



HAL
open science

Localisation et fracture en milieux biphasiques adoucissants

Marie-Angèle Abellan, René de Borst

► **To cite this version:**

Marie-Angèle Abellan, René de Borst. Localisation et fracture en milieux biphasiques adoucissants. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01507575

HAL Id: hal-01507575

<https://hal.science/hal-01507575>

Submitted on 15 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Localisation et fracture en milieux biphasiques adoucissants

Marie-Angèle Abellan* — René de Borst**,***

* *LTDS-ENISE, UMR CNRS 5513, E.N.I.S.E, F-42023 Saint-Etienne*
abellan@enise.fr

** *Faculty of Aerospace Engineering, TU Delft, NL-2600 GB Delft*

*** *LaMCoS, UMR CNRS 5514, I.N.S.A. de Lyon, F-69621 Villeurbanne*
r.deborst@tudelft.nl

RÉSUMÉ. La propagation des ondes est dispersive dans les milieux poreux saturés par un fluide. Mais la longueur interne disparaît à la limite du domaine des longueurs d'ondes courtes. De ce fait, aucune régularisation ne peut se produire lors de la prise en compte d'un comportement adoucissant dans la loi de comportement du milieu et on observe la localisation des déformations dans une bande de largeur nulle. Ainsi comme pour le milieu solide seul associé, pour les analyses par éléments finis des milieux biphasiques adoucissants il y a localisation des déformations dans le domaine le plus petit autorisé par la discrétisation.

ABSTRACT. In fluid-saturated media wave propagation is dispersive, but the associated internal length scale vanishes in the short wave-length limit. Accordingly, upon the introduction of softening, there will be no regularisation and localisation in a zero width will occur. This implies that, similar to the underlying single-phase continuum, numerical analyses shows localisation in the smallest possible width that is allowed by the discretisation.

MOTS-CLÉS : Localisation, endommagement, milieux multi-phasiques, propagation des ondes.

KEYWORDS: Localisation, damage, multi-phase media, wave propagation.

1. Introduction

Le comportement adoucissant des matériaux et ses conséquences telles que la localisation des déformations et la fracture ont été beaucoup étudié ces vingt dernières années. Au départ, la prise en compte dans la loi de comportement d'un comportement adoucissant paraissait simple. Mais ce n'est pas le cas. Lors de la simulation numérique, l'introduction d'un comportement adoucissant fait apparaître une forte dépendance de la solution vis à vis du maillage. Les schémas numériques standards inadaptés semblaient être à l'origine de cette dépendance. Des études poursuivies pour un solide seul ont montré qu'en fait cette dépendance est liée au changement de caractère des équations aux dérivées partielles du problème aux limites. Mathématiquement ce problème devient mal posé sauf si des conditions d'interface spéciales sont introduites. Pour ces problèmes mal posés, les méthodes numériques, dont la méthode des éléments finis, essaient de trouver la meilleure solution, mais il apparait que cette solution change pour chaque nouvelle discrétisation [BOR 04].

Récemment la question de savoir si le caractère diffusif du mouvement d'un fluide dans un milieu biphasique peut apporter une faible forme de régularisation a été longuement débattue [SCH 96, ZHA 99]. La propagation des ondes en milieu biphasiques est dispersive. Donc il existe une longueur interne. Mais des études récentes ont montré que cette longueur interne disparaît à la limite du domaine des longueurs d'ondes courtes [BEN 03, ABE 06]. De ce fait, les simulations numériques des milieux biphasiques adoucissants font apparaître la même forte dépendance vis à vis du maillage que le milieu solide seul associé.

Dans cet article, l'analyse précédente est étendue au cas où le bilan de quantité de mouvement du fluide est conservée explicitement dans le modèle mathématique. Ceci permet l'identification de la vitesse de la seconde onde dans le milieu. Une analyse asymptotique de l'équation caractéristique d'ordre six obtenue conduit à la même conclusion que l'étude précédente : La longueur interne associée à la dispersion des ondes disparaît à la limite du domaine des longueurs d'ondes courtes. En conclusion, les analyses par éléments finis des milieux biphasiques adoucissants présentent la même dépendance vis à vis du maillage que le milieu uni-phasique associé.

2. Equations de bilan

Sous les hypothèses données dans [ABE 06], le bilan de quantité de mouvement total pour un milieu solide saturé par un fluide et le bilan de quantité de mouvement du fluide seul s'écrivent à une dimension :

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} - \alpha \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} - \rho_s \frac{\partial \dot{v}_s}{\partial t} - \rho_f \frac{\partial \dot{v}_f}{\partial t} = 0 \quad [1]$$

$$\alpha \frac{\partial \dot{p}}{\partial x} + n_f k_f^{-1} (\dot{v}_f - \dot{v}_s) + \rho_f \frac{\partial \dot{v}_f}{\partial t} = 0 \quad [2]$$

avec σ contrainte normale, v vitesse, p pression du fluide, ρ masse volumique apparente, α coefficient de Biot, n_f quotient volumique du fluide, k_f perméabilité, les indices s et f font références au solide et au fluide respectivement. Le bilan de masse du milieu total dépend de Q le module de Biot et s'écrit :

$$\alpha \frac{\partial \dot{v}_s}{\partial x} + n_f \left(\frac{\partial \dot{v}_f}{\partial x} - \frac{\partial \dot{v}_s}{\partial x} \right) + Q^{-1} \frac{\partial \dot{p}}{\partial t} = 0 \quad [3]$$

Les équations que l'on obtient à partir des équations précédentes lors d'une analyse de dispersion des ondes sont relativement compliquées. Dans [ABE 06] la pression du fluide p était éliminée des équations précédentes par prise en compte de la loi de Darcy $n_f(v_f - v_s) = k_f \partial p / \partial x$, dans les bilans de quantité de mouvement et de masse du milieu total qui s'écrivent alors respectivement :

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + \alpha n_f k_f^{-1} (v_f - v_s) - \rho_s \frac{\partial v_s}{\partial t} - \rho_f \frac{\partial v_f}{\partial t} = 0 \quad [4]$$

$$\alpha \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} + n_f \left(\frac{\partial^2 v_f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 v_s}{\partial x^2} \right) - n_f (k_f Q)^{-1} \left(\frac{\partial v_f}{\partial t} - \frac{\partial v_s}{\partial t} \right) = 0 \quad [5]$$

Ces deux dernières équations sont plus simples à manipuler. Mais elles ne contiennent plus les informations relatives à la vitesse de propagation des ondes dans le fluide.

3. Analyse de dispersion

La présence d'une longueur d'onde ne tendant pas vers zéro est directement reliée au caractère du problème aux limites qui est ou non bien posé. Il est possible d'obtenir un ordre de grandeur de cette longueur interne par étude des propriétés dispersives de la propagation des ondes. La propagation des ondes est dite dispersive lorsque les harmoniques se propagent avec des vitesses différentes. Comme une onde comporte plusieurs harmoniques, la forme d'une onde dispersive change au cours de sa propagation. La propriété de changer la forme des ondes est une condition nécessaire pour un milieu continu pour qu'il y ait localisation des déformations. Sinon il est impossible que la forme d'une onde quelconque puisse être transformée en celle d'une onde stationnaire avec par exemple une forme sinusoïdale dans la zone de localisation. Mais la propriété de dispersivité des milieux adoucissants n'est pas une condition suffisante pour que la localisation des déformations se produise dans un volume de dimensions finies et pour qu'il y ait régularisation du problème aux limites. Une telle régularisation ne peut avoir lieu que si en plus de la condition de dispersivité, il est possible de déterminer une longueur interne ne tendant pas vers zéro.

Pour analyser les propriétés de propagation des ondes dans un milieu biphases, considérons la perturbation harmonique suivante :

$$\begin{pmatrix} \delta \dot{u}_s \\ \delta \dot{u}_f \\ \delta \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_s \\ A_f \\ A_p \end{pmatrix} \exp(ikx + \lambda t) \quad [6]$$

où A_s, A_f, A_p sont respectivement les amplitudes des perturbations pour les vitesses du solide \dot{u}_s , du fluide \dot{u}_f et pour l'incrément de pression fluide \dot{p} , k est le nombre d'onde. La valeur propre $\lambda = \lambda_r - i\omega$ peut présenter une partie réelle λ_r , représentant les propriétés d'amortissement de l'onde qui se propage, et une partie imaginaire ω la fréquence angulaire. Substitution de la première de ces équations dans la relation cinématique $\dot{\epsilon} = \partial\dot{u}_s/\partial x$ et le résultat obtenu dans la relation incrémentale contrainte-déformation $\dot{\sigma}_s = E^{tan}\dot{\epsilon}$ conduit, après différentiation par rapport à x , à :

$$\frac{\partial\dot{\sigma}_s}{\partial x} = -E^{tan}A_s k^2 \exp(ikx + \lambda t) \quad [7]$$

avec E^{tan} module de rigidité tangent du solide. Par report de cette relation et substitution de la perturbation (6) dans eqs (1) – (3) il vient :

$$-E^{tan}k^2 A_s - i\alpha k A_p - \rho_s \lambda^2 A_s - \rho_f \lambda^2 A_f = 0 \quad [8]$$

$$i\alpha k A_p + n_f k_f^{-1} \lambda A_f - n_f k_f^{-1} \lambda A_s + \rho_f \lambda^2 A_f = 0 \quad [9]$$

$$(n_f - \alpha)\lambda k^2 A_s - n_f \lambda k^2 A_f + iQ^{-1}k\lambda A_p = 0 \quad [10]$$

Une solution non-triviale de ces équations homogènes existe si et seulement si leur déterminant est nul, soit :

$$\lambda^4 + a\lambda^3 + bk^2\lambda^2 + ck^2\lambda + dk^4 = 0 \quad [11]$$

$$a = \frac{n_f k_f^{-1}(\rho_s + \rho_f)}{\rho_s \rho_f}, \quad b = \frac{n_f \rho_s \alpha Q + \rho_f E^{tan}}{\rho_s \rho_f} \quad [12a]$$

$$c = \frac{n_f k_f^{-1}(E^{tan} + \alpha^2 Q)}{\rho_s \rho_f}, \quad d = \frac{n_f \alpha Q E^{tan}}{\rho_s \rho_f} \quad [12b]$$

La décomposition de l'eq. (11) en parties réelle et imaginaire conduit à :

$$\lambda_r^4 + a\lambda_r^3 + (bk^2 - 6\omega^2)\lambda_r^2 + (ck^2 - 3a\omega^2)\lambda_r + dk^4 - b\omega^2 k^2 + \omega^4 = 0 \quad [13]$$

$$(a + 4\lambda_r)\omega^2 - 4\lambda_r^3 - 3a\lambda_r^2 - 2bk^2\lambda_r - ck^2 = 0 \quad [14]$$

La dernière équation permet de déterminer la vitesse de phase :

$$c_f = \frac{\omega}{k} \sqrt{\frac{1}{a + 4\lambda_r} (4k^{-2}\lambda_r^3 + 3ak^{-2}\lambda_r^2 + 2b\lambda_r + c)} \quad [15]$$

La propagation des ondes est dispersive puisque la vitesse de phase c_f dépend du nombre d'onde k d'après eq. (15), cf. [RIZ 99, ZHA 99, BEN 03, ABE 06].

L'étude à la limite du domaine des longueurs d'ondes longues, $k \rightarrow 0$ dans eqs (13) et (14), et en éliminant ω conduit à l'équation d'ordre six en λ_r :

$$\lambda_r^3(8\lambda_r^3 + 12a\lambda_r^2 + 6a^2\lambda_r + a^3) = 0 \quad [16]$$

qui possède deux racines triples : $\lambda_r = 0$ et $\lambda_r = -\frac{1}{2}a$. Substitution de la première racine dans eq. (14) donne $a\omega^2 = ck^2$ qui par report dans eqs (12b) permet d'obtenir l'expression suivante pour la vitesse de phase du milieu total :

$$c_f = \sqrt{\frac{E^{tan} + \alpha^2 Q}{\rho_s + \rho_f}} \quad [17]$$

qui est identique à celle obtenue pour l'analyse conduite sur les équations réduites [ABE 06]. La seconde vitesse de phase s'obtient par substitution de la seconde racine indépendante $\lambda_r = -\frac{1}{2}a$ dans eq. (14). On obtient : $c_f = \sqrt{(b - c/a) - (a/2k)^2}$. Lorsque $k \rightarrow 0$ cette expression devient imaginaire et les harmoniques ayant un petit nombre d'onde ne peuvent plus se propager. Le nombre d'onde limite au-dessous duquel les harmoniques ne peuvent plus se propager est $k = \sqrt{a^3/(ab - c)}$. Ce résultat est semblable aux cas de modèles de plasticité à gradient d'ordre supérieur.

Pour l'étude à la limite du domaine des longueurs d'ondes courtes, $k \rightarrow \infty$, nous supposons que le coefficient d'amortissement à la forme $\lambda_r \sim -k^n, n > 1$. Substitution dans eq. (15) et $k \rightarrow \infty$ conduit à $c_f \rightarrow k^{n-1}$. Par analogie avec un milieu uni-phasique visqueux [SLU 92] une longueur interne l peut être définie :

$$l = \lim_{k \rightarrow \infty} \left(-\frac{c_f}{\lambda_r} \right) \sim \lim_{k \rightarrow \infty} k^{-1} = 0 \quad [18]$$

Mais cette longueur interne tend vers zéro lorsque $k \rightarrow \infty$. Ce résultat est à nouveau en accord avec l'analyse conduite sur les équations réduites [ABE 06].

La figure 1 présente les résultats numériques pour une barre constituée par un matériau poreux saturé soumise à un choc à son extrémité gauche. Après réflexion sur la frontière de droite, l'intensité des contraintes double, l'état de contrainte dans la barre dépasse la contrainte limite du matériau dont le comportement devient adoucissant. On observera que la distribution des déformations de type Dirac se développe immédiatement après réflexion de l'onde. Ceci prouve le changement local de caractère des équations du problème aux limites qui de hyperboliques, ce qui est normal dans le cas de la propagation des ondes, deviennent elliptiques, impliquant l'apparition d'une onde stationnaire. Pour consolider cette observation, l'analyse est répétée avec un maillage raffiné à 25%, faisant apparaître une augmentation notable de la zone de localisation des déformations Figure 1. On notera que pour les calculs dynamiques et sans régularisation des milieux adoucissants, les discrétisations spatiale et temporelle influencent fortement les résultats [BEN 03, ABE 06].

4. Discussion

L'observation que pour un milieu saturé par un fluide, la longueur interne tend vers zéro à la limite du domaine des longueurs d'ondes courtes est différente des résultats trouvés pour les milieux visqueux uni-phasique [SLU 92]. Lors des simulations numériques, l'absence d'une longueur interne qui ne tende pas vers zéro a pour conséquence

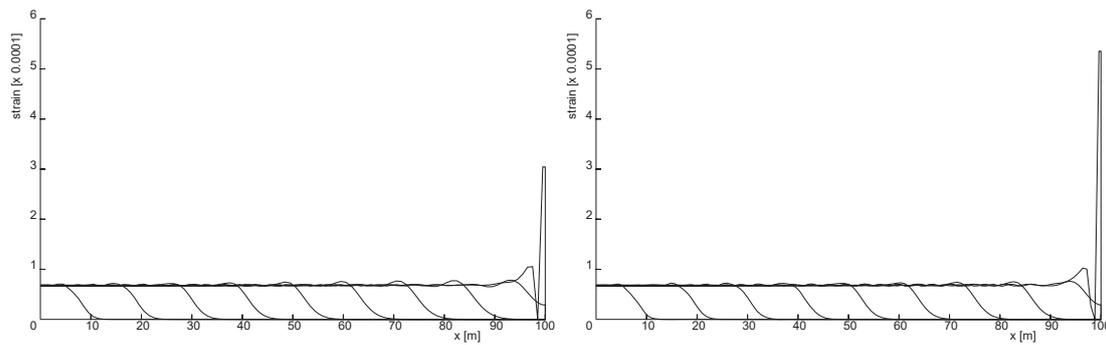


Figure 1. Déformations : maillage de 101 noeuds (gauche) et 126 noeuds (droite)

que la taille des éléments finis joue le rôle de cette longueur interne manquante. De ce fait, la localisation des déformations se développe nécessairement entre deux noeuds voisins du maillage. Evidemment ceci entraîne une forte dépendance de la solution vis à vis du maillage, comme cela est le cas pour le milieu continu solide uni-phasique adoucissant associé. Il est possible d'introduire une forme de régularisation lors de l'étude des milieux biphasiques mais ceci nécessite la prise en compte d'un comportement visqueux ou d'une loi de comportement à gradient d'ordre supérieur pour rendre compte du comportement de la phase solide du milieu biphasiques ou bien d'introduire dans le modèle l'effet des rotations des grains.

5. Bibliographie

- [ABE 06] ABELLAN M.-A., DE BORST R., « Wave propagation and localisation in a softening two-phase medium », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 195, 2006, p. 5011-5019.
- [BEN 03] BENALLAL A., COMI C., « On numerical analyses in the presence of unstable saturated porous materials », *Int. J. for Numerical Methods in Engineering*, vol. 56, 2003, p. 883-910.
- [BOR 04] DE BORST R., « Damage, material instabilities, and failure », *Encyclopedia of Computational Mechanics*, Stein E., de Borst R. and Hughes T.J.R. (eds), Wiley, Chichester, 2004, vol. 2, ch. 10.
- [RIZ 99] RIZZI E., LORET B., « Strain-localization in fluid-saturated anisotropic elastic-plastic porous media », *Int. J. of Engineering Science*, vol. 37, 1997, p. 235-251.
- [SCH 96] SCHREFLER B.A., SANAVIA L., MAJORANA C.E., « A multiphase medium model for localisation and post-localisation simulation in geomaterials », *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, vol. 1, 1996, p. 95-114.
- [SLU 92] SLUYS L.J., DE BORST R., « Wave propagation and localisation in a rate-dependent cracked medium – Model formulation and one-dimensional examples », *Int. J. of Solids and Structures*, vol. 29, 1992, p. 2945-2958.
- [ZHA 99] ZHANG, H.W., SANAVIA L., SCHREFLER B.A., « An internal length scale in dynamic strain localisation of multiphase porous media », *Mechanics of Cohesive-frictional Materials*, vol. 4, 1999, p. 445-460.