



HAL
open science

Une approche spectrale pour calculer la réponse forcée de systèmes paramétriques excités par un processus aléatoire

Lucie Bachelet, Nicolas Driot, Joël Perret-Liaudet

► To cite this version:

Lucie Bachelet, Nicolas Driot, Joël Perret-Liaudet. Une approche spectrale pour calculer la réponse forcée de systèmes paramétriques excités par un processus aléatoire. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01509002

HAL Id: hal-01509002

<https://hal.science/hal-01509002>

Submitted on 15 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Une approche spectrale pour calculer la réponse forcée de systèmes paramétriques excités par un processus aléatoire

Lucie Bachelet* — Nicolas Driot* — Joël Perret-Liaudet**

* *LaMCoS, CNRS UMR 5259,
INSA-Lyon, F-69621, France.*

{lucie.bachelet, nicolas.driot}@insa-lyon.fr

** *LTDS – Ecole Centrale de Lyon*

36 avenue Guy de Collongue, Bâtiment H10, 69134 Ecully cedex

joel.perret-liaudet@ec-lyon.fr

RÉSUMÉ. Cet article s'intéresse au comportement dynamique de systèmes dont les équations du mouvement présentent des coefficients paramétriques périodiques et un second membre aléatoire. Une formulation spectrale permet d'exprimer la densité spectrale de puissance (DSP) de la réponse forcée de tels systèmes en fonction de la DSP de l'excitation et d'une fonction bi-fréquentielle.

ABSTRACT. This paper investigates the dynamical behavior of systems whose equations of motion present periodic parametrical coefficients and a random external excitation. A spectral formulation gives an expression of the power spectrum density (PSD) of the forced response of such systems as a function of the excitation PSD and a bi-frequency function.

MOTS-CLÉS : Vibration, stochastique, paramétrique, méthodes spectrales.

KEYWORDS: Vibration, stochastic, parametric, spectral methods.

1. Introduction

Présents dans de nombreuses applications industrielles, les systèmes mécaniques, dont les équations du mouvement sont à coefficients périodiques, ne présentent pas de solution analytique pour l'étude des réponses libres et forcées. A ce jour, la plupart des travaux concernent uniquement le problème de stabilité associé aux réponses libres (Marghitu *et al.*, 1998, Friedmann *et al.* 1977). En régime forcé, si l'excitation externe appliquée à ces systèmes est déterministe, l'implémentation d'une méthode temporelle ne pose pas de problème. En revanche, dans le cas où l'excitation est un processus aléatoire, l'absence de solution analytique complique l'implémentation de méthode numérique. La simulation de Monte Carlo est le moyen le plus utilisé pour obtenir une estimation de la densité spectrale de puissance (DSP) de la réponse, mais son coût de calcul est par essence prohibitif. Par ailleurs, des formules analytiques applicables uniquement à des systèmes de faible dimension (Dimentberg *et al.*, 2002) et des décompositions modales transformant les équations en systèmes invariants dans le temps (Suh *et al.*, 2005) ont été développées.

Dans cet article, une approche spectrale simple et originale permet d'estimer la réponse d'un système à coefficients paramétriques périodiques soumis à une excitation aléatoire. Elle est validée en confrontant les résultats obtenus à ceux d'une simulation de Monte Carlo sur deux exemples de systèmes discrets.

2. Densité spectrale de puissance de la réponse

Les équations du mouvement d'un système paramétrique s'écrivent :

$$\mathbf{M}(t)\ddot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{C}(t)\dot{\mathbf{y}}(t) + \mathbf{K}(t)\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) \quad [1]$$

où $\mathbf{M}(t)$, $\mathbf{C}(t)$ et $\mathbf{K}(t)$ sont ici des matrices à coefficients périodiques respectivement de masse, amortissement et raideur. Le second membre $\{\mathbf{x}(t)\}$ est supposé être un processus aléatoire ergodique et stationnaire du second ordre. Le système d'équation [1] étant supposé asymptotiquement stable au sens de Lyapunov, la réponse forcée peut être obtenue suivant la théorie des systèmes linéaires. Pour cela, on construit un nouveau processus ergodique et stationnaire du second ordre $\{\mathbf{x}_T(t)\}$ que l'on nommera « processus tronqué ». En effet, ses N échantillons indépendants sont ceux du processus initial $\{\mathbf{x}(t)\}$ définis sur la durée finie T . Ainsi, il est possible d'exprimer la réponse $\mathbf{y}_T^k(t)$ du système soumis à la $k^{\text{ième}}$ fonction échantillon $\mathbf{x}_T^k(t)$ du processus tronqué :

$$\mathbf{y}_T^k(t) = \int_T \mathbf{h}(\tau, t) \mathbf{x}_T^k(t - \tau) d\tau \quad [2]$$

où le terme $h_{ij}(\tau, t)$ de la matrice $\mathbf{h}(\tau, t)$ correspond à la réponse au temps t du ddl i du système soumis à une impulsion unitaire appliquée au ddl j au temps $(t - \tau)$. En exprimant $\mathbf{h}(\tau, t)$ à partir de sa transformée de Fourier bilinéaire $\mathbf{H}(\omega_1, \omega_2)$

$$\mathbf{h}(\tau, t) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega_2) e^{j(\omega_1\tau + \omega_2 t)} d\omega_1 d\omega_2 \quad [3]$$

et après changements de variable, la transformée de Fourier de la fonction échantillon tronquée $\mathbf{x}_T^k(t)$ apparaît dans l'expression de la réponse $\mathbf{y}_T^k(t)$:

$$\mathbf{y}_T^k(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega - \omega_1) \mathbf{X}_T^k(\omega_1) d\omega_1 \right] e^{j\omega t} d\omega \quad [4]$$

La transformée de Fourier inverse de l'équation [4] permet alors de définir l'expression de la réponse fréquentielle :

$$\mathbf{Y}_T^k(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega - \omega_1) \mathbf{X}_T^k(\omega_1) d\omega_1 \quad [5]$$

Selon Axisa (2001), des estimateurs des DSP des processus tronqués $\{\mathbf{x}_T(t)\}$ et $\{\mathbf{y}_T(t)\}$ sont obtenus par :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{xx}}^k(\omega, T) &= \mathbf{X}_T^k(\omega) \mathbf{X}_T^{k*}(\omega) \\ \mathbf{S}_{\mathbf{yy}}^k(\omega, T) &= \mathbf{Y}_T^k(\omega) \mathbf{Y}_T^{k*}(\omega) \end{aligned} \quad [6]$$

où le symbole * signifie « transposée conjuguée de ». En introduisant [5] dans [6] et en considérant la moyenne des estimateurs de DSP de chaque fonction échantillon, on obtient l'expression des estimateurs des DSP des processus tronqués :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_{\mathbf{xx}}(\omega, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_{\mathbf{xx}}^k(\omega, T) \right] \\ \mathbf{S}_{\mathbf{yy}}(\omega, T) &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{S}_{\mathbf{yy}}^k(\omega, T) \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{H}(\omega_2, \omega - \omega_2)}{2\pi} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_T^k(\omega_2) \mathbf{X}_T^{k*}(\omega_1) \right] \frac{\mathbf{H}^*(\omega_1, \omega - \omega_1)}{2\pi} d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad [7]$$

Or, selon Bendat (1990), la moyenne du produit fréquentiel croisé est donnée par :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{N} \sum_{k=1}^N \mathbf{X}_T^k(\omega_2) \mathbf{X}_T^{k*}(\omega_1) \right] = \mathbf{S}_{\mathbf{xx}}(\omega_2, T) \delta(\omega_2 - \omega_1) \quad [8]$$

où $\delta(\omega_2 - \omega_1)$ est le symbole de Kroenecker. Après avoir introduit [8] dans [7] et intégré par rapport à ω_2 , on fait apparaître l'expression de la DSP du processus réponse $\{\mathbf{y}(t)\}$ en faisant tendre T vers $+\infty$:

$$\mathbf{S}_{yy}(\omega) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\omega_1, \omega - \omega_1) \mathbf{S}_{xx}(\omega_1) \mathbf{H}^*(\omega_1, \omega - \omega_1) d\omega_1 \quad [9]$$

où $\mathbf{S}_{xx}(\omega_l)$ est la DSP du processus initial de l'excitation. On remarque que le calcul de $\mathbf{S}_{yy}(\omega)$ dépend de la connaissance du bi-spectre $\mathbf{H}(\omega_l, \omega - \omega_l)$ que l'on propose ici de calculer par un processus numérique travaillant dans le domaine spectral.

3. Calcul du bi-spectre

Considérons la réponse $\mathbf{z}_p(\omega_l, t)$ du système à $\mathbf{x}_p(t) = \mathbf{u}e^{j\omega_l t}$ dont la $p^{\text{ième}}$ composante du vecteur \mathbf{u} est égale à 1 alors que toutes les autres sont nulles :

$$\mathbf{z}_p(\omega_l, t) = \int_T \mathbf{h}(\tau, t) \mathbf{u} e^{j\omega_l(t-\tau)} d\tau \quad [10]$$

Reconnaissant la transformée de Fourier de \mathbf{h} par rapport à τ dans [10], on calcule celle de $\mathbf{z}_p(\omega_l, t)$ par rapport à t :

$$\mathbf{Z}_p(\omega_l, \omega) = \int_T \mathbf{H}_p(\omega_l, t) e^{-j(\omega - \omega_l)t} dt = \mathbf{H}_p(\omega_l, \omega - \omega_l) \quad [11]$$

où l'indice p signifie « $p^{\text{ième}}$ colonne de ». On constate donc que les colonnes de la matrice bi-spectre $\mathbf{H}(\omega_l, \omega - \omega_l)$ sont les réponses spectrales du système soumis à $e^{j\omega_l t}$ sur chacun de ses degrés de liberté. Le calcul de ces réponses spectrales est effectué en utilisant une méthode spectrale itérative développée par Perret-Liaudet (1996).

4. Applications

On propose ici deux applications sur des systèmes discrets à 1 et 2 degrés de liberté permettant de valider l'approche spectrale précédemment décrite. La validation est obtenue en comparant les DSP de réponse de la méthode spectrale à celles issues d'une simulation de Monte Carlo temporelle. L'excitation externe appliquée de ces deux systèmes est un processus gaussien, stationnaire, ergodique, à moyenne nulle, défini par un bruit blanc d'amplitude S_0 tronqué sur la gamme $[-40.96 ; 40.96]$ rad/s.

4.1. Système à un degré de liberté

On s'intéresse ici au système à 1 degré de liberté défini par l'équation du mouvement :

$$\ddot{y}(t) + 2\alpha\Omega\dot{y}(t) + \Omega^2 [1 + \mu g_1(t)] y(t) = x(t) \quad [12]$$

où $\Omega = 1$ rad/s et $\alpha = 0.01$ sont respectivement la fréquence naturelle et le coefficient d'amortissement du système. La fonction paramétrique régissant le terme de raideur est définie par $g(t) = \cos(\omega_l t) + \cos(3\omega_l t)$ où la fréquence interne est $\omega_l = 0.2$ rad/s. Elle est contrôlée par le paramètre $\mu = 0.2$. La présence d'un terme

paramétrique dans l'équation du mouvement [12] pouvant être source d'instabilité, on vérifie, en appliquant la théorie de Floquet, que le système est stable sous ces conditions de fonctionnement. La figure **I.a)** compare la DSP adimensionnée (rapportée à l'amplitude du bruit blanc S_0) de réponse forcée calculée par la méthode spectrale avec celle issue d'une simulation de Monte Carlo sur 1000 échantillons. Le gain de temps de calcul de la méthode spectrale (35 fois plus rapide que Monte Carlo) et la très bonne corrélation des résultats (moins de 10 % d'erreur sur les résonances) prouvent l'efficacité de la méthode proposée.

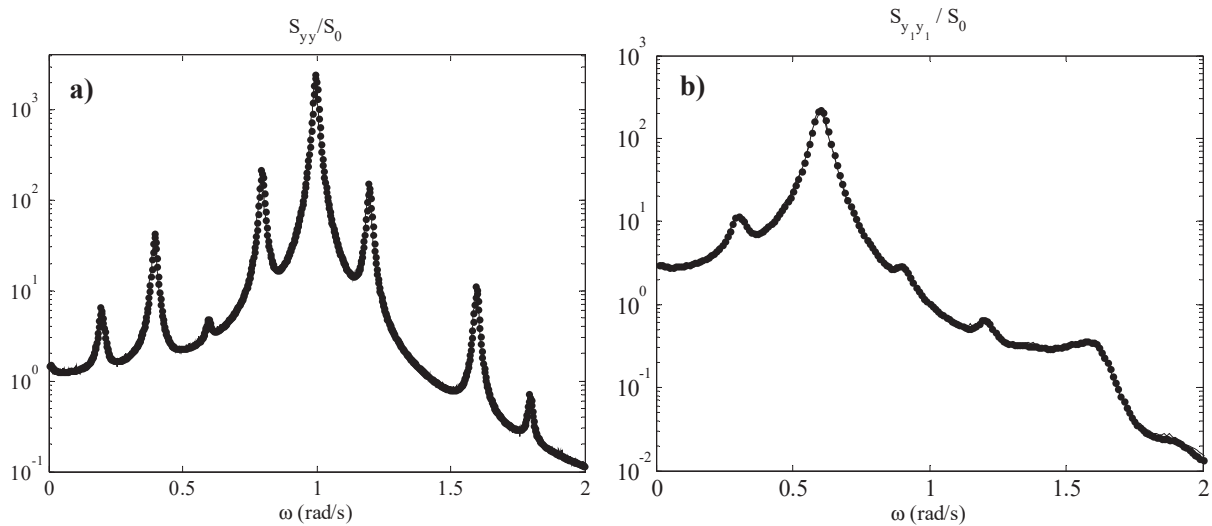


Figure I. DSP de réponse du 1^{er} ddl des systèmes à : **a)** 1 ddl **b)** 2ddl .

Trait plein : méthode spectrale, points : simulation de Monte Carlo

4.2. Système à deux degrés de liberté

Pour démontrer l'efficacité de la méthode sur un système à plusieurs degrés de liberté, on a considéré ici le cas d'un système à 2 degrés de liberté dont les équations du mouvement s'écrivent :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{y}_1(t) \\ \ddot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 \\ -c_2 & c_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{y}_1(t) \\ \dot{y}_2(t) \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1(t) + k_2(t) & -k_2(t) \\ -k_2(t) & k_2(t) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0.5x(t) \\ x(t) \end{Bmatrix} \quad [13]$$

où les raideurs paramétriques sont : $k_1(t) = 1 + \mu \cos(\omega t)$ et $k_2(t) = 1 + \mu \cos(\omega t + \pi)$. Les valeurs d'amortissement étant proportionnelles aux raideurs, les équations peuvent être découplées par une décomposition en modes réels. Pour le calcul en réponse forcée, les coefficients d'amortissement modal $\alpha_1 = \alpha_2 = 5\%$ et les conditions de fonctionnement $\mu = 0.3$ et $\omega = 0.3$ rad/s ont été considérés. Une fois encore la théorie de Floquet a été employée pour s'assurer de la stabilité du système. La figure **I.b)** trace les DSP adimensionnées de réponse obtenues avec les deux méthodes (spectrale et Monte Carlo). Une fois encore la très bonne corrélation des résultats (moins de 1% d'erreur) et la rapidité de calcul (30 fois plus rapide que la

simulation de Monte Carlo) prouvent l'intérêt d'utiliser la méthode pour des systèmes à plusieurs degrés de liberté.

5. Conclusion

Dans cet article, une approche spectrale originale a été présentée pour le calcul de la réponse forcée de systèmes à coefficients périodiques et à second membre aléatoire. Cette méthode permet d'obtenir une approximation de la DSP de réponse directement à partir de la DSP de l'excitation et d'un bi-spectre balayant toutes les fréquences de l'excitation. L'intérêt de l'approche a été démontrée sur 2 exemples de systèmes discrets. Il serait intéressant de l'appliquer à des systèmes continus.

Remerciements : Nous tenons à remercier Fabrice Poirion pour ses précieux conseils en matière de processus aléatoires.

6. Bibliographie

Marghitu D.B., Sinha S.C., Boghiu D., "Stability and control of a parametrically excited rotating system. Part I: stability analysis", *Dynamics and Control*, vol. 8, 1998, p. 5-18.

Friedmann P., Hammond C.E., Woo T.H., "Efficient numerical treatment of periodic systems with application to stability problems", *Int. J. for Num Meth. in Eng.*, 1977, p. 1117-1136.

Dimentberg M.F., Lin Y.K., "An exact solution for response spectral density of a single-degree-of-freedom system under both parametric and additive white noise excitations", *J. of Applied Mechanics*, Trans. ASME, vol. 69, 2002, p. 399-400.

Suh, J.H., Hong S.W., Lee C.W., "Modal analysis of asymmetric rotor system with isotropic stator using modulated coordinates", *J. of Sound and Vibration*, vol. 284, 2005, p. 651-671.

Kree, P., Soize C., *Mécanique aléatoire*, Dunod, 1983.

Perret-Liaudet J., "An original method for computing the response of a parametrically excited forced system", *J. of Sound and Vibrations*, 1996, p. 165-177.

Bendat J.S., *Nonlinear system analysis and identification from random data*, Wiley, 1990.

Axisa F., *Modélisation des systèmes mécaniques : Vibrations sous écoulements*, Hermes Sciences, 2001.