



**HAL**  
open science

## Schéma d'intégration adapté aux problèmes d'impact

Benoit Magnain, Zhi-Qiang Feng, Jean-Michel Cros

► **To cite this version:**

Benoit Magnain, Zhi-Qiang Feng, Jean-Michel Cros. Schéma d'intégration adapté aux problèmes d'impact. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01508997

**HAL Id: hal-01508997**

**<https://hal.science/hal-01508997>**

Submitted on 15 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# SCHÉMA D'INTÉGRATION ADAPTÉ AUX PROBLÈMES D'IMPACT

**Benoît Magnain — Zhi-Qiang Feng — Jean-Michel Cros**

*Laboratoire de Mécanique et d'Énergétique d'Évry  
Université d'Évry - Val d'Essonne  
40 rue du Pelvoux 91020 Évry Cedex, France  
{magnain,feng,cros}@iup.univ-evry.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans beaucoup de problèmes de mécanique des solides, la prise en compte du contact avec frottement joue un rôle prépondérant. La bonne prédiction des effets du contact avec frottement devient un enjeu majeur pour les industriels. Dans ce travail, nous proposons une extension de la méthode du bi-potentiel, proposée par De Saxcé et Feng, pour l'analyse des problèmes d'impact entre plusieurs corps déformables. Pour cela, nous optons pour un schéma d'intégration du premier ordre qui permet de ne pas faire intervenir l'accélération, non définie au moment du choc, dans les calculs. Le modèle ainsi développé combine la méthode du bi-potentiel pour la résolution du problème du contact et un schéma du premier ordre pour la discrétisation temporelle. L'application numérique proposée met en évidence la validité et l'efficacité de la méthode.*

*ABSTRACT. In many problems of solid mechanics, taking into account the frictional contact plays an important role. Good prediction of the results of contact with friction becomes then a prevailing element for the industry. In this work, an extension of the bi-potential method, proposed by De Saxcé & Feng, is presented for the modeling of impact problems involving several deformable bodies. To this purpose, we choose a first order time integrator which avoids to take account for the acceleration which is undefined at the impact instant. The model so developed combines the bi-potential method to solve contact problems and a first order scheme for the time integration. The numerical application illustrate clearly the validity and efficiency of the method.*

*MOTS-CLÉS : contact, impact, dynamique, méthodes numériques, éléments finis.*

*KEYWORDS: contact, impact, dynamic, numerical methods, finite element.*

---

## 1. Introduction

Pour de nombreux problèmes de mécanique, il est essentiel que la prédiction des phénomènes de contact avec frottement soit faite avec précision. De nombreuses méthodes ont été mises au point pour traiter cette difficulté par le biais de la méthode des éléments finis dont le lecteur trouvera un exposé de synthèse dans l'ouvrage de Wriggers (Wriggers, 2002). Dans ce travail, nous proposons une extension de la méthode du bi-potentiel, proposée par De Saxcé et Feng (De Saxcé *et al.*, 1998) pour le traitement des problèmes de contact en quasi-statique, pour l'analyse des problèmes d'impact entre plusieurs corps déformables. Pour cela, nous envisageons tout d'abord l'utilisation d'un schéma d'intégration classique du second ordre de la famille des schémas de Newmark. Après analyse du comportement de la méthode ainsi obtenue et des difficultés qu'elle engendre, nous proposons d'étudier la solution qui consiste à adopter un schéma du premier ordre. En particulier, ce choix permet de ne pas faire intervenir l'accélération, non définie au moment du choc, dans les calculs. Le modèle développé combine ainsi la méthode du bi-potentiel pour la résolution du problème du contact à un schéma du premier ordre pour la discrétisation temporelle.

## 2. Schémas d'intégration implicites

Dans notre travail, nous utilisons la méthode du bi-potentiel pour traiter le problème du contact. Dans cette méthode, les forces de contact sont ajoutées à la formulation discrétisée du problème sans contact comme une seconde forme d'efforts extérieurs, notés  $\mathbf{R}_c(\mathbf{U})$  et inconnus a priori. Les équations du mouvements s'écrivent alors sous la forme :

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} = (\mathbf{F}_{int}) + (\mathbf{K}_T) \delta\mathbf{U} - (\mathbf{F}_{ext}) + (\mathbf{R}_c(\mathbf{U})) \quad [1]$$

où  $\delta\mathbf{U}$  et  $\mathbf{R}_c(\mathbf{U})$  sont les deux inconnus du système à résoudre. Nous ne traiterons pas ici de la méthode du bi-potentiel qui permet de déterminer  $\mathbf{R}_c(\mathbf{U})$  à chaque pas de temps. Cette dernière a été abondamment détaillée dans le passé pour des problèmes de contact en statique (De Saxcé *et al.*, 1991, Feng, 1995, De Saxcé *et al.*, 1998).

### 2.1. Schéma de Newmark

Le schéma d'intégration de Newmark est sans aucun doute le schéma implicite le plus utilisé pour les problèmes de dynamique. Il est basé sur les hypothèses suivantes :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{U}}_t + \Delta t \left[ (1 - \gamma) \ddot{\mathbf{U}}_t + \gamma \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right], \\ \mathbf{U}_{t+\Delta t} &= \mathbf{U}_t + \Delta t \dot{\mathbf{U}}_t + (\Delta t)^2 \left[ \left(\frac{1}{2} - \beta\right) \ddot{\mathbf{U}}_t + \beta \ddot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right], \end{cases} \quad [2]$$

où  $\gamma$  et  $\beta$  sont des paramètres de l'algorithme desquels dépendent la stabilité et la précision du schéma d'intégration obtenu. Il a été démontré dans (Goudreau *et al.*, 1972)

que le schéma est inconditionnellement stable dans le cadre des petites perturbations si  $\gamma \geq 0,5$  et  $\beta \geq (2\gamma + 1)^2/16$ . Dans la suite, nous utiliserons le couple de paramètres  $(\gamma = 0,5; \beta = 0,25)$  équivalent à la règle du trapèze qui est du second ordre.

## 2.2. Méthode du premier ordre

Dans ses travaux, Jean (Jean, 1999) a développé un schéma d'intégration du premier ordre à partir d'une formulation du problème en terme de vitesse. En intégrant l'équation d'équilibre discrétisée sur l'intervalle de temps  $[t, \Delta t]$ , il obtient la formulation suivante :

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}} + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{int} dt = \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F}_{ext} dt + \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c(\mathbf{U}) dt. \quad [3]$$

L'algorithme proposé est basé sur les approximations suivantes ( $\theta$ -méthode) :

$$\begin{cases} \mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t &= \Delta t \left( (1 - \theta) \dot{\mathbf{U}}_t + \theta \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} \right) \quad \text{où } 0 \leq \theta \leq 1. \\ \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{M} d\dot{\mathbf{U}} &= \mathbf{M} \left( \dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} - \dot{\mathbf{U}}_t \right), \\ \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{F} dt &= \Delta t \left( (1 - \xi) \mathbf{F}_t + \xi \mathbf{F}_{t+\Delta t} \right), \\ \int_t^{t+\Delta t} \mathbf{R}_c dt &= \Delta t \left( \mathbf{R}_c \right)_{t+\Delta t}. \end{cases} \quad [4]$$

où  $\mathbf{F}$  représente le vecteur global des forces internes ou le vecteur global des forces externes et  $0 \leq \xi \leq 1$ . À la fin de chaque pas de temps, la vitesse est réactualisée par :

$$\dot{\mathbf{U}}_{t+\Delta t} = \left( 1 - \frac{1}{\theta} \right) \dot{\mathbf{U}}_t + \frac{1}{\theta \Delta t} (\mathbf{U}_{t+\Delta t} - \mathbf{U}_t). \quad [5]$$

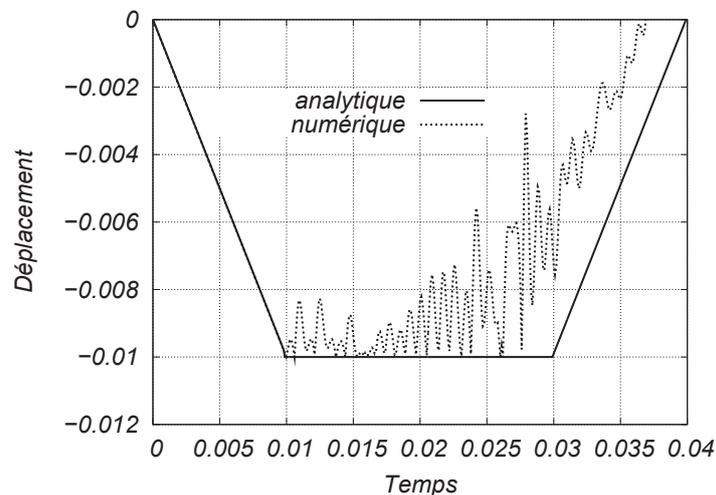
En prenant  $\theta = \frac{1}{2}$ , ce schéma correspond à la règle du trapèze implicite, qui est également analogue à la méthode développée par Tamma et Namburu (Tamma *et al.*, 1990) dans laquelle l'accélération n'a pas besoin d'être calculée. Simo et Wong (Simo *et al.*, 1991) ont montré que ce schéma préserve l'énergie totale et l'équilibre pour les problèmes dynamiques sans contact. Nous utilisons les paramètres  $\xi = \theta = 0,5$  pour ce schéma d'intégration.

## 3. Application numérique

Pour tester la méthode obtenue, nous étudions le problème simple de l'impact entre deux barres élastiques en 2D dont nous connaissons la solution analytique. Les deux barres sont identiques : longueur des barres  $L = 10$ , module de Young  $E = 1000$ , masse volumique :  $\rho = 0,001$ . Nous imposons aux deux barres une vitesse initiale égale en module et opposée en direction :  $\dot{\mathbf{u}}_0^{(1)} = -\dot{\mathbf{u}}_0^{(2)} = (1, 0; 0, 0)$ . Initialement, les deux barres sont séparées par un interstice d'une distance égale à 0,2. La simulation porte sur une durée totale  $T = 0,04$  et nous adoptons le pas de temps  $\Delta t = 0,00001$ .

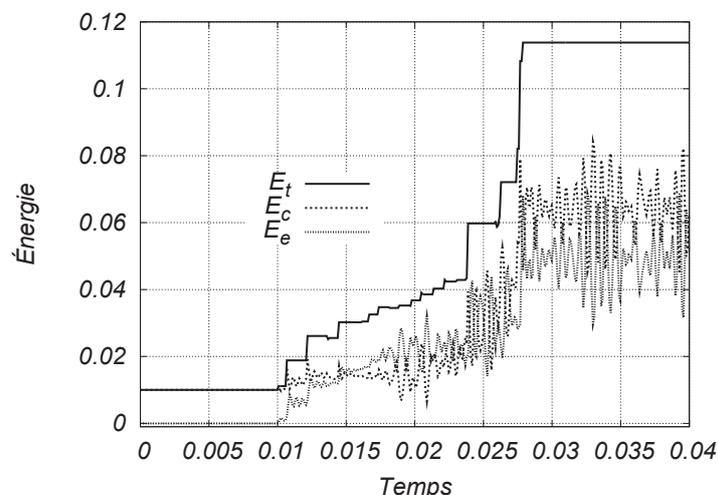
### 3.1. Schéma de Newmark

Sur la figure 1, nous présentons les résultats obtenus pour le déplacement de l'extrémité de la barre qui entre en contact. Dès que l'impact a lieu, nous observons de fortes oscillations et le résultat numérique s'écarte très nettement du résultat escompté.



**Figure 1.** Déplacement du point d'impact (Newmark)

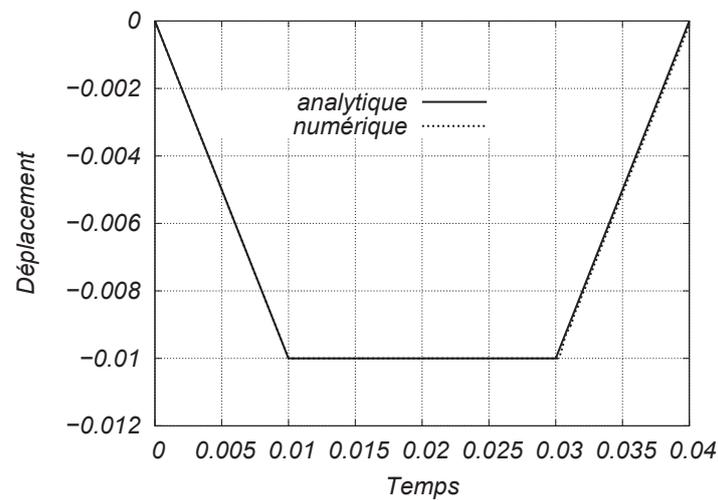
La figure 2 représente l'évolution de l'énergie totale du système ( $E_t$ ) au cours du temps. Sur la figure sont également présentées les évolutions des énergies cinétiques ( $E_c$ ) et élastique du système ( $E_e$ ). L'énergie totale croît de manière très importante pendant le contact. Cette évolution n'est pas acceptable d'un point de vue physique et explique en grande partie l'échec de la simulation. Dans les problèmes d'impact et de choc, l'enjeu semble donc être de contrôler l'énergie totale du système afin d'assurer la convergence du système.



**Figure 2.** Évolution de l'énergie (Newmark)

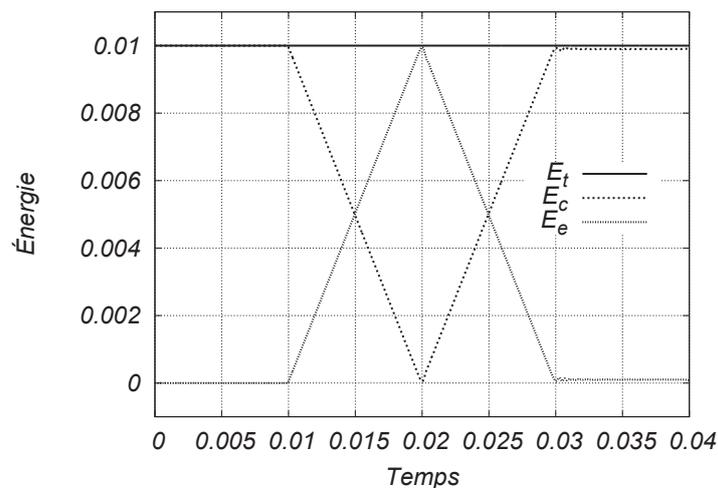
### 3.2. Schéma du premier ordre

Sur la figure 3, nous retrouvons les courbes représentant le déplacement du point d'impact au cours du temps. Nous pouvons estimer que la corrélation entre le résultat numérique et le résultat théorique est tout à fait remarquable. Les deux courbes sont quasiment superposées et nous n'observons pas d'oscillations de la position du point de contact durant le choc.



**Figure 3.** Déplacement du point d'impact (premier ordre)

Le bon comportement de la méthode se retrouve sur la courbe représentative de l'évolution des énergies du système (figure 4). Une nouvelle fois, le résultat est remarquable : l'énergie du système reste presque parfaitement constante tout au long de la simulation.



**Figure 4.** Évolution de l'énergie (premier ordre)

## 4. Conclusions

Dans cette communication, nous présentons les résultats des travaux effectués pour étendre le domaine d'application de la méthode du bi-potentiel aux problèmes d'impact. Dans un premier temps, nous avons montré que l'utilisation du schéma de Newmark dans sa formulation classique n'est pas une solution stable. Il est cependant intéressant de noter que nombreux travaux ont été menés pour adapter le schéma de Newmark aux problèmes d'impact (Armero *et al.*, 1998, Laursen *et al.*, 1997) mais au prix d'un effort de développement important. Dans un second temps, le choix d'un schéma du premier ordre aboutit à des résultats très encourageants. En particulier, cette association avec la méthode du bi-potentiel permet de maîtriser l'énergie totale du système tout au long de la simulation. Il est alors possible, pour un problème d'impact avec frottement, de quantifier de manière précise l'énergie mécanique dissipée par frottement. Ce point fort de la méthode a été développé dans (Feng *et al.*, 2005).

## 5. Bibliographie

- Armero F., Petocz E., « Formulation and analysis of conserving algorithms for frictionless dynamic contact/impact problems », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 158, p. 269-300, 1998.
- De Saxcé G., Feng Z.-Q., « New inequality and functional for contact with friction : The implicit standard material approach », *Mech. Struct. & Mach.*, vol. 19, p. 301-325, 1991.
- De Saxcé G., Feng Z.-Q., « The bi-potential method : a constructive approach to design the complete contact law with friction and improved numerical algorithms », *Mathematical and Computer Modeling*, vol. 28(4-8), p. 225-245, 1998. special issue Recent Advances in Contact Mechanics.
- Feng Z.-Q., « 2D or 3D frictional contact algorithms and applications in a large deformation context », *Comm. Numer. Meth. Engng.*, vol. 11, p. 409-416, 1995.
- Feng Z.-Q., Cros J.-M., Magnain B., « Un algorithme efficace pour les problèmes d'impact avec frottement », *Revue Européenne des Éléments Finis*, vol. 14, n° 1, p. 65-86, 2005.
- Goudreau G., Taylor R., « Evaluation of numerical integration methods in elastodynamics », *Compt. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 2, p. 69-97, 1972.
- Jean M., « The non-smooth contact dynamics method », *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, vol. 177, p. 235-257, 1999.
- Laursen T. A., Chawla V., « Design of energy conserving algorithms for frictionless dynamic contact problems », *Int. J. Num. Meth. Engng.*, vol. 40, p. 863-886, 1997.
- Simo J., Wong K., « Unconditionally stable algorithms for rigid body dynamics that exactly preserve energy and momentum », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 31, p. 19-52, 1991.
- Tamma K., Namburu R., « A robust self - starting explicit computational methodology for structural dynamic applications : architecture and representations », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 30, p. 1441-1454, 1990.
- Wriggers P., *Computational contact mechanics*, John Wiley & Sons, 2002.