



**HAL**  
open science

## Identification des paramètres matériaux

Khaled Hadj-Sassi, Stéphane Andrieux

► **To cite this version:**

Khaled Hadj-Sassi, Stéphane Andrieux. Identification des paramètres matériaux. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01509001

**HAL Id: hal-01509001**

**<https://hal.science/hal-01509001v1>**

Submitted on 15 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Identification des paramètres matériaux

## Une nouvelle fonctionnelle d'énergie incrémentale totale pour le contrôle des parties réversibles et dissipatives les matériaux standards.

**Khaled Hadj-Sassi, Stéphane Andrieux**

*LaMSID, UMR CNRS-EDF 2832,  
1, avenue du Général de Gaulle, 92141 Clamart,  
France*

*[khaled.hadj-sassi,stephane.andrieux}@edf.fr](mailto:{khaled.hadj-sassi,stephane.andrieux}@edf.fr)*

---

*RÉSUMÉ. Différentes approches d'identification de paramètres matériaux ont été présentées et étudiées précédemment. Dans cet article, on s'est intéressé plutôt à des approches basées sur des écarts énergétiques où une nouvelle formulation a été proposée pour contrôler simultanément les deux parties réversibles et dissipatives des matériaux standards. Cette formulation porte sur les potentiels énergétiques convexes par rapport aux incréments de ses variables d'état et obéit aux propriétés de l'inégalité de Fenchel en analyse convexe.*

*ABSTRACT. Various approaches of materials parameters identifications were presented and studied previously. In this paper, one was interested in approach based on energy gaps where a new formulation was proposed to control simultaneously the two reversible and dissipative parts of standard materials. This formulation built by the convex energy potentials around of its state variables increments and obeys of the properties of the Fenchel inequality in convex analysis.*

*MOTS-CLÉS : Analyse convexe, identification des paramètres, méthode d'état adjoint, matériaux standards.*

*KEYWORDS: convex analyze, parameters identification, adjoint state method, standard materials.*

---

## 1. Introduction

L'identification des paramètres distribués des lois de comportement s'étend à des champs d'application nombreux et variés : génie civil, géophysique, contrôle non destructif, imagerie médicale... On vise ici l'identification d'un ensemble de paramètres matériaux pour une structure (module d'Young, coefficients de viscosité) à partir d'observations (déplacements, déformation) mesurées en surface).

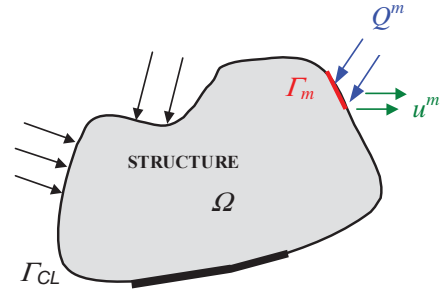
Dans notre cas d'étude, les mesures disponibles sur certaines portions de la frontière sont des déplacements et des forces, données surabondantes, ce pose qui le problème de l'exploitation de ces données. Pour lever cette difficulté, on utilise une méthode de séparation de champs qui consiste à résoudre deux problèmes d'évolution directs dont chacun est associée à l'une des données surabondantes. Les deux solutions en variables d'état  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)$  associées à ces deux problèmes à conditions aux limites différentes ne seront égales que si les paramètres matériaux dont elles dépendent et qui caractérisent la loi de comportement, sont les paramètres réels. On est donc amené à définir les solutions cherchées en terme de paramètre matériaux comme ceux qui minimisent l'écart entre ce couple de solution. Cet écart peut prendre une forme quadratique conduisant aux fonctionnelles usuelles des moindres carrés qui restent de signification physique malgré leur simplicité de mise en œuvre. Il existe aussi une forme énergétique basée sur les potentiels caractérisant le matériau qui sera préférée ici. On se place dans le cadre des matériaux standards où les lois réversibles-dissipatives sont régies par les deux potentiels convexes : énergie libre et pseudo-potentiel de dissipation. Pour contrôler simultanément la totalité de ces deux parties, on propose un nouveau potentiel énergétique convexe construit autour des incréments des variables d'état. Sa convexité est exploitée pour construire une nouvelle fonctionnelle d'identification, basée sur l'inégalité de Legendre-Fenchel.

## 2. Problème direct – Matériaux standards généralisés

Dans ce qui suit, on se place dans l'hypothèse des petites perturbations, qui permet d'associer au déplacement  $\underline{u}$  la déformation linéarisée  $\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u})$ . Pour décrire les équations constitutives, on introduit deux potentiels thermodynamiques convexes (Halphen et al., 1975) : le potentiel d'énergie libre et le potentiel de dissipation, fonctions respectivement des variables d'état  $(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha)$  et de la vitesse  $\dot{\alpha}$ , et des paramètres matériaux  $\{p\}$ , soit, en notant  $(\underline{\underline{\sigma}}, \mathcal{A})$  les forces thermodynamiques :

$$\underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha; p) \quad , \quad \mathcal{A} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha; p) \quad , \quad \mathcal{A} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \dot{\alpha}}(\dot{\alpha}; p) \quad [1]$$

Sur un intervalle de temps  $[0, T]$ , la structure est soumise à trois types de chargements : le premier, usuel, est connu sur une portion de frontière  $\Gamma_{CL}$  sera noté de façon générale par :  $CL(\underline{u}, \alpha, t) = 0$  sur  $\Gamma_{CL}, \forall t$ . Le deuxième et le troisième concernent respectivement les conditions aux limites en déplacements et en forces connues simultanément sur la partie de frontière  $\Gamma_m$  ( $\Gamma_m = \partial\Omega \setminus \Gamma_{CL}$ ) de normale  $\underline{n}$  :



**Figure 1.** Problème type d'identification

$$\underline{u} = \underline{u}^m \quad \text{et} \quad \underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{Q}^m \quad \text{sur} \quad \Gamma_m, \forall t$$

[2]

L'identification des paramètres matériaux requiert la résolution des équations du problème posé ci-dessus et la détermination du couple des champs de variables d'état. Or la résolution directe d'un tel problème avec connaissance simultanée des mesures extensométriques et des efforts sur les jauges ([2]), n'est pas possible.

### 3. Résolution du problème standard - Séparation des champs

Pour lever la difficulté de résolution de ce problème, on propose de construire deux problèmes directs bien posés, chacun utilisant l'une ou l'autre des données surabondantes, et l'ensemble des données par ailleurs connues du problème. Pour une structure à comportement donné caractérisé par un jeu de paramètre  $\{p\}$  et régi par les potentiels énergétiques  $\varphi$  et  $\mathcal{D}$ , deux problèmes d'évolution (P1) et (P2) seront ainsi introduits correspondant respectivement, aux conditions de Dirichlet  $\underline{q}(u) = \underline{u}^m$  et aux conditions de Neumann  $\underline{\underline{\sigma}} \cdot \underline{n} = \underline{Q}^m$ . On note  $(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^1), \alpha^1)$  et  $(\underline{\underline{\varepsilon}}(\underline{u}^2), \alpha^2)$  les champs de variables primales, solutions de ces deux problèmes.

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{div}(\underline{\underline{\sigma}}) = 0 & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ \left\{ \begin{array}{l} \underline{\underline{\sigma}} = \frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\varepsilon}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \{p\}), \quad \underline{\underline{\mathcal{A}}} = -\frac{\partial \varphi}{\partial \underline{\underline{\alpha}}}(\underline{\underline{\varepsilon}}, \underline{\underline{\alpha}}, \{p\}) \\ \underline{\underline{\mathcal{A}}} = \frac{\partial \mathcal{D}}{\partial \underline{\underline{\dot{\alpha}}}}(\underline{\underline{\dot{\alpha}}}, \{p\}) \end{array} \right. & \text{dans } \Omega \times [0, T] \\ CL(\underline{u}, \alpha, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_{CL} \times [0, T] \\ \underline{\underline{\alpha}}(\cdot, 0) = \underline{\underline{\alpha}}_0 & \text{sur } \Omega \times \{t = 0\} \\ \underline{u}(\cdot, t) = \underline{u}^m \text{ (P1) ou } \underline{\underline{\sigma}}(\cdot, t) \cdot \underline{n} = \underline{Q}^m \text{ (P2)} & \text{sur } \Gamma_m \times [0, T] \end{array} \right. \quad [3]$$

Ces deux solutions sont *a priori* distinctes et ne coïncident que si le jeu de paramètre  $\{p\}$ , intervenant dans la loi de comportement est le jeu « réel » ou *a*

*minima* un jeu « vraisemblable » pour l'essai réalisé. On peut donc formuler le problème d'identification de paramètres comme la minimisation d'un écart  $\|\bullet\|$  entre ces deux couples de variables d'état :  $p_{opt} = \underset{p \in \mathbb{R}^p}{\text{ArgMin}} J(p)$  et  $J(p) = \left\| \left( \underline{u}^1(p), \alpha^1(p) \right) - \left( \underline{u}^2(p), \alpha^2(p) \right) \right\|^2$ .

Le choix de l'écart à utiliser est primordial pour l'efficacité de la méthode d'identification. Si l'on peut adopter une simple norme sur les champs  $u$  et  $\alpha$ , il est généralement admis que des écarts basés sur une erreur en loi de comportement présentent, outre leur interprétation physique plus satisfaisante, des qualités supérieures pour l'optimisation. L'approche par erreur en relation de comportement, associé à la séparation des champs, permet par ailleurs de conserver la symétrie des données. On s'oriente donc vers cette approche.

#### 4. Erreur en loi de comportement incrémentale

Dans le cadre des matériaux standards, où différents couples de variables duales  $x$  et  $y$  sont liés via un potentiel  $\pi$ , une incompatibilité entre les deux éléments du couple, vis à vis de  $\pi$ , peut être défini par le résidu de Fenchel :  $e_\pi(x, y) = \pi(x) + \pi^*(y) - \langle x, y \rangle$  où  $\pi^*(y) = \underset{\xi}{\text{Sup}} [\langle \xi, y \rangle - \pi(\xi)]$  est potentiel dual de  $\pi$  et  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  le produit de dualité qui possède les propriétés suivantes :

$$\forall (x, y), e_\pi(x, y) \geq 0 \quad \text{et} \quad e_\pi(x, y) = 0 \Leftrightarrow y = \frac{\partial \pi}{\partial x}(x) \Leftrightarrow x = \frac{\partial \pi^*}{\partial y}(y) \quad [4]$$

Pour deux évolutions distinctes définies par les deux couples  $(x^1, y^1)$  et  $(x^2, y^2)$ , on peut définir l'écart vis-à-vis du potentiel  $\pi$  par :

$$E_\pi(x^1, y^1, x^2, y^2) = e_\pi(x^1, y^2) + e_\pi(x^2, y^1) = \left\langle (y^1 - y^2), (x^1 - x^2) \right\rangle \quad [5]$$

Ce concept a été exploité dans diverses applications où la construction de l'écart est basée soit sur le potentiel d'énergie libre contrôlant la loi d'état, soit sur le potentiel de dissipation pour la loi complémentaire (Ladevèze et al., 1994). Une formulation d'un écart contrôlant les parties réversibles et dissipatives, construite par combinaison de ces deux écarts a été utilisée par Rota, en choisissant de façon arbitraire les poids respectifs (Rota, 1996). Pour pallier cette difficulté, on écrit la propriété variationnelle d'inégalité de Fenchel

$$e_\pi(x_0, y_0) = 0 \Leftrightarrow y_0 = \frac{\partial \pi}{\partial x}(x_0) \Leftrightarrow x_0 = \underset{x}{\text{ArgMin}} [\pi(x) - \langle x, y_0 \rangle] \quad [6]$$

On pourra donc identifier un potentiel permettant de bâtir un écart en relation de comportement, dès que l'on aura identifié une propriété variationnelle du type du dernier membre de l'équivalence ci-dessus. Après discrétisation implicite totale de [1] on peut monter la propriété suivante sur les incréments  $(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta\underline{\underline{\alpha}})$  (potentiels  $\varphi$  et  $\mathcal{D}$ )

$$(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta\underline{\underline{\alpha}}) = \underset{\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta\underline{\underline{\alpha}}}{\text{ArgMin}} \left[ \varphi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha + \Delta\underline{\underline{\alpha}}) + 2\Delta t \mathcal{D}\left(\frac{\Delta\underline{\underline{\alpha}}}{\Delta t}\right) - (\underline{\underline{\sigma}} + \Delta\underline{\underline{\sigma}}) : (\underline{\underline{\varepsilon}} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}) \right] \quad [7]$$

conduisant à un nouveau pseudo-potentiel  $\mathcal{H}(\Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \Delta\underline{\underline{\alpha}})$ , convexe par construction.

$$\mathcal{H} = \varphi(\underline{\underline{\varepsilon}} + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}, \alpha + \Delta\underline{\underline{\alpha}}) + 2\Delta t \mathcal{D}\left(\frac{\Delta\underline{\underline{\alpha}}}{\Delta t}\right) \quad [8]$$

Ce potentiel permet d'introduire une nouvelle erreur globale en loi de comportement incrémentale, qui n'a de sens toutefois que si chacun des deux couples est compatible pour la loi de comportement, ce qui est le cas ici :

$$\begin{aligned} ELCI(p) = & \sum_{i=1}^N \Delta t \int_{\Omega} (\underline{\underline{\varepsilon}}^1 + \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^1 - \underline{\underline{\varepsilon}}^2 - \Delta\underline{\underline{\varepsilon}}^2) : (\underline{\underline{\sigma}}^1 + \Delta\underline{\underline{\sigma}}^1 - \underline{\underline{\sigma}}^2 - \Delta\underline{\underline{\sigma}}^2) d\Omega \\ & + \sum_{i=1}^N \Delta t \int_{\Omega} \langle \alpha^1 + \Delta\alpha^1 - \alpha^2 - \Delta\alpha^2, \mathcal{A}^1 + \Delta\mathcal{A}^1 - \mathcal{A}^2 - \Delta\mathcal{A}^2 \rangle d\Omega \end{aligned} \quad [9]$$

## 5. Calcul du gradient - Méthode d'état adjoint

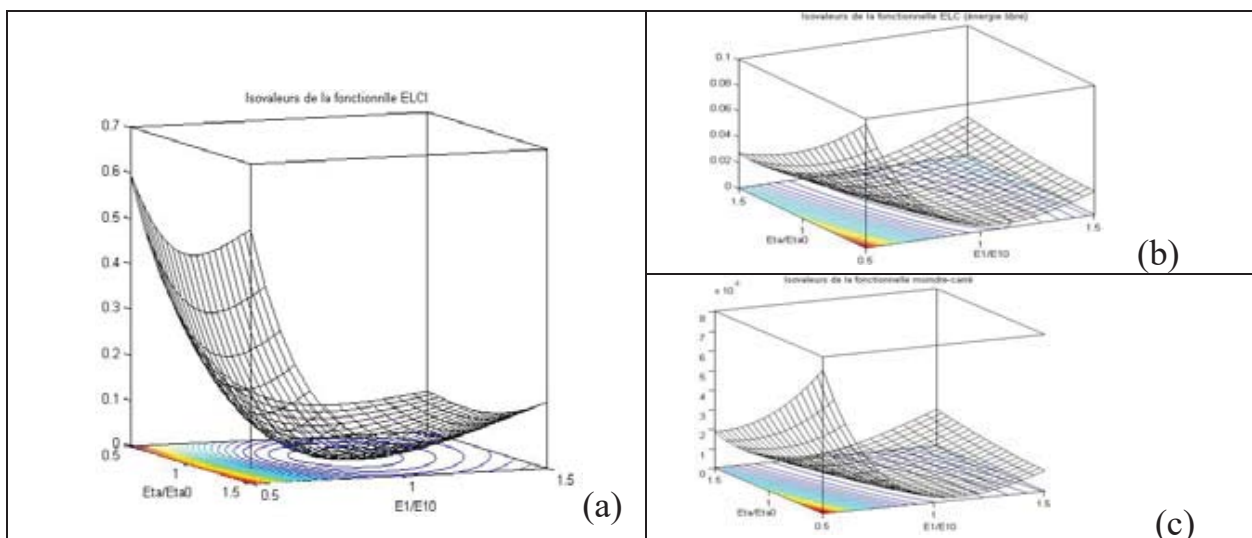
L'identification des paramètres matériaux passe par la minimisation de la fonctionnelle ELCI et nécessite le calcul de son gradient lors de l'algorithme de descente. Pour évaluer ce gradient, la méthode d'état adjoint a été retenue. Celle-ci s'appuie sur un problème de minimisation sous les contraintes que constituent les équations locales d'équilibre et de comportement des évolutions (P1) et (P2) (équation [3]). Cependant, dans les lois étudiées, le potentiel de dissipation

$$D(\dot{\alpha}) = \frac{1}{2} \eta \dot{\alpha}^2 + \Psi_{\mathbb{R}^+} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1}{3} \text{tr}(\underline{\underline{\alpha}}) \text{ n'est pas deux fois différentiable, ce qui}$$

conduit à des contraintes inégalités dans le problème de minimisation et complique par la suite la formulation du Lagrangien. Pour pallier ce problème, une condition de complémentarité pilotant le produit scalaire de l'incrément de la variable interne scalaire  $\Delta\alpha$ , argument du potentiel de dissipation, par la force associée qui dérive du potentiel d'énergie libre, potentiel lui différentiable, a été introduite, ce qui permet de mettre la loi d'évolution non linéaire incrémentale sous une forme régulière.

## 6. Quelques illustrations numériques

Une comparaison de la nouvelle fonctionnelle ELCI avec des fonctionnelles construites sur la base d'autres écarts a été menée sur un modèle rhéologique de type viscoélastique linéaire caractérisé par un couple de paramètres viscosité et élasticité. Sur la figure 2, on constate de bonnes propriétés de convexité et de conditionnement de la fonctionnelle proposée, au contraire des autres fonctionnelles qui montrent une faible sensibilité par rapport au paramètre viscosité et qui conduisent à de sérieux problèmes de minimisation. Outre cette illustration académique, une mise en œuvre de la fonctionnelle pour l'identification des paramètres distribués de viscosité et d'élasticité des lois viscoélastiques non linéaires constitutives une structure d'enceinte de confinement en béton armé modélisée en axisymétrique a été étudiée.



**Figure 2.** Comparaison de différentes fonction coût : (a) : ELCI ; (b) : écart en énergie libre ; (c) : écart quadratique

## 7. Conclusion

Dans ce travail, une nouvelle erreur en loi de comportement incrémental a été introduite contrôlant les deux parties réversibles et dissipatives des matériaux standards. Elle est exploitée pour l'identification des paramètres de lois viscoélastiques non linéaire constitutives les enceintes de confinement.

## 8. Bibliographie

Halphen B., Nguyen Q.S. « Sur les matériaux standards généralisés »- *J. de Méca.* 1975.

Ladevèze P., Reynier M., Maia M., «Error on the constitutive relation in dynamics », *Inverse Problems in Engineering and Mechanics*, 1994.

Rota L., « An inverse approach for identification of dynamic constitutive equations ».  
*Inverse problems in engineering Mechanics*. 1994, , pp 251-256.