$  pour les déformations de membrane-flexion  $\{\mathcal{E}_s\}$ , et une approximation constante en  $z$  pour les déformations de CT  $\{\gamma_s\}$ , sans affecter la forme des résultats [Bato92]. Nous avons adopté la technique des déformations de CT de substitution ANS (Assumed Natural Strain) proposée par [Bath85] et [Bath86], pour éliminer les différents blocages en CT, nous écrivons:

$$\{\mathcal{E}_s\} = \{\mathcal{E}_0\} + z\{\mathcal{E}_1\}; \{\mathcal{E}_0\} = [B_m]\{u_n\}; \{\mathcal{E}_1\} = [B_{fu}]\{u_n\} + [B_{f\Delta\beta}(\xi, \eta)]\{\Delta\beta_n\} \quad [1]$$

$$\{\gamma_s\} = \{\gamma_0\} = [B_0]\{u_n\} + [B_{c\Delta\beta}(\xi, \eta)]\{\Delta\beta_n\} \quad [2]$$

$$\langle u_n \rangle = \langle U_i \quad V_i \quad W_i \quad \theta_{xi} \quad \theta_{yi} \dots i = 1 \text{ à } 4 \rangle; \langle \Delta\beta_n \rangle = \langle \Delta\beta_{sk} \dots k = 5, 8 \rangle \quad [3]$$

où  $\{\mathcal{E}_0\}$  et  $\{\mathcal{E}_1\}$  sont les déformations de la membrane et de la flexion respectivement,  $\Delta\beta_n$  représente les variables associées à la représentation quadratique de  $\beta_s$ .

## 2.2. Les hypothèses modifiées de Mindlin.

L'élément DMQS est un nouvel élément fini de coque isoparamétrique. Il est basé sur une approximation quadratique des rotations  $\Delta\beta_n$  comme ddls qui nécessitent des maillages éléments finis adaptés. Pour cette raison nous introduisons les deux hypothèses modifiées de Mindlin définies sous forme discrète sur le côté k de l'élément pour éliminer ces rotations.

$$\int_0^{L_k} (\gamma_s - (w_{,s} + \beta_s)) ds = 0 \quad (\text{Hypothèse cinématique}) \quad [4]$$

$$\int_0^{L_k} \left( \gamma_s - \frac{T_s}{D_c} \right) ds = 0 ; D_c = kGh ; k = 5/6 \quad (\text{Hypothèse mécanique}) \quad [5]$$

La deuxième hypothèse n'est pas valable dans le cas où la structure à analyser est une coque orthotrope. Dans ce cas-ci l'hypothèse mécanique s'écrit :

$$\int_0^{L_k} \left( \gamma_s - \langle H_{ck11}^{inv} \ H_{ck12}^{inv} \rangle \begin{Bmatrix} T_s \\ T_n \end{Bmatrix} \right) ds = 0 \quad ; \ [H_{ck}] = [T_k] [H_c] [T_k]^{-1} \quad [6]$$

$\gamma_s$ ,  $T_s$  et  $T_n$  sont respectivement la déformation et les efforts de CT sur le bord s de l'élément (figure 1). Ces derniers sont reliés aux moments de flexion en satisfaisant les deux équations d'équilibre correspondantes :

$$T_n = M_{sn,s} + M_{n,n} ; T_s = M_{s,s} + M_{sn,n} \quad [7]$$

$H_{ck11}^{inv}$  et  $H_{ck22}^{inv}$  sont deux termes de comportement orthotrope en CT de la matrice inverse  $[H_{ck}]^{-1}$ . Les rotations  $\beta_s$  et  $\beta_n$  sont approchées en utilisant des interpolations quadratiques et linéaires respectivement. L'expression de  $\{\Delta\beta_n\}$  en fonction des variables nodales  $\{U_n\}$  est obtenu par la combinaison des deux hypothèses de Mindlin (4)-(6) :

$$\{\Delta\beta_n\} = [A_n] \{u_n\} ; [A_n] = [A_\phi]^{-1} [A_G] \quad [8]$$

Cette relation nous permet de définir l'expression définitive des matrices  $[\bar{B}_f]$  et  $[\bar{B}_c]$  nécessaires pour déterminer la matrice de rigidité. La matrice  $[A_\phi]$  prend en compte le caractère d'orthotropie, par contre la matrice  $[A_G]$  reste inchangée.

## 2.3. La matrice de rigidité élémentaire.

La matrice de rigidité élémentaire de DMQS, prend en compte les modifications apportées aux tenseurs des déformations de flexion et de CT. Le couplage membrane -flexion n'est pas pris en compte. Le passage du repère local au repère global fait intervenir la matrice de passage  $[T_k]$ , nous écrivons :

$$[k]_{glob} = [T_k]^T [k]_{loc} [T_k] \quad [9]$$

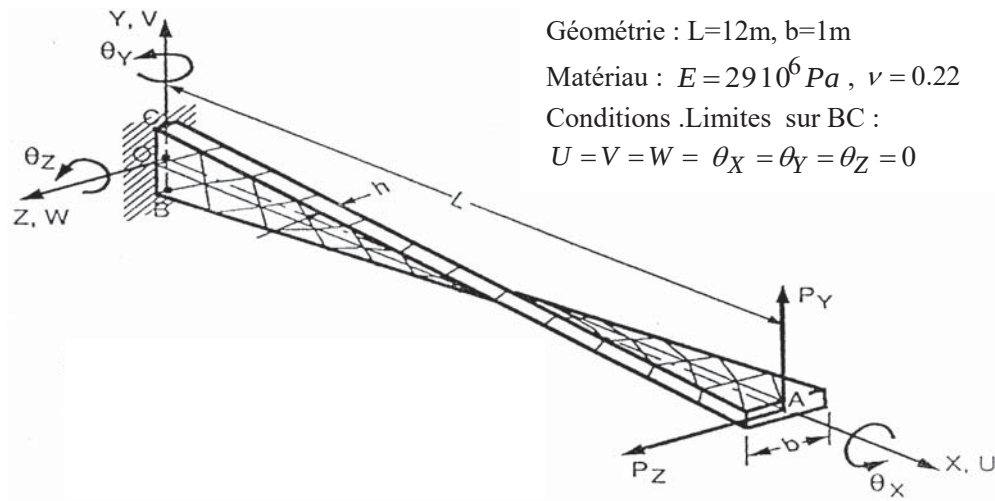
$$[k]_{loc} = [k_m] + [k_f] + [k_c] + [k_{\phi}] \quad ([k_{\phi}] \text{ matrice de rigidité fictive}) \quad [10]$$

### 3. Les résultats numériques

Pour valider le modèle DMQS, nous l'avons testé sur un ensemble des cas-tests standards réputés sévères par les chercheurs ingénieurs. Pour chaque cas test, le résultat obtenu est comparé, d'une part, à la solution de référence et d'autre part, à la solution donnée par quelques éléments finis. Nous donnons ici les résultats relatifs au test de la poutre vrillée et du cylindre orthotrope sous pression interne.

#### 3.1 Coque hélicoïdale ou poutre vrillée sous charges concentrées

Ce cas test a été proposé par MacNeal et al. [MacN85]. Il s'agit d'une poutre vrillée encastree à une extrémité et soumise à deux cas de chargement concentré à l'autre extrémité : une charge  $P_Z$  dans le plan et une autre charge hors plan  $P_Y$  comme indiqué sur la figure 2. Ce test constitue un bon examen de validation d'éléments finis de coque tenant compte du gauchissement de la surface moyenne, en particulier les éléments quadrilatéraux à 4noeuds. Le tableau 1, présente les résultats obtenus par les éléments DMQS, DKT-CST [Bato92] et Q4 $\gamma$ -Q4 [Ayad93]. L'ensemble des éléments converge de façon monotone vers la solution de référence pour les deux cas de charge. Dans le cas de chargement hors plan, les effets de membrane dominant ceux de flexion au voisinage de l'encastrement, c'est pour cette raison que les éléments DMQS (riches en flexion) donnent des résultats satisfaisants.



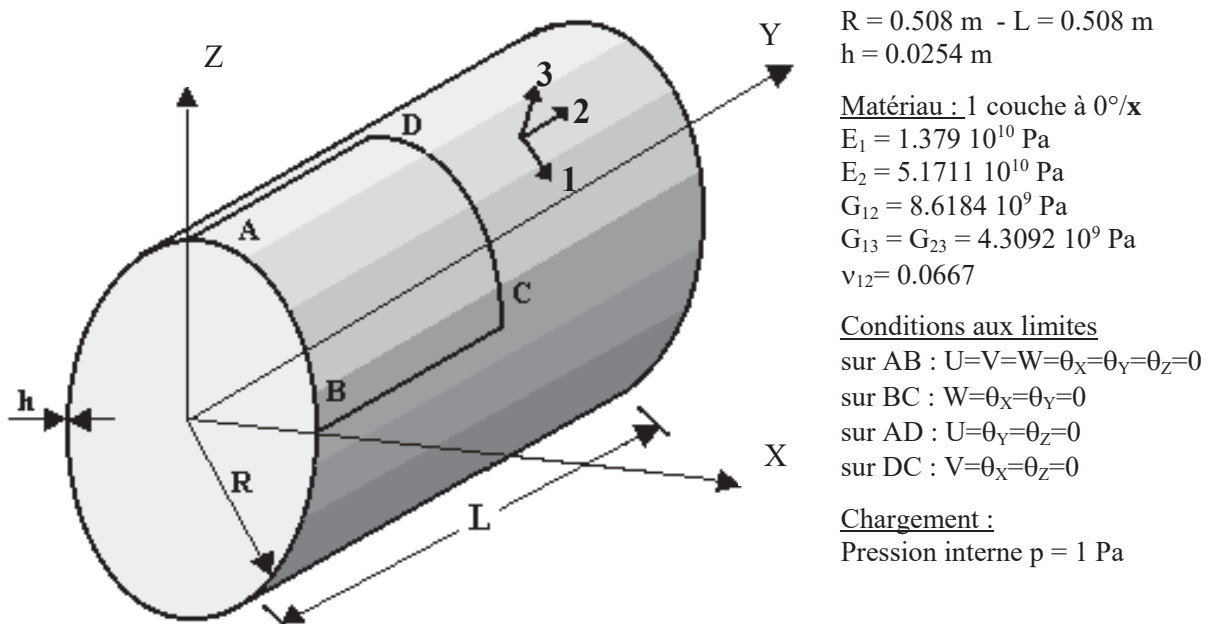
**Figure 2.** Poutre vrillée. Données

| NxN                     | $P_Z = 10^3, P_Y = 0, h=0.32$ |                 |         | $P_Y = 10^3, P_Z = 0, h=0.32$ |                 |         |
|-------------------------|-------------------------------|-----------------|---------|-------------------------------|-----------------|---------|
|                         | DMQS                          | Q4 $\gamma$ -Q4 | DKT-CST | DMQS                          | Q4 $\gamma$ -Q4 | DKT-CST |
| 2x12                    | 5.392                         | 5.348           | 5.327   | 1.663                         | 1.607           | 1.465   |
| 4x24                    | 5.405                         | 5.395           | 5.367   | 1.713                         | 1.708           | 1.621   |
| 6x36                    | 5.428                         | 5.406           | 5.343   | 1.783                         | 1.731           | 1.682   |
| Référence : $W_A=5.424$ |                               |                 |         | Référence : $V_A=1.754$       |                 |         |

**Tableau 1.** Poutre vrillée. Résultats de déplacements en A pour  $h=0.32$ .

### 3.2. Le cylindre orthotrope sous pression

Il s'agit d'un cylindre constitué d'une couche de matériau orthotrope, encastré à ses deux extrémités et soumis à une pression interne. La symétrie du problème permet d'étudier un huitième du cylindre (portion ABCD) en considérant un maillage 10x5 (10 éléments selon la circonférence et 5 selon la longueur). Les caractéristiques géométriques et mécaniques ainsi que les conditions aux limites sont montrées sur la figure 3. Nous avons évalué les déplacements maximaux aux points D et C. Les résultats sont donnés dans le tableau 2, pour l'élément DMQS. Ils sont comparés à l'élément de coque plane DMTS [Ayad02], aux éléments mixtes MiSP3-CST et MiSP4-Q4 [Ayad93] et à l'élément DSQ24 [Lard02]. Les flèches maximales sont d'égale valeur aux points C et D, puisque le cylindre orthotrope présente un problème mécanique avec un comportement radial de la solution. Cela est vérifié numériquement avec notre modèle DMQS, l'élément quadrilatéral MiSP4\_Q4 et DSQ24, mais pas avec les deux éléments triangulaires MiSP3-CST et DMTS, du fait de l'orientation du maillage. Les résultats numériques obtenus par DMQS restent les plus proches de la solution de référence par apport aux autres éléments, avec une erreur relative de 1,8\%.



**Figure 3.** Cylindre orthotrope. Géométrie et données.

|                           | Flèches maximales aux points D et C ( $10^{-9}$ m) |                        |                        |          |       |
|---------------------------|----------------------------------------------------|------------------------|------------------------|----------|-------|
|                           | DMQS                                               | DMTS                   | MiSP3-CST              | MiSP4-Q4 | DSQ24 |
| 0.663<br>Thé. coque mince | 0.675                                              | D : 0.616<br>C : 0.685 | D : 0.612<br>C : 0.689 | 0.684    | 0.677 |
| Erreur- $W_D$             | 1.8%                                               | 7.1%                   | 7.7%                   | 3.2%     | 2.1%  |

**Tableau 2.** *Cylindre orthotrope sous pression interne. Déplacement maximal.*

#### 4. Conclusion

Le modèle en déplacement DMQS a été formulé dans le but de donner aux éléments une certaine stabilité et une robustesse. Il a l'avantage de prendre en compte le gauchissement des coques et les effets de CT. Fort de sa formulation théorique, riche en flexion, le nouvel élément DMQS permet de modéliser de façon précise des problèmes aussi complexes que la poutre vrillée et le cylindre orthotrope. Les travaux actuels concernent la prise en compte du caractère multicouche et la non linéarité, afin de modéliser les structures composites.

#### 5. Bibliographie

- [Ayad02] Ayad Rezak, "Contribution à la modélisation numérique pour l'analyse des solides et des structures, et pour la mise en forme des fluides non newtoniens. Application à des matériaux d'emballage" HDR, Université de Reims, 2002.
- [Ayad93] Ayad R., "Eléments finis de plaque et coque en formulation mixte avec projection en cisaillement " Thèse de Doctorat, UTC, Mars 1993.
- [Bato82] Batoz J.L. & Ben tahar M. "Evaluation of a new thin plate quadrilateral element". *IJNME*, Vol.18, N°11, p.1655-1678 (1982).
- [Bato92] Batoz J.L. & Dhett G. "Modélisation des structures par éléments finis" Volume.3: Coques. *Eds Hermès*, Paris 1992.
- [Bath85] Bathe K.J & Dvorkin E.N "A four-node plate bending élément based on Mindlin/Reissner plate theory and a mixed interpolation". *INJME* 21, 367-383 (1985).
- [Bath86] Bathe K.J & Dvorkin E.N "A formulation of general shell elements-the use of mixed interpolation of tensorial components". *IJNME* 22, 697-722 (1986).
- [Lard90] Lardeur P, "Développement et évaluation de deux nouveaux éléments de plaques et coques composites avec influence du cisaillement transversal" T. Doctorat, UTC, 1990
- [MacN85] MacNeal R.H., Harder R.L., "A proposed standard set of problems to test finite element accuracy", *Finite Elements Analysis design*, vol. 1, p. 3-20, 1985.