



HAL
open science

Application de la méthode des éléments finis étendus à la simulation de la rupture pour les matériaux piezoélectriques

Eric Béchet, Matthias Scherzer, Meinhard Kuna

► To cite this version:

Eric Béchet, Matthias Scherzer, Meinhard Kuna. Application de la méthode des éléments finis étendus à la simulation de la rupture pour les matériaux piezoélectriques. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01507573

HAL Id: hal-01507573

<https://hal.science/hal-01507573v1>

Submitted on 13 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Application de la méthode des éléments finis étendus à la simulation de la rupture pour les matériaux piézoélectriques

Etude de différents enrichissements et convergence

Eric Béchet* **Matthias Scherzer**** **Meinhard Kuna****

* *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, Université de Metz, UMR CNRS 7554, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex 1, France*

** *Institut für Mechanik und Fluidodynamik, TU Bergakademie Freiberg, Lampadiusstrasse 4, 09596 Freiberg, Germany*

RÉSUMÉ. Nous présentons une application de la méthode X-FEM pour la fracture des matériaux piézoélectriques. Ces matériaux sont communément utilisés dans des actuateurs et senseurs. De nouvelles applications sont envisagées en association avec des matériaux composites comme les ailes d'avion déformables ou actives. Sous un chargement cyclique, des phénomènes d'amorce de fissure et de propagation peuvent se produire. Depuis quelques années, la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a été appliquée avec succès majoritairement dans la simulation de la rupture de matériaux fragiles. Nous proposons dans le présent article une étude des fonctions d'enrichissement afin de prendre en compte les champs asymptotiques en pointe de fissure particuliers aux matériaux piézoélectriques.

ABSTRACT. We present an application of the X-FEM to the fracture of piezoelectric materials. These materials are commonly used in actuators and controls. New applications can be found in association with composites as deformable airplane wings. Under cyclic loading, phenomena of crack initiation and propagation may occur. In the past few years, the extended finite element method (X-FEM) has been applied mostly to model cracks in fragile materials (mainly steel alloys). The present paper focuses on the definition of new enrichment functions for the specific asymptotic crack behaviour of piezoelectric materials.

MOTS-CLÉS : méthode des éléments finis, X-FEM, matériaux piézoélectriques, enrichissement, convergence

KEYWORDS: finite element method, X-FEM, piezoelectric materials, enrichment, convergence

1. Introduction

La méthode des éléments finis étendus (Moës *et al.*, 1999) a été originellement conçue pour la propagation de fissures dans les matériaux élastiques isotropes. En association avec les courbes de niveau (Osher *et al.*, 1988) comme moyen de représenter la géométrie de la fissure, c'est un outil puissant afin de se passer du maillage contraint nécessaire avec des techniques conventionnelles. Sous certaines circonstances, cette méthode permet de récupérer les ordres de convergence habituels de l'erreur en énergie y compris pour un domaine fissuré (Bechet *et al.*, 2005, Laborde *et al.*, 2005). Les matériaux piézoélectriques ont un comportement isotrope transverse et un couplage entre les variables mécaniques et électriques. Cela induit des champs en pointe de fissure particuliers et la présence de singularités y compris dans le champ électrique (Scherzer *et al.*, 2004). Pour traiter ces problèmes dans X-FEM, des outils spécifiques sont développés ainsi que de nouvelles fonctions d'enrichissement.

2. Modèle piézoélectrique

Le domaine fissuré est noté Ω et est soumis à des conditions aux limites. Les lèvres de la fissure sont supposées sans tractions et électriquement imperméables. Le tenseur des contraintes de Cauchy σ et le déplacement électrique D satisfont les équations d'équilibre:

$$\begin{cases} \sigma_{ij,j} = 0 \\ D_{j,j} = 0 \end{cases} \quad \text{in } \Omega \quad [1]$$

Les déformations et le champ électrique, ainsi que les lois constitutives sont définies par:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad [2]$$

$$E_j = -\varphi_{,i} \quad [3]$$

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - e_{kij}E_k \quad [4]$$

$$D_i = e_{kij}\varepsilon_{kl} + \kappa_{ik}E_k \quad [5]$$

, où c_{ijkl} est le tenseur d'élasticité de Hooke, κ_{ij} est le tenseur diélectrique et e_{ijk} est le tenseur piézoélectrique.

3. La formulation X-FEM classique

L'idée des méthodes de partition de l'unité (PUM) (Babuska *et al.*, 1997) est d'enrichir un champ d'approximation provenant des éléments finis classiques avec des fonctions qui sont capables de décrire un comportement particulier que les éléments finis classiques peinent à représenter correctement.

3.1. Description de la fissure

La fissure est représentée par une paire de courbes de niveau qui sont interpolées sur le même maillage que celui utilisé pour le calcul proprement dit. Dans la suite, les coordonnées polaires locales qui sont introduites (r et θ) sont calculées à partir des valeurs des courbes de niveau lsn et lst dans le voisinage de la fissure.

3.2. Fonctions d'enrichissement

Les fonctions d'enrichissement "classiques" utilisées pour les matériaux élastiques dérivent de la solution exacte pour une fissure semi-infinie dans un domaine infini.

Il y a quatre fonctions d'enrichissement de base pour représenter totalement le champ de Westergaard en pointe de fissure (Bui, 1978, Belytschko *et al.*, 1999):

$$g_i^e(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\} \quad [6]$$

Seuls les éléments dans le voisinage de la pointe de fissure sont enrichis avec ces fonctions. Le long des lèvres de la fissure, la fonction d'enrichissement est (Moës *et al.*, 1999):

$$h(d) = \begin{cases} +1 & \text{si } d \geq 0, \\ -1 & \text{si } d < 0. \end{cases} \quad [7]$$

Ici; d est la distance signée calculée normalement aux lèvres de la fissure. Dans le reste du domaine, les éléments finis conventionnels s'appliquent. Le champ d'approximation résultant est :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in R} \mathbf{N}_i \alpha_i + \sum_{i \in T} \sum_{j=1 \dots 4} \mathbf{N}_i g_j^e \beta_{ij} + \sum_{i \in H} \mathbf{N}_i h \gamma_i. \quad [8]$$

4. Nouvelles fonctions d'enrichissement pour les matériaux piézoélectriques

Pour les piézos, il est nécessaire d'utiliser six fonctions pour décrire tous les états possibles en pointe de fissure, à l'opposé des quatre fonctions du cas isotrope élastique. Celles ci sont :

$$g_i^p(r, \theta) = \left\{ \sqrt{r} f_1(\theta), \sqrt{r} f_2(\theta), \sqrt{r} f_3(\theta), \sqrt{r} f_4(\theta), \sqrt{r} f_5(\theta), \sqrt{r} f_6(\theta) \right\} \quad [9]$$

où :

$$\begin{aligned} f_i(\theta) &= \phi(\omega(\theta, \alpha), a_{i,re}, a_{i,im}) \\ &= \begin{cases} \rho(\omega, a_{i,re}, a_{i,im}) \cos \frac{\psi(\omega, a_{i,re}, a_{i,im})}{2} & \text{si } a_{i,im} > 0 \\ \rho(\omega, a_{i,re}, a_{i,im}) \sin \frac{\psi(\omega, a_{i,re}, a_{i,im})}{2} & \text{si } a_{i,im} \leq 0 \end{cases} \quad [10] \end{aligned}$$

Les nombres complexes $a_i = a_{i,re} + i a_{i,im}$ sont les six racines de l'équation caractéristique, et α est l'orientation des axes matériels par rapport à la fissure. Les angles ω et ψ ainsi que le rayon modifié ρ ont la forme suivante :

$$\omega = \theta - \alpha \quad [11]$$

$$\rho(\omega, a_{i,re}, a_{i,im}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{a_{i,re}^2 + a_{i,im}^2 + a_{i,re} \sin 2\omega - (a_{i,re}^2 + a_{i,im}^2 - 1) \cos 2\omega} \quad [12]$$

$$\begin{aligned} \psi(\omega, a_{i,re}, a_{i,im}) &= \frac{\pi}{2} + \pi \text{int} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \\ &- \tan^{-1} \left(\frac{\cos \left(\omega - \pi \text{int} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \right) + a_{i,re} \sin \left(\omega - \pi \text{int} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \right)}{|a_{i,im}| \sin \left(\omega - \pi \text{int} \left(\frac{\omega}{\pi} \right) \right)} \right) \end{aligned} \quad [13]$$

De plus, on utilise la même fonction saut que dans le cas élastique isotrope afin de représenter les discontinuités le long de la fissure. Cet ensemble de fonctions d'enrichissement est combiné avec la base classique des éléments finis pour obtenir l'espace d'approximation pour les déplacements \mathbf{u} et le potentiel φ :

$$\mathbf{u}^h = \sum_{i \in R} \mathbf{N}_i \alpha_i + \sum_{i \in T} \sum_{j=1 \dots 6} \mathbf{N}_i g_j^p \beta_{ij} + \sum_{i \in H} \mathbf{N}_i h \gamma_i \quad [14]$$

$$\varphi^h = \sum_{i \in R} N_i \zeta_i + \sum_{i \in T} \sum_{j=1 \dots 6} N_i g_j^p \eta_{ij} + \sum_{i \in H} N_i h \xi_i \quad [15]$$

Il est bon de noter que les mêmes fonctions d'enrichissement sont utilisées pour les déplacements et le potentiel électrique.

5. Etude de convergence avec la norme en énergie

La convergence est étudiée en comparant des solutions exactes connues pour un problème de référence avec les résultats de calculs approchés. L'erreur sur la norme en énergie (totale) \mathbf{U} est donnée par :

$$err_U = \sqrt{\frac{1}{2} \int c_{ijkl} (\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^{ex}) (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^{ex}) + \kappa_{ij} (E_i - E_i^{ex}) (E_j - E_j^{ex}) dV} \quad [16]$$

, où ε_{ij}^{ex} et E_j^{ex} sont des champs exacts pour le problème considéré (dans notre cas, une fissure inclinée dans un domaine infini). Des conditions aux limites équivalentes sont imposées sur les bords du domaine afin de simuler un domaine infini. Les axes

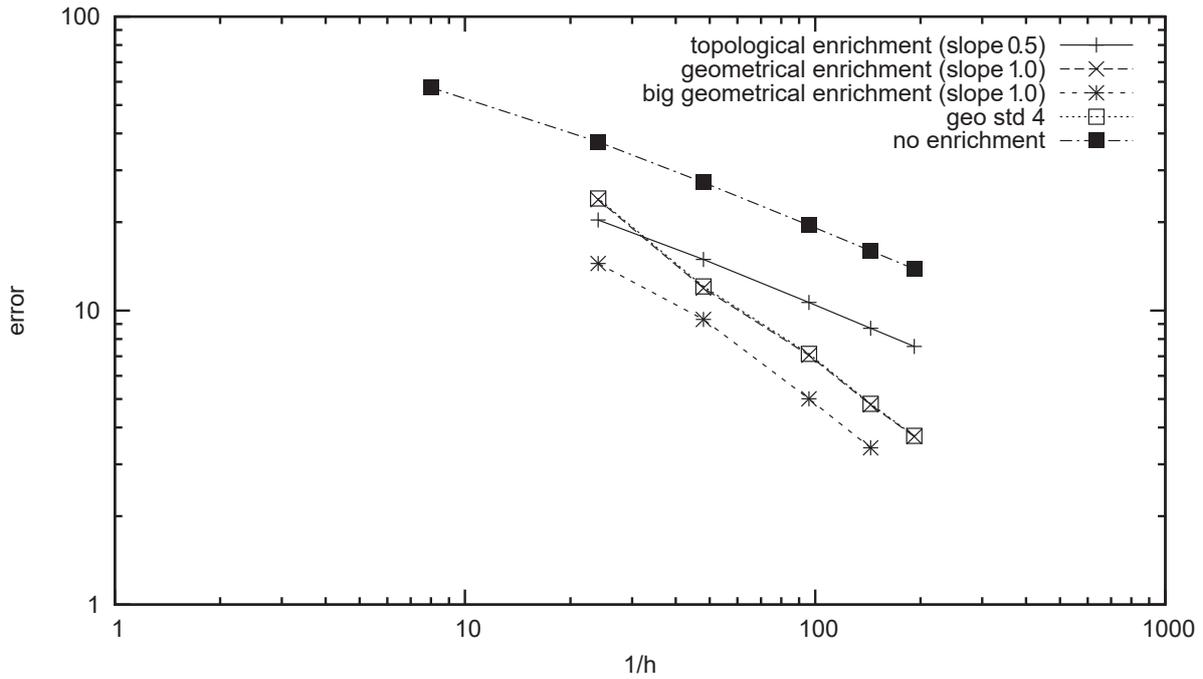


Figure 1. Convergence pour différentes stratégies d'enrichissement

matériels sont orientés à 30 degrés par rapport au plan de fissure pour plus de généralité. Nous avons effectué cinq ensembles de simulations avec diverses stratégies d'enrichissement (enrichissement topologique, géométrique, avec les 4 fonctions classiques ou les 6 fonctions spécifiques, et sans enrichissement). La figure 1 montre la relation entre la densité de maillage et l'erreur dans une échelle log-log. Ce que nous voulons montrer ici est la performance relative de : a) un enrichissement topologique par rapport à un enrichissement géométrique et b) un enrichissement avec les 6 fonctions spécifiques et l'utilisation naïve des 4 fonctions habituelles. Sur la figure 1, le taux de convergence pour les enrichissements géométriques est le double de celui obtenu avec un enrichissement topologique. C'est quelque chose d'attendu (Bechet *et al.*, 2005, Laborde *et al.*, 2005), quand l'enrichissement représente bien la physique. Ici, les six fonctions d'enrichissement font leur travail et permettent de retrouver l'ordre de convergence optimal. En comparant les résultats entre l'enrichissement avec 4 fonctions et celui avec 6 on constate une superposition quasi-parfaite des courbes. Cela signifie que l'enrichissement "naïf" est suffisamment riche pour représenter correctement les champs pour le matériau piézoélectrique à ce niveau de détail. Bien que cela soit surprenant, il faut noter que les piézos sont assez faiblement anisotropes, ainsi que le couplage électromécanique. Ce n'est pas une mauvaise nouvelle puisque cela signifie que l'on peut faire des simulations piézoélectriques fiables en utilisant l'enrichissement provenant de l'élasticité linéaire classique, qui est bien plus simple.

6. Conclusion

Dans cet article nous avons étudié la performance relative de deux stratégies d'enrichissement pour les matériaux piézoélectriques. On montre que l'enrichissement classique provenant de l'élasticité linéaire isotrope est suffisant pour décrire la cinématique d'une fissure dans un matériau piézoélectrique. Cela peut provenir du fait qu'ils sont habituellement faiblement anisotropes et peu couplés. Des recherches complémentaires sont nécessaires pour d'autres classes de matériaux présentant une plus grande anisotropie tels que les composites à matrice polymère.

7. Bibliographie

- Babuska I., Melenk J., « The partition of unity method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, p. 727-758, 1997.
- Bechet E., Minnebo H., Moës N., Burgardt B., « Convergence and conditioning issues with X-FEM in fracture mechanics », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, p. 1033-1056, 2005.
- Belytschko T., Black T., « Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, p. 601-620, 1999.
- Bui H., *Mécanique de la rupture fragile*, Masson, Paris, 1978.
- Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., « High order extended finite element method for cracked domains », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 64, p. 354-381, 2005.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Osher S., Sethian J., « Fronts propagating with curvature-dependent speed: algorithms based on Hamilton-Jacobi formulations », *Journal of Computational Physics*, vol. 79, p. 12-49, 1988.
- Scherzer M., Kuna M., « Combined analytical and numerical solution of 2D interface corner configurations between dissimilar piezoelectric materials », *International Journal of Fracture*, vol. 127, p. 61-99, 2004.