



HAL
open science

Systeme d'equations integrales de frontiere pour les derivees partielles d'une fonction harmonique dans un ouvert du plan

Alain Cimetiere, Franck Delvare, Frederic Pons

► **To cite this version:**

Alain Cimetiere, Franck Delvare, Frederic Pons. Systeme d'equations integrales de frontiere pour les derivees partielles d'une fonction harmonique dans un ouvert du plan. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01508945

HAL Id: hal-01508945

<https://hal.science/hal-01508945>

Submitted on 15 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinee au depot et a la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publies ou non, emanant des etablissements d'enseignement et de recherche francais ou etrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Système d'équations intégrales de frontière pour les dérivées partielles d'une fonction harmonique dans un ouvert du plan. Application à un problème inverse de Cauchy

Alain Cimetière* — **Franck Delvare**** — **Frédéric Pons*****

* *ENSMA et LMP Université de Poitiers*

*Boulevard Marie et Pierre CURIE, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex
alain.cimetiere@univ-poitiers.fr*

** *LEES, Université d'Orléans et ENSI de Bourges*

88 Boulevard Lahitolle, 18020 Bourges Cedex

franck.delvare@ensi-bourges.fr

*** *LEA, Université de Poitiers et ENSMA*

*Boulevard Marie et Pierre CURIE, Téléport 2, BP 30179, 86962 Futuroscope Cedex
pons@ensma.fr*

RÉSUMÉ. Une méthode de résolution est proposée pour le problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace. Elle s'appuie sur un nouveau système d'équations intégrales de frontière. Des simulations numériques prouvent l'efficacité, la précision, la robustesse aux bruits ainsi que la capacité de la méthode à débruiter les données.

ABSTRACT. A resolution method for a Cauchy problem is proposed. It is based on a new system of boundary integral equations. Numerical simulations highlight the efficiency, the accuracy, the robustness to noises on data and the ability to deblur noisy data.

MOTS-CLÉS : Equations intégrales de frontière, méthode des éléments de frontière, problème inverse, problème de Cauchy, complétion de données.

KEYWORDS: Boundary integral equation, boundary element method, inverse problem, Cauchy problem, data completion.

1. Introduction

Les problèmes inverses dits de complétion de données interviennent dans de nombreux domaines de la physique, comme par exemple en thermique, en mécanique ou en électrostatique. Ils trouvent, entre autres, des applications en contrôle non destructif ou dans le domaine médical.

Nous nous intéressons ici au problème de Cauchy associé à l'équation de Laplace :

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \subset R^2 \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \\ u' = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \end{cases} \quad [1]$$

où u' est la dérivée normale de u et Γ_d est une partie de la frontière $\Gamma = \partial\Omega$ sur laquelle des conditions aux limites surabondantes sont prescrites. Le but est de calculer u et sa dérivée normale u' sur la partie de frontière complémentaire $\Gamma_i = \Gamma \setminus \Gamma_d$. Ce problème (1) admet une et une seule solution lorsque les données ϕ_d et ψ_d sont compatibles. De nombreuses méthodes ont déjà été proposées (Andrieux *et al.*, 2006, Bourgeois, 2005, Cimetièrre *et al.*, 2001, Hayashi *et al.*, 2002, Kozlov *et al.*, 1991, Lesnic *et al.*, 1997, Tikhonov *et al.*, 1977) pour résoudre ce problème.

Dans le but d'améliorer la reconstruction de la dérivée normale u' , nous avons introduit une méthode d'ordre un (Cimetièrre *et al.*, 2005, Delvare *et al.*, 2007). Elle couple la détermination de la solution u de (1) à la détermination de deux inconnues auxiliaires u_1 et u_2 qui s'avèrent coïncider avec les deux dérivées partielles de u , lorsque les données ϕ_d et ψ_d du problème d'ordre zéro (1) sont compatibles. Le problème d'ordre un fait appel à des données aux limites sur Γ_d qui doivent être obtenues à partir des seules données ϕ_d et ψ_d . L'évaluation de ces informations complémentaires nécessitent de dériver tangentiellement la donnée ϕ_d deux fois et la donnée ψ_d une fois. Ces dérivées tangentielles sont évaluées numériquement.

Nous proposons ici une méthode de résolution pour le problème de Cauchy (1) qui est basée sur le principe de la méthode d'ordre un mais qui ne nécessite pas l'évaluation numérique d'informations complémentaires sur Γ_d . Cette méthode repose sur l'utilisation d'un nouveau système d'équations intégrales de frontière qui couplent les deux dérivées partielles d'une fonction harmonique, sans faire intervenir leurs dérivées normales.

2. Un système d'équations intégrales pour les dérivées partielles

Soit un domaine $\Omega \subset R^2$, de frontière Γ supposée régulière pour simplifier l'exposé. L'équation intégrale classique associée à l'équation de Laplace (Bonnet, 1999) est pour tout $x \in \Gamma$:

$$r(u, u')(x) = \frac{1}{2}u(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} u(y) ds - \int_{\Gamma} G(x, y) u'(y) ds = 0 \quad [2]$$

où G est la solution fondamentale de Green usuelle.

Sous l'hypothèse de régularité $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^3(\Omega)$, on obtient d'abord :

$$\Delta\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right) = \frac{\partial(\Delta u)}{\partial x_i} = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad \text{pour } i=1,2 \quad [3]$$

puis, par prolongement sur le bord Γ de l'équation $\Delta u = 0$, on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_1} \quad \forall x \in \Gamma \quad [4]$$

$$\frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial x_1} = -\frac{\partial}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_2} \quad \forall x \in \Gamma \quad [5]$$

Ces relations sont introduites dans l'équation intégrale (2). Nous obtenons ainsi, après intégration par parties, deux équations intégrales couplant uniquement les valeurs sur la frontière des deux dérivées partielles de u (6-7).

$$\begin{aligned} R_1\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_1}(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y) ds \\ &\quad - \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_2}(y) ds = 0 \quad \forall x \in \Gamma \end{aligned} \quad [6]$$

$$\begin{aligned} R_2\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}\right)(x) &= \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x_2}(x) + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial n} \frac{\partial u}{\partial x_2}(y) ds \\ &\quad + \int_{\Gamma} \frac{\partial G(x, y)}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial x_1}(y) ds = 0 \quad \forall x \in \Gamma \end{aligned} \quad [7]$$

3. Application à la régularisation du problème de Cauchy

Nous introduisons le problème (8) suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} r(u, n_1 u_1 + n_2 u_2) = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (a) \\ \int_{\Gamma} (n_1 u_1 + n_2 u_2) ds = 0 & (b) \\ u = \phi_d & \text{sur } \Gamma_d \quad (c) \\ n_1 u_1 + n_2 u_2 = \psi_d & \text{sur } \Gamma_d \quad (d) \\ R_1(u_1, u_2) = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (e) \\ R_2(u_1, u_2) = 0 & \text{sur } \Gamma \quad (f) \end{array} \right. \quad [8]$$

Comme dans (Cimetière *et al.*, 2005), nous distinguons les informations certaines (relations caractérisant l'équilibre (8a et 8b) des données incertaines (conditions aux limites (8c et 8d). Nous introduisons un algorithme itératif à effet régularisant évanescent (9) où les relations intégrales reliant les dérivées partielles (8e et 8f) sont utilisées comme un terme de contrôle :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Soient } c > 0, \alpha > 0 \text{ et } \mathbf{U}^0 \in H(\Gamma) \\ \text{Trouver } \mathbf{U}^{k+1} = (u^{k+1}, u_1^{k+1}, u_2^{k+1}) \in H(\Gamma) \text{ tel que} \\ J_c^k(\mathbf{U}^{k+1}) \leq J_c^k(\mathbf{V}) \quad \forall \mathbf{V} \in H(\Gamma) \text{ avec :} \\ J_c^k(\mathbf{V}) = \|v - \phi_d\|_{\Gamma_d}^2 + \|(v_1 n_1 + v_2 n_2) - \psi_d\|_{\Gamma_d}^2 + c \|v - u^k\|_{\Gamma}^2 \\ \quad + \alpha \|R_1(v_1, v_2)\|_{\Gamma}^2 + \alpha \|R_2(v_1, v_2)\|_{\Gamma}^2 \end{array} \right. \quad [9]$$

où $H(\Gamma)$ est l'espace des traces de fonctions vérifiant les données fiables (8a et 8b).

4. Discrétisation par la méthode des éléments de frontière

4.1. Représentation discrète de l'espace $H(\Gamma)$

L'équation intégrale (8a) est écrite sous forme discrétisée. Si on considère que la frontière Γ est approximée par N éléments de frontière et que l'équation intégrale est écrite au milieu de chaque élément, nous obtenons alors un système linéaire de N équations de la forme :

$$AU + B_1U_1 + B_2U_2 = 0 \quad [10]$$

où A , B_1 et B_2 sont des matrices qui dépendent seulement de la géométrie de la frontière et les vecteurs U , U_1 et U_2 sont respectivement constitués des valeurs discrètes de la fonction et de ses deux dérivées partielles supposées constantes sur chaque élément de frontière. La discrétisation de la relation (8b), caractérisant aussi l'équilibre, conduit à une relation scalaire reliant les composantes de U_1 et U_2 .

L'espace $H(\Gamma)$ peut donc être caractérisé de manière discrète par le système linéaire (11) de $N + 1$ équations avec $3N$ inconnues :

$$\begin{cases} AU + B_1U_1 + B_2U_2 = 0 \\ N_1^T U_1 + N_2^T U_2 = 0 \end{cases} \quad [11]$$

4.2. Représentation discrète des relations intégrales (6) et (7)

Considérant à nouveau la discrétisation du paragraphe 4.1, la relation intégrale (6) s'écrit sous la forme d'un système linéaire de N équations :

$$AU_1 - CU_2 = 0 \quad [12]$$

et la relation intégrale (7) sous la forme d'un système linéaire de N équations :

$$CU_1 + AU_2 = 0 \quad [13]$$

4.3. Discrétisation de l'algorithme itératif

La formulation discrète du processus itératif (9) conduit à chaque pas à un problème d'optimisation sous contraintes égalités :

$$\begin{cases} \text{Trouver } \Psi^{k+1} = (U^{k+1}, U_1^{k+1}, U_2^{k+1}) \in R^{3N} \text{ tel que} \\ J^k(\Psi^{k+1}) \leq J^k(\Psi) \quad \forall \Psi \in R^{3N} \\ \text{sous les contraintes égalités :} \\ AU + B_1U_1 + B_2U_2 = 0 \\ N_1^T U_1 + N_2^T U_2 = 0 \end{cases} \quad [14]$$

Nous introduisons un vecteur composé de $N + 1$ multiplicateurs de Lagrange pour prendre en compte les $N + 1$ contraintes égalités et aboutissons à la résolution d'un

système linéaire de $4N + 1$ équations à $4N + 1$ inconnues. Dans (Cimetière *et al.*, 2005), le système était composé de $9N + 1$ équations à $9N + 1$ inconnues.

5. Simulations numériques

Les simulations numériques ont pour but de présenter les potentialités de la méthode, en particulier dans le cas d'un niveau de bruit important entachant les données. Dans le premier cas, le domaine considéré est un carré (figure 1) et la fonction à reconstruire est :

$$u(x_1, x_2) = \cos x_1 \cosh x_2 + \sin x_1 \sinh x_2 \quad [15]$$

Les données ϕ_d et ψ_d sont entachées d'un bruit de mesure de 10%. La reconstruction de u est parfaite. La figure 2 donne la reconstruction de la dérivée normale.

Dans le second cas, le domaine considéré ainsi que le support des données sont précisés sur la figure 3. La fonction à reconstruire est :

$$u(x_1, x_2) = \frac{x_2}{(x_1 - \frac{1}{2})^2 + x_2^2} \quad [16]$$

La figure 4 (respectivement figure 5) donne la reconstruction de la dérivée normale lorsque les données sont exactes (respectivement entachées d'un bruit de mesure de 10%). Dans ce cas, les reconstructions de u sont excellentes.

On constate dans tous les cas que les reconstructions sont précises lorsque le domaine est à frontière non régulière. Elles montrent aussi que la méthode fournit des résultats très précis, même en présence de niveaux de bruits importants.

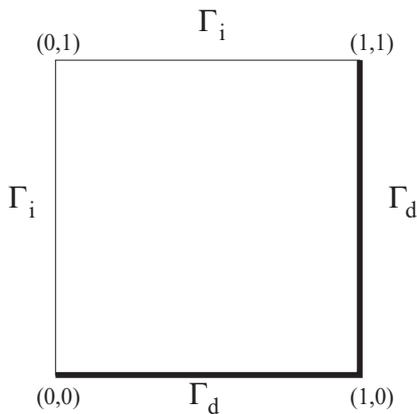


Figure 1. Domaine d'étude

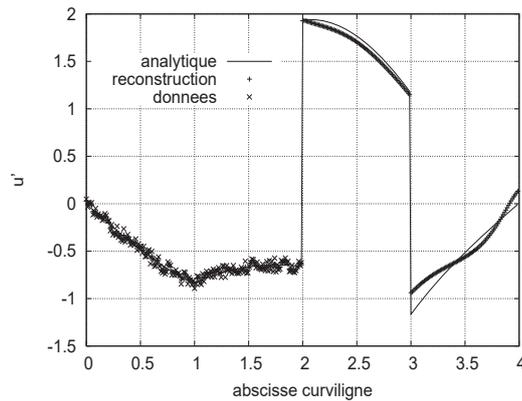
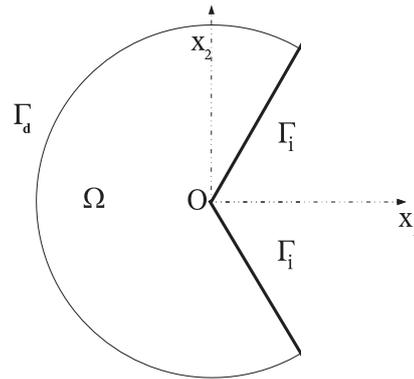
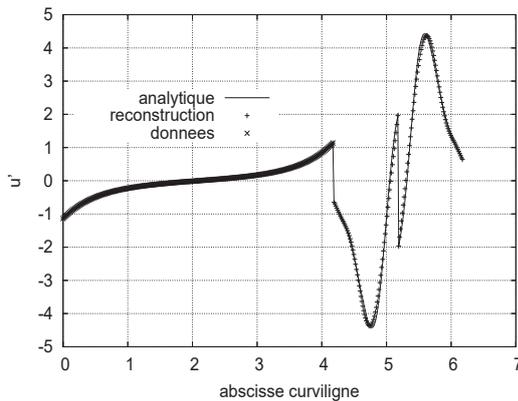
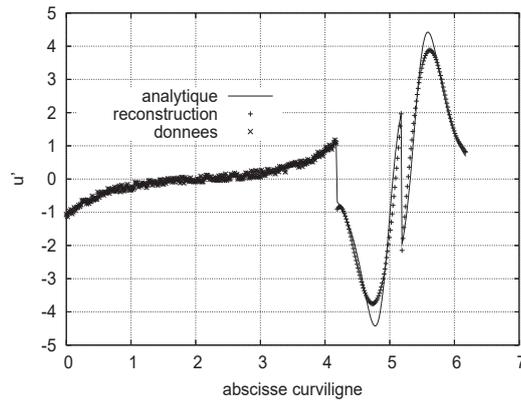


Figure 2. Reconstruction de u' , bruit sur u et u' de 10%

Figure 3. *Domaine d'étude*Figure 4. *Reconstruction de u' , données non bruitées*Figure 5. *Reconstruction de u' , bruit sur u et u' de 10%*

6. Bibliographie

- Andrieux S., Baranger T., Ben Abda A., « Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional », *Inverse Problems*, vol. 22, p. 115-133, 2006.
- Bonnet M., *Boundary Integral Equations Methods in Solids and Fluids*, John Wiley and Sons, Chichester, 1999.
- Bourgeois L., « A mixed formulation of quasi-reversibility to solve the Cauchy problem for Laplace's equation », *Inverse Problems*, vol. 21, p. 1087-1104, 2005.
- Cimetièrè A., Delvare F., Jaoua M., Pons F., « Solution of the Cauchy problem using iterated Tikhonov regularization », *Inverse Problems*, vol. 17, n° 3, p. 553-570, 2001.
- Cimetièrè A., Delvare F., Pons F., « Une methode inverse d'ordre un pour les problèmes de complétion de données », *Comptes Rendus Mecanique*, vol. 333, n° 2, p. 123-126, 2005.
- Delvare F., Cimetièrè A., « A first order method for the Cauchy problem for the Laplace equation using BEM », *Computational Mechanics (to appear)*, 2007.
- Hayashi K., Ohura Y., Onishi K., « Direct method of solution for general boundary value problem of the Laplace equation », *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 26, p. 763-771, 2002.
- Kozlov V., Maz'ya V., Fomin A., « An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations », *Comput. Math. Phys.*, vol. 31, n° 1, p. 45-52, 1991.
- Lesnic D., Elliott L., Ingham D., « An iterative boundary element method for solving the Cauchy problem for the Laplace equation », *Eng. Anal. Bound. Elem.*, vol. 20, p. 123-133, 1997.
- Tikhonov A., Arsenin V., *Solutions of Ill-posed problems*, John Wiley & Sons, New-York, 1977.