



**HAL**  
open science

## Un estimateur d'erreur pour les modèles probabilistes en mécanique linéaire avec contacts

Jérémie Bellec, Pierre Ladevèze, Éric Florentin, David Néron

► **To cite this version:**

Jérémie Bellec, Pierre Ladevèze, Éric Florentin, David Néron. Un estimateur d'erreur pour les modèles probabilistes en mécanique linéaire avec contacts. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01507579

**HAL Id: hal-01507579**

**<https://hal.science/hal-01507579>**

Submitted on 13 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Un estimateur d'erreur pour les modèles probabilistes en mécanique linéaire avec contacts

Jérémy Bellec—Pierre Ladevèze\* —Eric Florentin—David Néron

*LMT-Cachan  
ENS Cachan/CNRS UMR8535/Université Paris 6  
61 avenue du Président Wilson  
F-94235 Cachan CEDEX - FRANCE  
bellec@lmt.ens-cachan.fr*

*\* Chaire de la Fondation EADS « Advanced Computational Structural Mechanics »*

---

*RÉSUMÉ. Cet article introduit des outils quantitatifs, basés sur la notion d'erreur en relation de comportement, permettant de qualifier les erreurs de modèle dans le cadre stochastique en mécanique linéaire avec contacts. Un estimateur d'erreur dans le cadre stochastique est proposé, ainsi que la construction des champs utiles au calcul de celui-ci. Cet estimateur est ensuite utilisé sur un exemple simple, ce qui permet d'observer certaines de ses propriétés vis-à-vis de l'erreur de référence.*

*ABSTRACT. This paper introduce quantitative tools, based on the constitutive relation error, leading to the qualification of the model error for stochastic problems in linear mechanics with contacts. A stochastic error estimator is proposed with the construction of the related admissible fields. This estimator is then used on a simple example that makes it possible to observe certain of its properties by comparison with a reference error.*

*MOTS-CLÉS : erreur en relation de comportement, modèles stochastiques, méthode LATIN, contact*

*KEYWORDS: constitutive relation error, stochastic model, LATIN method, contact*

---

## 1. Introduction

La prise en compte des variabilités dans les différentes phases de la conception mécanique est devenue une des problématiques majeures des industriels. Un certain nombre de travaux ont ainsi vu le jour afin de formuler de manière concrète ces problèmes aléatoires et d'apporter des outils performants et adaptés à ce type de modélisation (e.g. (Belytschko, 1986, Kleiber, 1992, Ghanem *et al.*, 2003)). Ici, nous nous intéresserons surtout aux méthodes dites « non intrusives » (Ghanem *et al.*, 2003, Ghanem *et al.*, 1991, Sudret *et al.*, 2005), dans lesquelles la représentation sur l'espace stochastique d'une quantité d'intérêt est construite à partir d'une série de calculs déterministes. La recherche d'un estimateur d'erreur dans le cadre stochastique qui permette de qualifier la qualité des modèles stochastiques apparaît donc comme une étape indispensable pour conduire ces études probabilistes en toute confiance. Dans ce contexte, nous étendons au cadre stochastique l'estimateur d'erreur global, fondé sur le concept d'erreur en relation de comportement ((Ladevèze *et al.*, 2004, Ladevèze, 2003, Ladevèze *et al.*, à paraître 2006)), qui a été introduit dans le cadre déterministe de structures avec contact par (Coorevits *et al.*, May 2000, Louf *et al.*, 2004).

## 2. Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique

Nous supposons un problème de contact dans le domaine probabiliste. La dépendance aléatoire des paramètres est représentée par la variable  $\underline{\xi}$ , la dépendance en espace est représentée par la variable  $\underline{M}$ . Pour décrire le problème, nous utilisons une formulation sous-structurée pour laquelle les sous-structures et les interfaces sont des entités physiques (méthode LATIN (Ladevèze, 1999)). Les grandeurs qui interviennent dans le problème sont les suivantes :

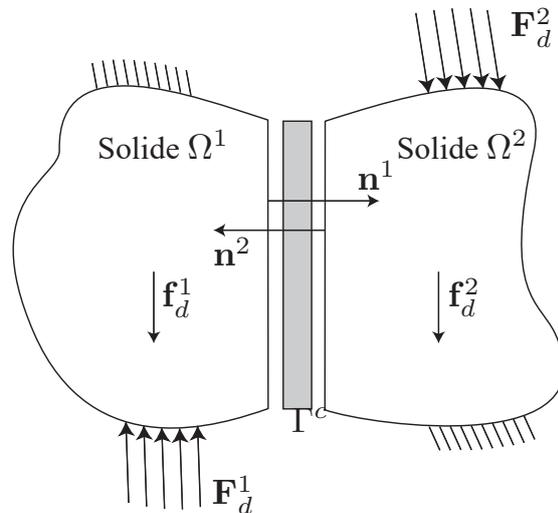


Figure 1. Problème de contact

- Déplacement et contraintes dans  $\Omega^1$  :  $(\mathbf{u}^1(\underline{M}, \underline{\xi}), \sigma^1(\underline{M}, \underline{\xi}))$  ;
- Déplacement et contraintes dans  $\Omega^2$  :  $(\mathbf{u}^2(\underline{M}, \underline{\xi}), \sigma^2(\underline{M}, \underline{\xi}))$  ;
- Saut de déplacement et de contraintes sur l'interface  $\Gamma^c$  :  $(\mathbf{w}^c(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^c(\underline{M}, \underline{\xi}))$  ;
- Déplacement et contraintes de part et d'autre de  $\Gamma^c$  :  $(\mathbf{w}^l(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^l(\underline{M}, \underline{\xi}))$   
avec  $l = 1, 2$ .

Les relations de comportement s'écrivent sous la forme :

- dans les solides  $\Omega^l$  :  $\sigma^l(\underline{M}, \underline{\xi}) = \mathbf{K}^l(\underline{\xi})\epsilon(\mathbf{u}^l(\underline{M}, \underline{\xi}))$  ;
- sur l'interface  $\Gamma^c$  :  $b_{\underline{\xi}}(-\mathbf{w}^c(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^c(\underline{M}, \underline{\xi})) + \mathbf{w}^c(\underline{M}, \underline{\xi}) \cdot \mathbf{F}^c(\underline{M}, \underline{\xi}) = 0$

### ***Estimateur d'erreur dans le cadre stochastique***

L'estimateur *stochastique* est construit à partir l'espérance mathématique de l'erreur déterministe. Les bases de cet estimateur sont données dans (Ladevèze, 2003) (dans l'équation suivante, la dépendance vis-à-vis de la variable aléatoire  $\underline{\xi}$  est implicite) :

$$\begin{aligned} e^2(s_{Ad}(\underline{\xi})) &= \int_{\underline{\xi}} e_{RdC}^2 \phi(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \\ &= \int_{\underline{\xi}} \left[ \sum_{i=1}^2 \|\hat{\sigma}^l - \mathbf{K}^l \epsilon(\hat{\mathbf{u}}^l)\|_{\Omega^l}^2 + 2 \int_{\Gamma^c} [b_{(\underline{\xi})}(-\hat{\mathbf{w}}^c, \hat{\mathbf{F}}^c) + \hat{\mathbf{w}}^c \cdot \hat{\mathbf{F}}^c] ds \right] \phi(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad [1] \end{aligned}$$

Compte tenu des propriétés de l'estimateur d'erreur déterministe (défini positif), cette mesure d'erreur  $e(s_{Ad}(\underline{\xi}))$  est nulle si et seulement si l'erreur déterministe  $e_{RdC}$  est nulle pour tout  $\underline{\xi}$  donc si  $s_{Ad}(\underline{\xi})$  vérifie les relations de comportement déterministe pour tout  $\underline{\xi}$ .

### ***Champs admissibles dans le cadre stochastique***

Les champs  $(\sigma^1(\underline{M}, \underline{\xi}), \sigma^2(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^c(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^1(\underline{M}, \underline{\xi}), \mathbf{F}^2(\underline{M}, \underline{\xi}))$  sont statiquement admissibles s'ils vérifient les équations du problème stochastique de référence :

$\forall \mathbf{u}^*$  nul sur  $\partial_1 \Omega^l$  et pour  $l = (1, 2)$  :

$$\begin{aligned} \int_{\underline{\xi}} \int_{\Omega^l} Tr[\sigma^l \epsilon(\mathbf{u}^*)] \phi(\underline{\xi}) d\Omega d\underline{\xi} = \\ \int_{\underline{\xi}} \left[ \int_{\Omega^l} \mathbf{F}_d^l \cdot \mathbf{u}^* d\Omega + \int_{\partial_2 \Omega^l} \mathbf{F}_d^l \cdot \mathbf{u}^* ds + \int_{\Gamma^c} \mathbf{F}^l \cdot \mathbf{u}^* ds \right] \phi(\underline{\xi}) d\underline{\xi} \quad [2] \end{aligned}$$

$$\text{et sur } \Gamma^c : \quad \mathbf{F}^c = -\mathbf{F}^1 = \mathbf{F}^2 \quad [3]$$

Cette formulation de l'admissibilité est dite faible car nous ne cherchons pas à vérifier les conditions d'admissibilité pour toutes les valeurs des variables aléatoires  $\underline{\xi}$ , mais seulement en moyenne.

### ***Calcul des champs statiquement admissibles***

Dans le cadre des méthodes non intrusives, il est possible d'obtenir une approximation des différents champs sur l'espace stochastique, en faisant une interpolation à partir d'une série de valeurs de ces champs, obtenus en un nombre fini  $n$  de points par calcul déterministe. Les interpolations retenues dans cette étude sont l'interpolation polynomiale standard, l'interpolation sur le chaos polynomial et l'interpolation linéaire par morceaux. Le calcul des champs statiquement admissibles, nécessaire pour obtenir l'erreur en relation de comportement, ne peut pas se faire indépendamment du choix de l'interpolation sur le domaine stochastique.

### ***Champs admissibles pour les différentes interpolations***

A chaque calcul déterministe, il est possible de construire un champ statiquement admissible (Ladevèze *et al.*, 2004, Louf *et al.*, 2004). Lorsque le nombre de calculs est important, l'interpolation linéaire par morceaux de ce champ peut être considérée

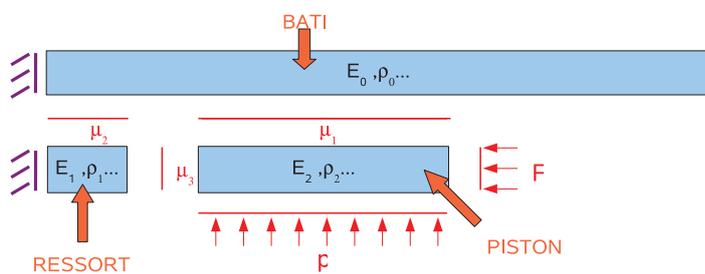
comme une solution de référence car elle vérifie à peu de chose près la formulation du problème de référence sur tout l'espace stochastique :

- $\sigma_{ref}(\underline{M}, \underline{\xi})$  = interpolation linéaire par morceaux des  $n$   $\sigma_{ad}(\underline{M})$  déterministes ;
- $\sigma_{ad_{chaos}}(\underline{M}, \underline{\xi})$  = interpolation chaos des  $n$   $\sigma_{ad}(\underline{M})$  déterministes ;

L'interpolation standard ne vérifiant pas les bonnes propriétés, on ne peut pas calculer le champ statiquement admissible à partir de celle ci. Une solution simple consiste à prendre le même champ admissible que pour l'interpolation sur le chaos polynomial :

-  $\sigma_{ad_{standard}}(\underline{M}, \underline{\xi}) = \sigma_{ad_{chaos}}(\underline{M}, \underline{\xi})$ .

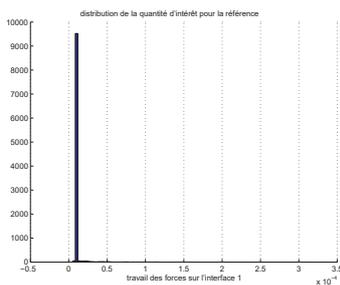
### 3. Exemple



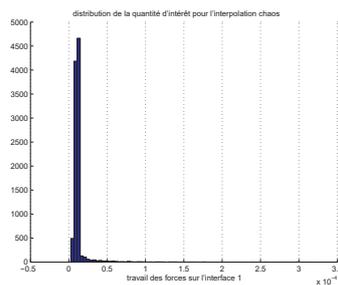
**Figure 2.** Contact avec frottement entre un piston et un bâti

La seule variable aléatoire est le coefficient de frottement  $\mu_1$  entre le piston et le bâti. On considère ici une loi de probabilité normale tronquée avec une espérance de 0.5, un écart type de 0.05 et un intervalle de variation compris entre 0.2 et 0.8 (soit plus ou moins 6 écarts types). Ce cas test simple nous permet de construire une solution de référence.

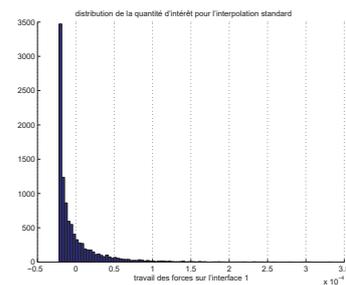
#### Densités de probabilité



**Figure 3.** Densité de probabilité obtenue pour la référence



**Figure 4.** Densité de probabilité obtenue pour une interpolation chaos



**Figure 5.** Densité de probabilité obtenue pour une interpolation standard

Dans cette illustration, nous nous intéressons à la norme du travail des efforts de frottement au niveau de la zone de contact entre le piston et le bâti. Une comparaison

rapide des différentes distributions obtenues figures 3, 4 et 5 permet d'avoir une estimation qualitative de la qualité des surfaces de réponses vis-à-vis de la solution de référence.

### **Estimateur d'erreur, qualité du modèle**

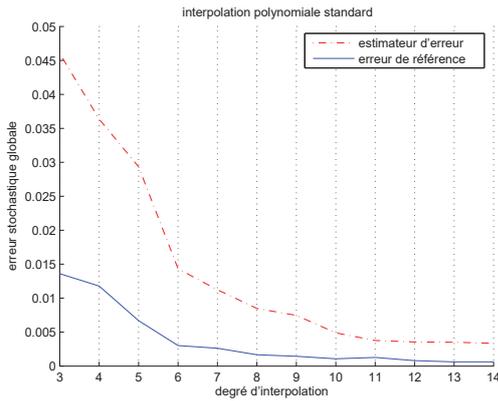
Sur le même exemple, nous calculons l'estimateur d'erreur global dans le cadre stochastique associé à chaque modèle approché utilisé. Nous comparons ensuite l'estimation de l'erreur avec l'erreur de référence correspondant à la norme énergétique de l'écart entre le champ de contraintes approché  $\sigma_h(\underline{M}, \underline{\xi})$  et le champ de contraintes de référence  $\sigma_{ref}(\underline{M}, \underline{\xi})$ . Pour l'exemple précédent, l'estimateur d'erreur pour un degré d'interpolation égal à 4 donne :

$$e_{standard}^2 = 3.408 \text{ et } e_{chaos}^2 = 3.372.$$

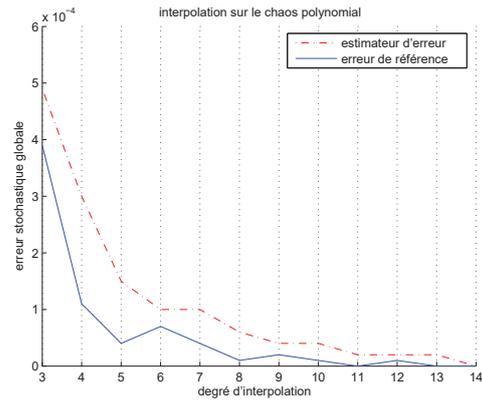
A priori, cette grandeur  $e^2$  peut se décomposer en deux parties : la part éléments finis  $e_{EF}^2$  due à la discrétisation spatiale du problème et la part stochastique  $e_{sto}^2$  due à l'approximation sur l'espace stochastique. Pour une meilleure lecture de ces chiffres, on peut estimer chaque part de l'erreur en supposant que pour un degré d'interpolation élevé, la part stochastique de l'erreur devient négligeable, et que la valeur obtenue correspond à la part éléments finis. Une évaluation de l'erreur de référence pour un degré d'interpolation de 14 nous donne 3.3717 comme valeur de la part éléments finis. L'estimation de la part stochastique de l'erreur (soit  $e_{sto}^2 = e^2 - e_{EF}^2$ ) pour les deux modèles approchés pour différentes valeurs du degré d'interpolation donne, pour un degré d'interpolation égale à 4, les valeurs suivantes :

$$e_{sto-standard}^2 = 0.037 \text{ et } e_{sto-chaos}^2 = 0.0003.$$

### **Propriété de l'estimateur vis-à-vis de l'erreur de référence**



**Figure 6.** Comparaison entre l'estimateur d'erreur et l'erreur de référence pour l'interpolation standard



**Figure 7.** Comparaison entre l'estimateur d'erreur et l'erreur de référence pour l'interpolation chaos

Pour avoir une idée de la qualité de l'estimateur, les valeurs des parts stochastiques obtenues pour chaque modèle approché sont comparées à l'erreur de référence

dans les figures 6 et 7. Ces figures montrent que l'erreur de référence pour l'interpolation polynomiale standard est effectivement plus grande que l'erreur de référence pour l'interpolation sur le chaos polynomial. De plus, pour chaque modèle approché, l'estimateur d'erreur reste supérieur à l'erreur de référence et ces deux grandeurs ont sensiblement le même taux de convergence.

#### 4. Conclusion

La recherche d'indicateurs spécifiques à chacune de ces parts de l'erreur ainsi que la donnée de critères spécifiques permettra de valider l'utilisation du modèle approché, et d'améliorer sa qualité. A terme, ces indicateurs seront utilisés pour définir les paramètres optimaux de calcul pour une précision du modèle donnée à l'avance.

#### 5. Bibliographie

- Belytschko T., « Random Field Finit Element », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 23, p. 1831-1845, 1986.
- Coorevits P., Hild P., Pelle J.-P., « A posteriori error estimation for unilateral contact with matching and non-matching meshes », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 186, p. 65-83, May 2000.
- Ghanem R., Spanos P., *Stochastic Finite Elements : A Spectral Approach.*, Springer, Berlin, 1991.
- Ghanem R., Spanos P., *Stochastic Finite Elements (revised edition)*, Dover, 2003.
- Kleiber M., *The Stochastic Finite Element Method. Basic Perturbation Technique and Computer Implementation*, John Willey & Sons, 1992.
- Ladevèze P., *Nonlinear Computational Structural Mechanics – New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Springer Verlag, 1999.
- Ladevèze P., Validation et vérification de modèles stochastiques en environnement incertain par la méthode de l'erreur en relation de comportement, Rapport Interne n° 258, LMT-Cachan, 2003.
- Ladevèze P., Pelle J.-P., *Mastering Calculations in Linear and Nonlinear Mechanics*, Springer, Mechanical Engineering Series, 2004.
- Ladevèze P., Florentin E., « Verification of stochastic models in uncertain environments using the constitutive relation error method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, à paraître 2006.
- Louf F., Gallimard L., Pelle J.-P., « Estimation des erreurs de discrétisation pour les problèmes de contact avec frottement de Coulomb », *36e Congrès National d'Analyse Numérique - CANUM*, 2004.
- Sudret B., Berveiller M., Lemaire M., « Des éléments finis stochastiques spectraux aux surfaces de réponse stochastiques : une approche unifiée », *17e Congrès Français de Mécanique, Troyes*, 2005.