



**HAL**  
open science

## Application de la méthode XFEM aux plaques fissurées en flexion

Jérémie Lasry, Julien Pommier, Yves Renard, Michel Salaün

► **To cite this version:**

Jérémie Lasry, Julien Pommier, Yves Renard, Michel Salaün. Application de la méthode XFEM aux plaques fissurées en flexion. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01507574

**HAL Id: hal-01507574**

**<https://hal.science/hal-01507574>**

Submitted on 13 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Application de la méthode XFEM aux plaques fissurées en flexion

**J. Lasry\*<sup>1</sup> - J. Pommier\* - Y. Renard\*\* - M. Salaün\*\*\***

*\* Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, INSA de Toulouse  
135 avenue de Rangueil, 31077 Toulouse Cedex 4*

*<sup>1</sup> : j\_lasry@insa-toulouse.fr*

*\*\* Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon  
20 rue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex*

*\*\*\* ENSICA, Département de Génie Mécanique  
1 place Emile Blouin, 31056 Toulouse Cedex 5*

---

*RÉSUMÉ. Dans cet article nous étudions les possibilités d'application de la méthode des éléments finis étendue (XFEM) au cas des plaques minces fissurées en flexion. Nous supposons le matériau homogène isotrope et la fissure traversante. La déformation de la plaque est régie par le modèle de Kirchhoff-Love, pour lequel on utilise l'élément triangulaire HCT réduit ou son équivalent en quadrangle. Deux stratégies d'enrichissement sont présentées : ajout, dans une zone fixe, des singularités de fond de fissure soit sur tous les nœuds de cette zone, soit de façon globale avec raccord intégral à la frontière de la zone d'enrichissement. Des tests numériques montrent que la méthode conduit à une précision optimale, dans le sens où l'ordre de convergence de l'erreur numérique est comparable à celui d'une méthode d'éléments finis classique sur un problème régulier.*

*ABSTRACT. In this paper, the eXtended Finite Element Method is applied to the bending of thin plates with a through-the-thickness crack. The material is assumed to be homogeneous and isotropic. The plate is modelled with the Kirchhoff-Love theory, and uses the reduced HCT triangular element, or the corresponding quadrilateral. Two enrichment strategies are presented : adding the crack tip singularities on a fixed area, first on each node inside this area, second in a global way with integral matching along its boundary. Some numerical tests show that an optimal accuracy is reached, in the sense that the rate of convergence is similar to what could be obtained for a regular problem.*

*MOTS-CLÉS : plaques minces, modèles de Kirchhoff-Love et de Mindlin-Reissner, élément HCT réduit, singularités, enrichissement de fond de fissure, raccord intégral, erreur numérique, taux de convergence.*

*KEYWORDS: thin plates, Kirchhoff-Love and Mindlin-Reissner plate theories, reduced HCT element, singularities, crack tip enrichment, integral matching, numerical error, rate of convergence.*

---

## 1. Introduction

La simulation numérique de la propagation des fissures représente un enjeu important pour de nombreux secteurs industriels (aéronautique, spatial, nucléaire...). De plus, c'est un problème complexe sur le plan numérique. Les méthodes d'éléments finis classiques présentent des contraintes importantes de raffinement de maillage en fond de fissure, et de remaillage en cours de propagation, ce qui a pour effet d'augmenter le temps de calcul et de dégrader la précision des résultats. La méthode des éléments finis étendue, désignée par le sigle XFEM (Moës et al., 1999), propose une alternative prometteuse et fait actuellement l'objet de nombreux travaux. La caractéristique principale de cette méthode est de représenter la fissure indépendamment du maillage, en rajoutant, dans la base éléments finis, des fonctions prenant en compte la discontinuité des déplacements le long de la fissure ainsi que la forme asymptotique des déplacements singuliers en fond de fissure.

L'objectif de ce travail est la recherche de stratégies optimales pour l'extension de la méthode XFEM au cas des plaques minces en flexion, dans le cas d'un matériau homogène isotrope, la fissure étant traversante. En particulier, il est capital que la méthode reste fiable même pour les plaques très minces (en aéronautique, l'épaisseur de peau d'un avion peut descendre à 1.4 mm, pour des panneaux de plusieurs mètres). De plus, on garde comme objectif que le taux de convergence de la méthode doit rester du même ordre que celui d'une méthode d'éléments finis classique sur un problème régulier.

Cependant, l'application de la méthode XFEM aux plaques minces en flexion pose des difficultés spécifiques. Très peu d'articles ont été consacrés à ce sujet ; on citera essentiellement (Dolbow et al., 2000). Le modèle de plaques de Mindlin-Reissner, qui est le plus souvent utilisé pour décrire la déformation d'une plaque en flexion, présente l'inconvénient d'être sujet au problème de verrouillage numérique en cisaillement transverse. Ceci oblige à des traitements spécifiques (sous-intégration en QUAD 4, par exemple) qui ne peuvent être étendus aux fonctions d'enrichissement de la méthode XFEM. Nous reviendrons sur ce point dans la section 2. Pour les enrichissements, nous suivons la méthodologie développée dans (Laborde et al., 2005). Ceci fait l'objet de la section 3, tandis que la dernière section présente quelques résultats numériques.

## 2. Le Modèle de Kirchhoff-Love et l'élément HCT réduit

Comme on l'a signalé plus haut, les traitements spécifiques introduits dans les schémas éléments finis associés au modèle de Mindlin-Reissner ne s'étendent pas facilement aux fonctions d'enrichissement XFEM. Dans l'article (Dolbow et al., 2000), les auteurs, qui utilisent ce modèle avec l'élément MITC 4, soulignent des problèmes de convergence lorsque l'épaisseur devient très faible. Ces difficultés nous ont conduit à envisager l'utilisation du **modèle de Kirchhoff-Love**. Il propose

une description réaliste de la déformation d'une plaque mince. Ses singularités, qui sont celles du bilaplacien, sont connues (Grisvard, 1992). Il n'est pas affecté par le verrouillage numérique, car le terme de cisaillement transverse n'y figure pas. Cependant, il présente l'inconvénient de nécessiter l'utilisation d'un élément fini de classe  $C^1$ , ce qui est considéré généralement comme plus coûteux a priori.

C'est pourquoi nous avons choisi l'**élément triangulaire HCT réduit** (Ciarlet, 1978). Celui-ci s'obtient de la façon suivante : l'élément est découpé en 3 sous-triangles, et les fonctions de base sont des polynômes de degrés 3 sur chacun de ces sous-triangles, avec raccord  $C^1$  sur les arêtes intérieures. De plus, on impose à la dérivée normale d'être affine le long du bord du triangle. De cette manière, les degrés de liberté qui restent sont les deux dérivées premières (les rotations dans le modèle de Kirchhoff-Love) et le déplacement vertical (ou flèche) à chaque nœud. C'est autant que pour les éléments standard du modèle de Mindlin. Pour terminer cette description, indiquons que l'on peut construire un élément quadrangulaire du même type de façon analogue (découpage du quadrangle en 4 sous-triangles), et que le taux de convergence théorique de ces éléments, en norme de l'énergie, est de l'ordre du pas du maillage (Ciarlet, 1978).

### 3. La méthode XFEM

Rappelons que dans la méthode XFEM, la pièce est maillée sans tenir compte de la présence de la fissure, celle-ci étant représentée indépendamment, par exemple par des fonctions level-set. Ensuite la solution est enrichie aux endroits appropriés par des degrés de liberté spécifiques, dont le support est limité. Sur les nœuds situés le long de la fissure, on rajoute des fonctions de forme de la méthode d'éléments finis classique multipliées par une fonction valant -1 et +1 de chaque côté de la fissure. Ces enrichissements permettent de représenter l'ouverture de la plaque. D'autres degrés de liberté (fonctions décrivant les singularités de fond de fissure) sont rajoutés dans une zone circulaire centrée sur le fond de fissure, dont le rayon est indépendant du pas de maillage. Deux stratégies sont possibles pour introduire ces singularités de fond de fissure.

#### 3.1. Ajout de degrés de liberté sur chaque nœud

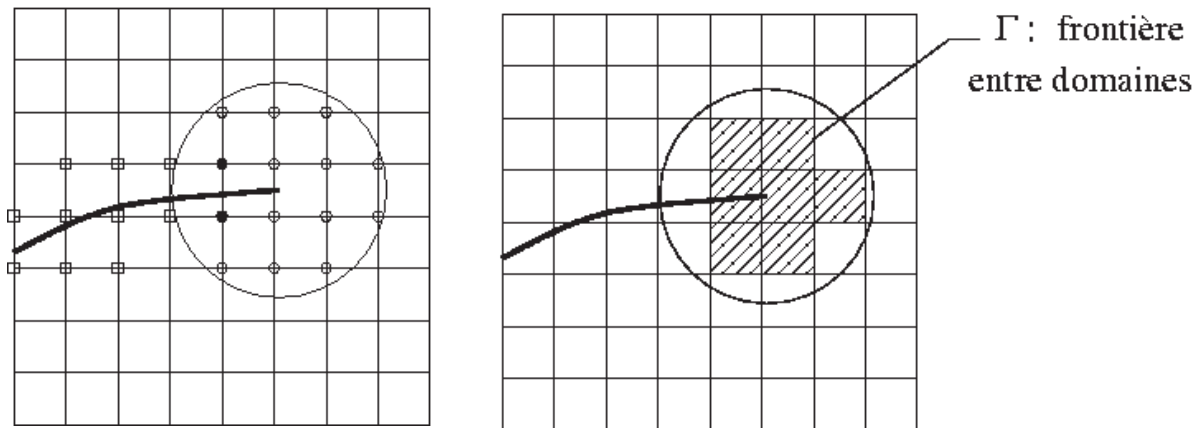
On ajoute sur chaque nœud autant de degrés de liberté qu'il y a de fonctions singulières pour chaque fonction de forme de la base élément fini classique. Ceci a pour effet d'augmenter le nombre total d'inconnues : en HCT réduit, il y a 3 degrés de libertés par nœuds, et 4 fonctions singulières, ce qui fait donc 12 degrés de libertés supplémentaires sur chacun des nœuds situés à l'intérieur de la zone d'enrichissement. Ainsi la fonction d'approximation s'exprime de la manière suivante :

$$u^h = \sum_{i=1}^N a_i \varphi_i + \sum_{j \in I_H} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in I_S} \sum_{l=1}^4 c_{kl} \varphi_k F_l \quad [1]$$

où  $\{\varphi_i\}_{i=1}^N$  représentent la base élément fini classique (fonctions de forme de l'élément HCT réduit). Les 4 fonctions  $\{F_l\}_{l=1}^4$  sont les singularités du modèle de Kirchhoff-Love. On les trouve dans (Grisvard, 1992), et leur expression peut être développée sur la base suivante (en coordonnées polaires) :

$$r^{3/2} \sin \frac{3}{2} \theta ; r^{3/2} \cos \frac{3}{2} \theta ; r^{3/2} \sin \frac{1}{2} \theta ; r^{3/2} \cos \frac{1}{2} \theta \quad [2]$$

L'ensemble  $I_H$  représente les indices des degrés de liberté enrichis pour représenter le saut du déplacement le long de la fissure. Tous les nœuds dont les fonctions de base associées ont le support complètement traversé par la fissure, font partie de cet ensemble. Enfin,  $I_S$  représente les indices des nœuds inclus dans la zone d'enrichissement (voir figure 1, à gauche).



**Figure 1.** A gauche, localisation des nœuds enrichis : par la fonction  $H$  (carrés), les singularités (cercles), et les deux (points noirs). A droite, les deux sous-domaines : la zone enrichie par les singularités est hachurée.

### 3.2. Singularités globales avec raccord intégral (Mortar)

La stratégie précédente présente certains inconvénients. Le nombre de degrés de liberté ajoutés dans la zone de fond de fissure est important : le nombre d'inconnues dans cette zone est multiplié par 12. De plus, le conditionnement du système linéaire augmente significativement comme nous l'avons observé numériquement. En s'inspirant de (Laborde et al., 2005), on introduit une méthode dans laquelle les singularités de fond de fissure sont incluses dans la base de manière globale. La plaque est partitionnée en 2 sous-domaines (voir figure 1). Le premier est formé de l'ensemble des éléments entièrement inclus dans la zone d'enrichissement, le second est formé par tous les autres éléments. Alors l'expression de la solution dans la zone d'enrichissement vaut :

$$v^h = \sum_{i \in N^v} a_i \varphi_i + \sum_{j \in I_H^v} b_j H \varphi_j + \sum_{k=1}^4 c_k F_k \quad [3]$$

Dans cette expression, les ensemble  $N^v$  et  $I_H^v$  désignent les nœuds appartenant à la fois aux ensembles  $N$  et  $I_H$  et aux éléments entièrement inclus dans la zone d'enrichissement. Sur les autres éléments, la solution s'exprime par :

$$w^h = \sum_{i \in N^w} a_i \varphi_i + \sum_{j \in I_H^w} b_j H \varphi_j \quad [4]$$

De la même manière, les ensembles  $N^w$  et  $I_H^w$  désignent les nœuds appartenant à la fois aux ensembles  $N$  et  $I_H$  et aux éléments qui ne sont pas inclus dans la zone d'enrichissement. Ainsi on peut constater que les nœuds situés à la frontière entre les 2 sous-domaines, notée  $\Gamma$  (voir figure 1), sont dupliqués. On impose donc une condition de raccord au sens faible entre les fonctions  $v^h$  et  $w^h$  :

$$\int_{\Gamma} \left[ (v^h - w^h) \lambda + \partial_n (v^h - w^h) \partial_n \lambda \right] d\Gamma = 0 \quad \forall \lambda \in \Lambda \quad [5]$$

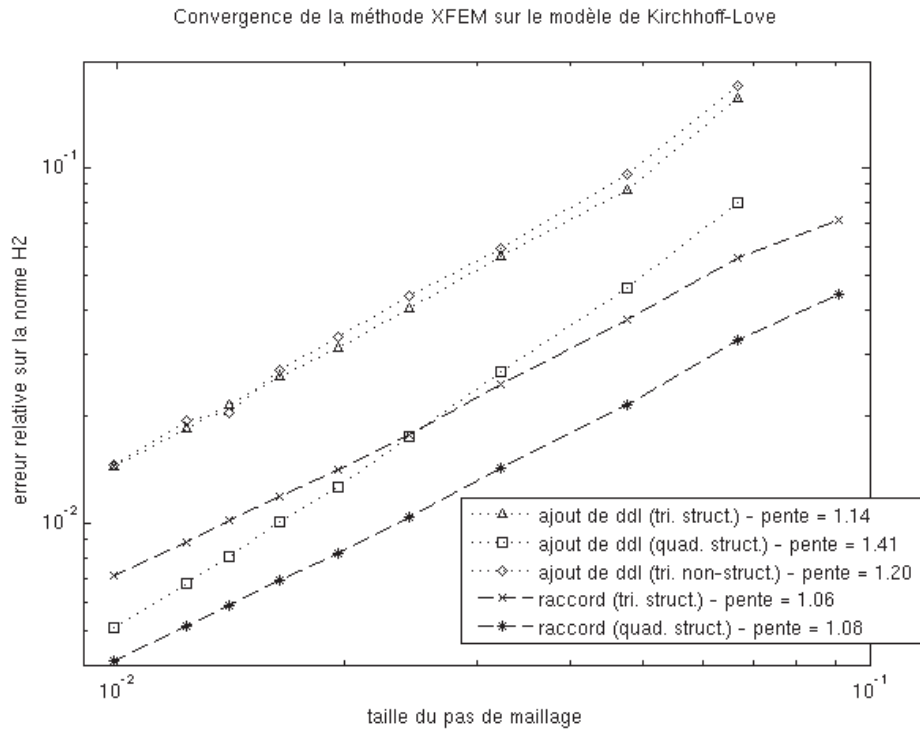
où  $\Lambda$  désigne un espace de multiplicateurs. Pour les tests numériques nous avons choisi la restriction sur  $\Gamma$  des fonctions de base de l'élément HCT réduit (enrichies par la fonction  $H$  pour les éléments coupés par la fissure).

#### 4. Etude de convergence et conclusion

La méthode a été implémentée dans la bibliothèque Getfem++ (Renard et al.). Une première étude de convergence avec des éléments triangulaires et quadrangulaires a été effectuée, avec les deux stratégies d'enrichissement, sur un cas-test (plaque carrée unitaire fissurée) pour lequel la solution exacte est connue (combinaison linéaire de certaines singularités). Le rayon de la zone d'enrichissement vaut 0.15. La figure 2 donne l'erreur commise relativement à la solution exacte, pour différentes valeurs du pas de maillage, en norme de l'énergie.

On peut voir que l'objectif est atteint pour notre cas-test, puisque les taux de convergence atteignent tous 1. On remarquera que le taux de convergence est plus élevé en quadrangles structurés dans le cas de la première stratégie (1.41), qui s'explique sans doute par un phénomène de super-convergence, et que la deuxième stratégie d'enrichissement (fonction globale et raccord intégral) conduit à un niveau d'erreur plus faible que la première, même si les ordres de convergences sont légèrement inférieurs.

Enfin, ce travail présente une autre perspective intéressante. Sachant que les modèles de Kirchhoff-Love et de Mindlin-Reissner donnent des résultats proches en plaques minces et que les éléments HCT réduits portent aussi 3 degrés de liberté par nœuds, nous envisageons de tester une méthode numérique hybride, où la zone d'enrichissement utiliserait le modèle de Kirchhoff-Love avec la modélisation XFEM que nous proposons, et serait raccordée avec le reste de la plaque qui utiliserait le modèle de Mindlin-Reissner.



**Figure 2.** Courbes de convergence (en norme de l'énergie) pour la méthode XFEM.

## Remerciements

Cette étude a été menée dans le cadre d'un contrat co-financé par Airbus et le CNRS. Nous remercions en particulier Marc Balzano (Airbus France) et Patrick Laborde (Université Toulouse III) pour l'intérêt et le soutien qu'ils ont témoigné.

## 6. Bibliographie

- Ciarlet P.G., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, 1978.
- Dolbow J., Moës N., Belytschko T., « Modeling fracture in Mindlin-Reissner plates with the extended finite element method », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 37, 2000, p. 7161-7183.
- Grisvard P., *Singularities in boundary value problems*, Masson, 1992.
- Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., « High order extended finite element method for cracked domains », *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 64, 2005, p. 354-381.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Method in Engineering*, vol. 46, 1999, p. 131-150.
- Renard Y., Pommier J., *Getfem++*, an open source generic C++ library for finite element methods, <http://www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem>.