



**HAL**  
open science

## Grains de foules

Bertrand Maury

► **To cite this version:**

| Bertrand Maury. Grains de foules. 2017. hal-01505029

**HAL Id: hal-01505029**

**<https://hal.science/hal-01505029v1>**

Submitted on 14 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

## Grains de foules

B. MAURY

LMO, Université Paris-Sud  
& DMA, École Normale Supérieure de Paris

Nous nous proposons de montrer comment l'élaboration de modèles de mouvements de foules (destinés à décrire par exemple l'évacuation d'un bâtiment) conduit à des questions délicates sur les liens entre la description microscopique (et nativement lagrangienne) de systèmes de particules de type sphères dures et la description à l'échelle macroscopique de tels systèmes. Nous nous intéresserons plus précisément à la description lagrangienne du mouvement d'une collection de disques rigides sans recouvrement, en détaillant la prise en compte de cette contrainte de non recouvrement dans l'évolution de la population. Le pendant macroscopique de cette situation consiste à considérer un continuum de matière (ou de "gens" dans le cas de foules) décrit par une densité assujettie à rester en dessous d'une valeur maximale prescrite. A l'échelle macroscopique, le cadre du transport optimal, et la métrique de Wasserstein associée, permettent de conserver au moins partiellement le caractère lagrangien de la description et de transposer au niveau macroscopique des résultats classiques portant sur le système microscopique. Mais cette transposition, si elle permet d'établir un dictionnaire formel assez complet entre les deux niveaux de description, cache un certain nombre de différences profondes, dont certaines ont des conséquences importantes sur le comportement des modèles.

**Back to seventies**

Le processus de raffle, introduit par J.J. Moreau [Mor77] il y a une quarantaine d'année, peut s'exprimer de façon très générale comme suit : on considère une famille  $(K(t))_t$  de sous-ensembles d'un espace métrique, et l'on cherche à caractériser le mouvement  $t \mapsto q(t)$  d'un point obéissant aux principes suivants :

1. bouger le moins possible,
2. appartenir à  $K(t)$  à chaque instant.

Dans le cas étudié initialement par Moreau d'un espace de Hilbert  $H$  et d'une famille de convexes fermés, cette évolution prend la forme d'une inclusion différentielle, que l'on peut obtenir à partir d'une version discrétisée en temps du principe d'évolution (algorithme dit de rattrapage, ou *catching-up*). On se donne un pas de temps  $\tau > 0$ , on note  $q^n$  une approximation de la position au temps  $n\tau$ , et l'on construit une suite de positions successives en projetant la position courante sur l'ensemble admissible au pas de temps suivant :

$$q^{n+1} = P_{K((n+1)\tau)}(q^n).$$

La notion de sous-différentiel, qui généralise la notion de gradient pour des fonctions convexes non lisses, permet d'exprimer cette identité sous la forme d'une inclusion. Pour toute fonction convexe  $\Psi$  de  $H$  dans  $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ , on définit

$$\partial\Psi(q) = \{v, \Psi(q) + v \cdot h \leq \Psi(q+h) \ \forall h\}. \quad (1)$$

Dans le cas où  $\Psi$  est la fonction indicatrice  $I_K$  d'un convexe fermé  $K$  (qui vaut 0 en tout point dans  $K$ ,  $+\infty$  à l'extérieur), le sous-différentiel s'identifie au cône normal sortant à  $K$  pour tout point de la frontière, qui peut s'écrire

$$\partial I_K(q) = \{q' - q, \ q = P_K(q')\}.$$

La figure 1 représente ce cône normal sortant dans différentes situations : lorsque le point est intérieur,

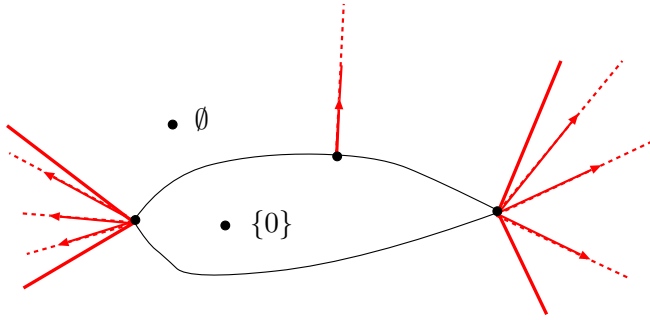


FIGURE 1 – Cône normal sortant d’un convexe fermé

l’ensemble est réduit au singleton nul ; il est vide pour tout point n’appartenant pas à  $K$  ; pour tout point de la frontière on obtient la demie droite des directions normales sortantes dans le cas lisse, et un cône fermé non trivial dans le cas d’un point anguleux. On vérifie ainsi immédiatement que l’étape de projection ci-dessus est équivalente à la condition

$$\frac{q^{n+1} - q^n}{\tau} \in -\partial I_{K((n+1)\tau)}(q^{n+1}),$$

qui peut s’interpréter comme la discrétisation en temps (implicite) de l’inclusion

$$\frac{dq}{dt} \in -\partial I_{K(t)}(q).$$

C’est sous cette forme que le processus de raffle a été initialement introduit. Une interprétation imagée, proposée par Moreau lui-même, est la suivante : on identifie le temps à la variable verticale de l’espace physique, on considère que  $K(t)$  correspond à la section variable d’un conduit qui s’enfonce dans le sol, et  $q(t)$  représente la position (projetée sur le plan horizontal) d’un filet d’eau qui s’écoule sous l’action de la gravité, en glissant selon la ligne de plus grande pente lorsqu’il se trouve en contact avec les parois latérales (voir

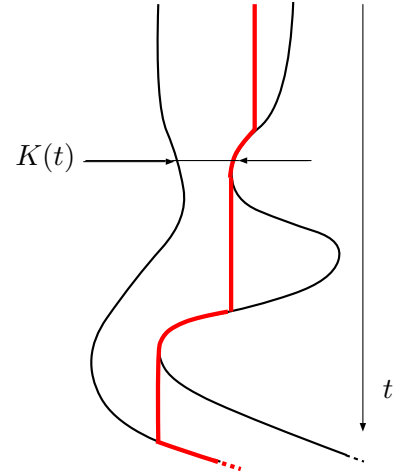


FIGURE 2 – Chute d’un filet d’eau

figure 2). Dans le cas où  $H$  est un espace de Hilbert général, un petit effort d’imagination permettra de se représenter la famille  $(K(t))$  comme un puits de spéléologie creusé dans  $H \times \mathbb{R}^+$ , et la trajectoire recherchée comme un filet d’eau issu d’une source ponctuelle à l’entrée du puits, en  $(q(0), 0)$ , s’écoulant sous l’action de la “gravité”  $(0_H, 1)$ .

De nombreux travaux ont étendu cette démarche à des situations plus générales. Nous nous intéresserons ici plus particulièrement à la possibilité de supposer le point  $q$  animé d’un mouvement spontané décrit par une vitesse  $U$ . L’algorithme de rattrapage s’adapte immédiatement à cette nouvelle situation dynamique : à chaque étape une première position est prédite sans tenir compte des contraintes, puis projetée sur l’ensemble admissible :

$$\begin{cases} \tilde{q}^{n+1} &= q^n + \tau U^n \\ q^{n+1} &= P_{K((n+1)\tau)}(\tilde{q}^{n+1}) \end{cases} \quad (2)$$

C’est à cette généralisation que nous nous intéresserons par la suite.

### Description microscopique de foules

De façon assez inattendue ce cadre général, motivé initialement par la modélisation de matériaux plastiques, et développé ensuite comme sujet de recherche académique à part entière, s'applique assez directement à la modélisation de mouvements de foules fortement congestionnées. Considérons un ensemble de  $N$  individus représentés par des disques rigides de rayon  $r$ , centrés en des points  $q_1, \dots, q_N$  du plan. Chaque individu est supposé animé d'une vitesse spontanée  $U_i$ . Dans le cas de l'évacuation d'un bâtiment, on prendra par exemple pour  $U_i$  la vitesse que souhaiterait avoir l'individu  $i$  cherchant à sortir au plus vite, s'il était seul. La congestion est prise en compte en interdisant les chevauchements : l'espace des configurations admissibles est

$$K = \{q \in \mathbb{R}^{2N}, |q_j - q_i| \geq 2r \ \forall i \neq j\}.$$

Nous n'écrivons pas explicitement les contraintes liées aux murs, obstacles, etc... pour alléger les notations, mais il est bien sûr possible d'inclure ce type de contraintes dans  $K$ , y compris dans le cas d'une configuration en mouvement (porte qui s'ouvre ou se ferme, ou véhicule évoluant au sein d'une foule dense, par exemple).

L'application du cadre de Moreau à cette situation n'est pas immédiate, car  $K$  n'est pas convexe (si l'on exclut la situation hitchcockienne d'une personne unique dans une pièce convexe close, situation d'un intérêt pratique limité). Mais l'algorithme constructif présenté précédemment ne nécessite qu'une projection bien définie dans un voisinage de  $K$ . L'approche s'étend à des ensembles pour lesquels cette projection est localement bien définie, ensembles appelés prox-réguliers (voir [Thi03]). On peut vérifier dans le cas présent que tout point  $q$  de  $\mathbb{R}^{2N}$  à distance inférieure à un certain  $\eta > 0$  de  $K$  se projette de façon unique sur  $K$ . Prenons

l'exemple de 2 disques de rayon  $r$ , de centres  $q_1$  et  $q_2$  dans  $\mathbb{R}^2$ . Toute configuration avec recouvrement se projette de façon unique sur l'ensemble admissible (sans recouvrement), tant que les centres ne sont pas confondus. Une configuration avec les centres confondus est à distance  $\sqrt{2}r$  de l'ensemble admissible  $K$ . Si l'on restreint la projection à l'ensemble  $K_\eta$  des configurations dont la distance à  $K$  est inférieure à  $\eta < \sqrt{2}r$  (on se tient à distance des configurations à centres confondus), alors la projection est bien définie, il s'agit bien d'un ensemble prox-régulier. On notera que la constante de Lipschitz de cette projection tend vers  $+\infty$  quand  $\eta$  tend vers  $\sqrt{2}r$ . La démonstration est plus technique lorsque le nombre de disques est quelconque, mais on peut établir ce caractère de prox-régularité en toute généralité ([MV11]).

L'algorithme est donc bien défini pour  $\tau$  suffisamment petit, et l'on peut montrer (voir [MV11]) que la suite des trajectoires discrètes converge vers une solution d'une équation de type

$$\frac{dq}{dt} \in -\partial I_K(q) + U, \quad (3)$$

au prix d'une extension de la notion de sous-différentiel à des fonctions indicatrices d'ensembles non convexes. On parle alors de sous-différentiel de Fréchet, en demandant que la condition d'inégalité dans (1) soit vérifiée à un  $o(h)$  près. Précisons que le  $\eta$  intervenant dans la condition de prox-régularité (épaisseur du voisinage de  $K$  dans lequel la projection est bien définie) dégénère, c'est-à-dire tend vers 0, lorsque le nombre de personnes  $N$  tend vers l'infini et leur taille  $r$  tend vers 0.

### Modélisation macroscopique

Les modèles macroscopiques de mouvements de foule sont basés sur une densité de personnes par unité de surface, que nous noterons  $\rho(x, t)$ . La

description est donc eulérienne, contrairement au modèle microscopique précédent qui est lagrangien<sup>1</sup>. L'ingrédient central, comme dans le cas microscopique, est la donnée d'un champ de vitesse souhaitée  $U$ . Du fait du caractère eulérien de la description, nous nous limiterons ici au cas de personnes interchangeables en termes de comportement : le champ  $U$  ne dépend que de la position de la personne. Dans le cas qui nous intéresse de l'évacuation d'une salle (identifiée à un domaine  $\Omega$  du plan), ce champ  $U$  pointe vers une sortie, et tend donc à concentrer les personnes. Nous considérerons que la densité ne peut dépasser une certaine valeur, que nous prendrons égale à 1. On suppose de plus la masse totale de personnes égale à 1, de telle sorte que, pour tout  $t$ ,  $\rho(\cdot, t)$  vit dans  $\mathcal{P}(\Omega)$ , espace des mesures de probabilité sur  $\Omega$ . L'ensemble des densités admissibles est alors (en identifiant la mesure et sa densité associée)

$$\widehat{K} = \{\rho \in \mathcal{P}(\Omega), 0 \leq \rho \leq 1 \text{ p.p.}\}. \quad (4)$$

L'équivalent macroscopique du modèle décrit dans la section précédente s'écrit de façon naturelle en choisissant une vitesse effective de la foule qui minimise la distance (au sens  $L^2$ ) au champ de vitesse souhaitée, en préservant la contrainte d'appartenance à  $\widehat{K}$ . Informellement, cette vitesse ne doit donc pas augmenter la densité lorsque cette dernière est déjà maximale, i.e. la divergence du champ de vitesse doit être positive sur la zone saturée (zone sur laquelle on a  $\rho = 1$ ). Une prise en compte par dualité<sup>2</sup> de cette contrainte conduit à un système introduit par Darcy au milieu du

1. La description *lagrangienne* est basée sur un suivi des entités dans leur mouvement, ainsi  $t \mapsto q_i(t)$  correspond à la position de l'individu  $i$  au cours du temps. A contrario, la description *eulérienne* (qui fonde l'écriture des équations aux dérivées partielles classiques), est basée sur l'observation de l'évolution en temps d'une quantité estimée en un point fixe de l'espace, comme  $t \mapsto \rho(x, t)$  pour  $x$  fixé.

XIX<sup>ème</sup> siècle dans le contexte très différent des écoulements fluides au travers de milieux poreux, de type assemblages statiques de grains rigides.

Il serait trompeur d'attribuer cette analogie à la prise en compte, dans le modèle de Darcy, de cette "matrice" de grains rigides, qui évoque les assemblages introduits précédemment dans la description du modèle microscopique : le système initialement introduit par Darcy décrit à l'échelle mésoscopique l'écoulement d'un fluide visqueux au travers des *pores* du réseau de grains, écoulement qui se produit dans le *complémentaire* de la phase solide ; il ne décrit aucunement le mouvement de l'assemblage de grains, qui reste statique. Ce système s'écrit ici

$$\begin{cases} u + \nabla p = U \\ -\nabla \cdot u \leq 0 \end{cases} \quad (5)$$

dans la zone saturée  $\omega \subset \Omega$ . La pression ci-dessus doit être positive (ce qui traduit le fait que les forces d'interactions ne peuvent être que répulsives), et nulle sur le bord de la zone saturée. Malgré la petite difficulté supplémentaire liée au fait que la contrainte est unilatérale (contrainte d'inégalité sur la divergence), on peut montrer sans difficulté le caractère bien posé de ce problème, qui définit sans ambiguïté la vitesse  $u$  à chaque instant comme projection de la vitesse souhaitée sur le cône des vitesses admissibles. Le problème d'évolution associé prend la forme d'une équation de conservation qui exprime le transport de la densité par la vitesse

2. Précisons, pour le lecteur peu familier avec ces notions, le principe général de l'approche dans le cas plus simple de contraintes d'égalité. Si  $u$  est minimiseur d'une fonctionnelle régulière  $J$  définie sur un espace de Hilbert, sous la contrainte linéaire  $Bu = 0$ , alors la condition d'optimalité implique  $\nabla J \in (\ker B)^\perp$ , d'où (si  $B$  est à image fermée), l'existence d'un  $p$  dans l'image de  $B$  tel que  $\nabla J + B^*p = 0$ . Dans le cas qui nous intéresse ici la fonctionnelle  $J$  est simplement  $\frac{1}{2}|v - U|^2$ , et  $B$  est l'opérateur  $v \mapsto -\nabla \cdot v$ .

effective

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho u(\rho)) = 0,$$

mais la dépendance  $\rho \mapsto u(\rho)$ , en plus d'être non locale, est non lisse. En effet le modèle considéré, qui fait abstraction de toute tendance sociale à ne pas s'approcher de ses voisins, appréhende la foule comme un gaz sans pression : tant que la contrainte n'est pas saturée, i.e. tant que les gens ne sont pas en contact les uns avec les autres, ils n'interagissent pas du tout entre eux. En revanche, dès qu'une zone saturée se crée, des interactions non locales apparaissent, au travers de cette zone saturée. Par ailleurs, la régularité native en espace du champ de vitesse est  $L^2$ , ce qui exclut une utilisation directe des outils classiques pour montrer existence et unicité d'une solution à ce type d'équation.

Montrons que le cadre du transport optimal permet de préserver une part de la description lagrangienne, inhérente au modèle microscopique, et de mettre en place un algorithme constructif du type de (2). Considérons deux mesures de probabilité sur  $\overline{\Omega}$ , supposées admettre des densités  $\mu$  et  $\nu$ . Leur distance de Wasserstein (voir [San15, Vil03]),  $W_2(\mu, \nu)$  est définie par

$$W_2(\mu, \nu)^2 = \inf_{T_{\#}\mu = \nu} \int_{\Omega} |T(x) - x|^2 d\mu(x),$$

où l'infimum est pris sur l'ensemble des applications mesurables qui poussent  $\mu$  vers  $\nu$ , ce qu'on écrira  $T_{\#}\mu = \nu$ .

On peut établir un lien immédiat entre la description macroscopique de densités selon cette métrique et la description lagrangienne d'une collection de disques. À toute collection de  $N$  disques du plan sans recouvrement on peut associer la fonction caractéristique de l'ensemble associé (réunion des disques), que l'on suppose être de masse 1.

Si l'on fait subir aux centres des disques un déplacement  $\delta q$ , on s'est éloigné dans  $\mathbb{R}^{2N}$  de la norme euclidienne de  $\delta q$ . On peut vérifier aisément que, si le déplacement n'est pas trop grand, la distance  $W_2$  entre la nouvelle densité et l'ancienne est aussi  $|\delta q|$ . Le  $T$  optimal dans l'expression ci-dessus est de façon évidente l'application qui translate chaque disque vers sa nouvelle position. On notera cependant que cette égalité des distances est invalidée si le déplacement est trop important. On peut alors avoir intérêt à appairer différemment les disques pour optimiser le coût de transport.

L'analogie (pour des petits déplacements) entre la distance euclidienne sur la description lagrangienne suggère une version macroscopique de l'algorithme (2) :

$$\begin{cases} \tilde{\rho}^{n+1} &= (\text{Id} + \tau U)_{\#} \rho^n \\ \rho^{n+1} &= P_{\widehat{K}}(\tilde{\rho}^{n+1}) \end{cases} \quad (6)$$

où la première étape correspond à un transport de la densité courante par la vitesse souhaitée, la projection de la seconde étape étant entendue au sens de la distance de Wasserstein définie ci-dessus. Cette approche rentre dans le cadre très général des algorithmes de prédiction-correction, utilisés pour la discrétisation en temps de problème d'évolution sous contrainte. On retrouve ainsi le principe du schéma dit de projection pour les équations de Navier-Stokes, basé sur une première étape de prédiction de la vitesse sans prise en compte de l'incompressibilité, puis calcul d'une pression dans une seconde étape, de façon à assurer le caractère conservatif de la nouvelle vitesse.

Dans le cadre microscopique, la projection sur l'ensemble admissible  $K$  des configurations de disques rigides sans recouvrement est bien définie dans un petit voisinage. Mais, comme nous l'avons indiqué, la taille de ce voisinage tend vers 0 lorsque

le nombre de grains tend vers l'infini (et leur taille vers 0), ce qui laisse craindre des difficultés à définir proprement la projection dans ce contexte macroscopique (qui correspond formellement à la limite d'une infinité de grains infiniment petits). On peut pourtant se convaincre assez aisément qu'*il n'en est rien* : le problème consistant à projeter (pour la distance de Wasserstein) une mesure quelconque sur l'ensemble  $\widehat{K}$  des mesures de probabilité admettant une densité par rapport à la mesure de Lebesgue majorée par 1, s'avère être un problème bien posé.

Avant d'indiquer les grandes lignes de la démonstration de ce caractère bien posé, permettons-nous deux remarques sur le caractère paradoxal de ce résultat.

1) En premier lieu, dans un espace de Hilbert, la possibilité de définir sans ambiguïté une projection sur un ensemble donné va de pair avec la possibilité de "s'éloigner" de cet ensemble à partir du bord. En particulier, les ensembles sur lesquels la projection est partout bien définie sont les ensembles tels que, pour tout point du bord, on peut faire partir vers l'infini une demi-droite de points qui se projettent sur le point de départ. Les ensembles prox-réguliers évoqués précédemment sont des ensembles dont on peut s'écarter avec l'assurance de revenir sur ses pas par projection, *tant qu'on ne s'éloigne pas trop*. Dans le cas de l'espace de Wasserstein, si l'on considère une mesure admissible  $\rho$  qui sature partout la contrainte (fonction caractéristique d'un ensemble mesurable), il est naturel de se demander à quelle distance maximale de  $\widehat{K}$  peut se situer une densité qui réaliserait sa distance à  $\widehat{K}$  en  $\rho$ . Il apparaît immédiatement que cette distance maximale n'est pas minorée. On peut s'en convaincre en considérant, en dimension 1, une densité  $\rho$  qui est la somme de fonctions caractéristiques de petits intervalles de taille  $\varepsilon$ . La mesure la plus éloignée de  $\widehat{K}$ ,

tout en réalisant la distance en  $\rho$ , est la somme des masses de Dirac pondérées par  $\varepsilon$ , supportées par les centres des petits segments. On peut vérifier que la distance tend vers 0 avec  $\varepsilon$ , ce qui montre que  $\widehat{K}$  n'est *pas* uniformément  $\eta$ -prox-régulier, aussi petit que soit  $\eta > 0$ . Une illustration plus parlante encore de cette non prox-régularité est donnée par une densité définie comme fonction caractéristique du complémentaire d'un ouvert dense de mesure petite : cet ensemble peut être vu comme saturant quasiment tout l'espace disponible, pourtant son support ne contient aucun ouvert, elle n'est donc la projection sur  $\widehat{K}$  que d'elle-même. Ce résultat négatif est conforme avec la dégénérescence de la prox-régularité microscopique lorsque la taille des particules tend vers 0. Mais l'espace de Wasserstein se distingue ici très nettement de son cousin Hilbertien : malgré les considérations précédentes, nous verrons plus loin que la projection sur  $\widehat{K}$  est bien définie de façon unique, bien qu'un point de la frontière n'est (en général) projection d'aucun autre point que lui-même.

2) Une autre différence fondamentale entre la description microscopique lagrangienne-euclidienne et la description macroscopique dans le cadre Wasserstein est plus directement liée à la géométrie de ces espaces. On considère une mesure  $\rho \notin \widehat{K}$  (i.e. dont le sup essentiel est strictement supérieur à 1), et deux densités  $\mu_0$  et  $\mu_1 \in \widehat{K}$  qui réalisent la distance de  $\rho$  à  $\widehat{K}$ . On cherche à montrer qu'elle sont nécessairement confondues. La démarche usuelle, dans ce contexte, consisterait à considérer l'interpolée géodésique (dite de McCann),

$$\mu_t = (\text{Id} + t(T - \text{Id}))\# \mu_0,$$

où  $T$  est un transport optimal entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$ . Elle permet de construire une courbe de densités entre  $\mu_0$  et  $\mu_1$ , dont on peut vérifier qu'elle est dans  $\widehat{K}$ . Mais la démarche est une impasse, car la fonction-

nelle

$$\mu \longmapsto \frac{1}{2}W_2(\rho, \mu)^2,$$

contrairement au cas Hilbertien, n'est *pas* géodésiquement convexe (en dehors de la dimension 1). On peut même vérifier que cette fonctionnelle n'est  $\lambda$ -convexe pour aucun  $\lambda$ , ce qui signifie qu'aucun ajout de fonctionnelle lisse convexe ne suffirait à la rendre convexe. Le contre-exemple proposé dans [AGS08], page 162, est basé sur des mesures qui sont sommes de 2 masses de Dirac. La fonction ci-dessus, suivie le long d'une géodésique, présente un point singulier (dérivées différentes à droite et à gauche en ce point), et l'on peut vérifier que ce phénomène correspond à une permutation de l'appariement entre les masses.

Une astuce permet de corriger le problème décrit ci-dessus, en considérant un autre type de géodésiques, dites généralisées, basées sur une interpolation des applications de transport : si l'on note  $T_i$  un transport optimal de  $\rho$  vers  $\mu_i$ , cette interpolation est définie par

$$\mu_t = ((1-t)T_0 + tT_1)_\# \rho.$$

Dans le cas de l'espace plat (Hilbertien), une telle interpolée se confond avec la première, mais elle est différente dans l'espace de Wasserstein, et l'on peut vérifier que la fonction  $W_2(\rho, \cdot)^2$  est strictement convexe le long de cette courbe, ce qui assure l'unicité de la projection par l'argument de contradiction classique.

Le caractère bien posé de cette projection permet de donner un sens précis à l'algorithme (2), sans limitation sur le pas de temps (contrairement au cas microscopique), et de construire une suite de trajectoires associées dont on peut montrer, au prix de quelques complications techniques (voir [MRCSV11]), qu'elles convergent (à sous-

suite extraite près), vers une solution du problème macroscopique.

### Micro $\neq$ macro

Les considérations précédentes éclairent les analogies et différences entre la description microscopique d'une collection de disques sans chevauchement et son pendant macroscopique dans le cadre du transport optimal. Elles peuvent sembler anecdotiques puisque, finalement, on obtient des résultats théoriques analogues pour les deux modèles. Nous proposons dans la suite de montrer que la différence de nature entre les deux descriptions conduit à des comportements profondément divergents en termes de modélisation. Nous illustrerons cette divergence en nous focalisant sur un opérateur de type laplacien qui est formellement présent dans les deux modèles, sous-jacent à la prise en compte de la contrainte de congestion, mais ce laplacien présente des caractéristiques pathologiques au niveau discret. Comme nous le verrons, ce sont précisément ces caractéristiques pathologiques qui assurent la richesse, et d'une certaine manière la pertinence, du modèle.

Au niveau macroscopique, le laplacien résulte simplement de l'élimination de la vitesse dans le problème de Darcy (5), qui définit la vitesse effective  $u$  des personnes à partir du champ de vitesses souhaitées  $U$ . Plus précisément, notons  $\omega$  la zone saturée (sur laquelle la densité est égale à 1), et considérons la situation d'un champ de vitesses souhaitées qui tend à concentrer les personnes, i.e.  $\nabla \cdot U < 0$ , sur cette zone saturée. On aura alors saturation de la contrainte de divergence positive sur  $\omega$ , et l'on obtient un problème de Poisson pour la pression :

$$-\Delta p = -\nabla \cdot U, \tag{7}$$

avec conditions de Dirichlet homogènes  $p = 0$  sur le



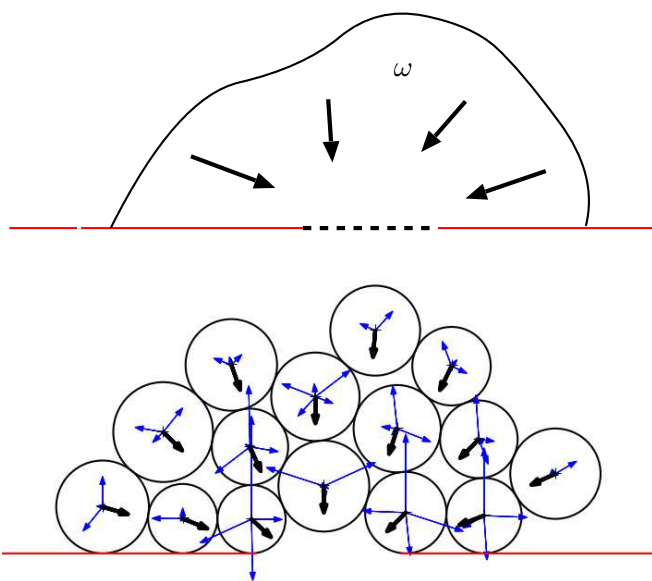


FIGURE 3 – Bouchon macroscopique (haut) et microscopique (bas)

bord de la zone saturée  $\omega$ . Ce problème elliptique traduit la présence d'effets non locaux au travers de la zone saturée, de la même manière que dans les fluides incompressibles l'information se propage à vitesse infinie. Cette forme particulière prise par le problème en pression permet de mettre simplement en évidence une propriété du modèle qui est cruciale sur le plan de la modélisation de phénomènes d'évacuation. Considérons l'évacuation d'une salle convexe au travers d'une porte unique. Le caractère concentrant de la vitesse va augmenter la densité dans les premiers instants de l'évolution, jusqu'à former une zone saturée immédiatement en amont de la sortie. Sur cette zone saturée, la pression est solution de l'équation de Poisson ci-dessus, avec un second membre positif, des conditions de Dirichlet homogènes sur la sortie et en arrière de la zone, et des conditions de flux nul (conditions de Neuman homogène) sur les murs latéraux (voir figure 3, haut). On en déduit immédiatement que la pression, positive sur la zone saturée par application du principe du maximum, a une dérivée normale sortante  $\partial p / \partial n$  négative sur la porte. La vitesse effective des personnes au niveau de la sortie, qui s'écrit comme la vitesse souhaitée corrigée par le terme  $-\partial p / \partial n$ , est donc *supérieure* à leur vitesse souhaitée. Selon ce modèle, les personnes sur le point de sortir sont poussées par les personnes derrière elle, de telle sorte que la congestion accélère l'évacuation. Ce comportement est en contradiction avec la réalité observée, en particulier avec l'effet dit de *Capacity Drop* : on observe dans les faits une diminution du flux de sortie lorsque la densité en amont de la sortie dépasse une certaine valeur. Il est possible de corriger ce comportement en limitant le flux au travers de la porte, mais cette modification ne peut qu'être artificielle, et il faut bien reconnaître que ce modèle, dans cette situation particulière, reproduit un effet contraire à celui observé expérimentalement.

Comme nous allons le voir par une étude plus approfondie du modèle microscopique, ce mauvais comportement du modèle est lié à la description macroscopique elle-même, dont nous avons déjà évoqué certaines des propriétés précédemment. Sur le plan microscopique, une formulation particulière de l'équation d'évolution permet en premier lieu de retrouver un problème de type Darcy, très analogue formellement au problème de Darcy classique. Le problème (3) peut se reformuler de façon mixte, en introduisant une paramétrisation explicite du sous-différentiel impliqué. Les contraintes définissant l'ensemble admissible  $K$  portent sur les distances entre les centres, qui doivent rester supérieures au double du rayon. Les mouvements admissibles sont donc ceux qui augmentent au sens large toutes les distances entre grains déjà en contact. On en déduit assez directement une expression explicite du sous-différentiel

$$\partial I_K(q) = \left\{ - \sum_{i \sim j} p_{ij} G_{ij}, \quad p_{ij} \geq 0 \right\},$$

où  $G_{ij}$  est le gradient de la distance  $|q_j - q_i|$ . Si l'on note  $p$  le vecteur des pressions relatives aux couples de particules en contact, et  $B$  la matrice dont chaque ligne exprime une contrainte sur la vitesse relative de deux particules en contact, c'est à dire  $-G_{ij} \cdot u \leq 0$ , la matrice transposée  $B^*$  encode la somme ci-dessus. On aboutit au système

$$\begin{cases} u + B^*p &= U, \\ Bu &\leq 0, \end{cases} \quad (8)$$

avec  $p \geq 0$  (toutes les pressions d'interaction sont positives : elles correspondent à des forces de répulsion entre personnes en contact). La formulation mixte qui relie la vitesse effective des gens à leur vitesse souhaitée prend ainsi la forme

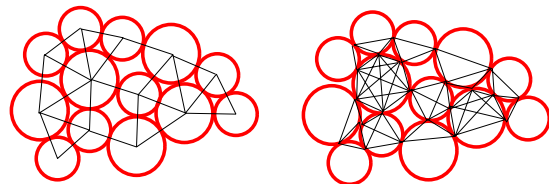


FIGURE 4 – Réseaux primal et dual

du problème de Darcy (5), où  $B$  est la version discrète de l'opérateur de divergence (plus précisément de son opposé). Poursuivons l'analogie avec le problème macroscopique en considérant une situation fortement congestionnée où les vitesses souhaitées tendent à pousser les gens les uns contre les autres, i.e.  $G_{ij} \cdot U < 0$  (ce qui correspond au cas d'une évacuation au travers d'une porte étroite vers laquelle tous les individus convergent). Si l'on considère l'ensemble des couples  $(i, j)$  de personnes en contact actif (avec une pression d'interaction strictement positive), le principe de complémentarité classique pour ces problèmes de minimisation sous contrainte implique que la contrainte est saturée pour chacun de ces couples, c'est-à-dire que  $Bu = 0$ . On peut alors, comme dans le cadre macro, éliminer la vitesse pour obtenir un problème de Poisson discret, qui est le pendant microscopique de (7) :

$$BB^*p = BU. \quad (9)$$

La matrice  $BB^*$  peut être vue comme un laplacien discret associé à la configuration courante, qui agit sur les sommets du graphe *dual* associé au réseau de grains. C'est un graphe dont les sommets sont les points de contacts entre les grains (représenté à droite de la figure 4) ; on notera qu'il est génériquement non planaire, contrairement au graphe primal des contacts (dont les sommets sont les centres des grains), qui est lui nativement pla-

naire. La figure 5 présente un champ de pression calculé au cours de l'évolution d'une collection d'individus-grains évacuant une salle. La pression étant définie sur le graphe dual, elle est représentée sur la figure au niveau de chaque arête reliant deux personnes en contact (l'épaisseur de l'arête est proportionnelle à cette pression).

La matrice  $BB^*$  est le pendant discret du laplacien macroscopique mais présente un certain nombre de caractéristiques propres au cas microscopique :

1. En dehors de situations très structurées comme les réseaux périodiques carrés ou triangulaires, elle ne s'annule pas contre les champ de pression constants.
2. Dans les situations fortement congestionnées (on pourra penser à un réseau triangulaire de grains de même taille), le nombre de points de contacts peut devenir (très) supérieur au nombre de degrés de libertés ( $2N$ ). La matrice  $B^*$  est alors singulière, et admet un noyau de modes parasites en pression. Une conséquence en termes de modélisation est que, dans une telle situation, on ne peut pas inférer les forces d'interaction entre personnes à partir de la simple connaissance de la configuration et des vitesses souhaitées.
3. L'opérateur  $BB^*$  ne vérifie pas le principe du maximum. On peut plus précisément vérifier simplement que, si la matrice est à diagonale dominante, et de termes diagonaux positifs, certains termes extra-diagonaux sont eux-même positifs (il ne s'agit pas de ce que les numériciens appellent une  $M$ -matrice).

L'absence de principe du maximum pour cet opérateur a une conséquence essentielle en termes de modélisation. Le principe du maximum vérifié par le laplacien standard nous avait permis de

montrer au niveau macroscopique que, dans le cas d'une évacuation congestionnée, les gens sortent toujours *plus vite* qu'ils ne le souhaiteraient. Ce raisonnement n'est plus valide pour le modèle microscopique. De fait, on peut vérifier par le calcul numérique que les individus au niveau de la sortie avancent en général moins vite qu'ils ne le souhaiteraient, ce qui est conforme à la réalité. En outre, ce modèle microscopique peut donner lieu à des configurations complètement bloquées, bouchons statiques comme celui représenté sur la figure 3 (bas). Sur cette figure, les flèches noires représentent les vitesses souhaitées, et les flèches bleues les corrections induites par les forces de contact, de telle sorte que la vitesse résultante

$$u = U - B^*p$$

est exactement nulle en tout point. On peut vérifier (voir [FM15]) que ce bouchon est stable, et plus précisément qu'il est stabilisé par les personnes en amont qui continuent à pousser vers la sortie. On retrouve le principe architectural de l'assemblage de claveaux sans ciment (appelé *arc léger*), qui est stabilisé par le poids même des objets le constituant. Les remarques précédentes mettent en évidence le caractère essentiellement microscopique de cet effet, qui repose sur une collection d'objets indéformables de taille finie.

### Remarques en conclusion

Nous espérons avoir montré comment le cadre du transport optimal et de la distance de Wasserstein permet de donner un cadre mathématique sain à des problèmes d'évolution non lisses portant sur de la matière en mouvement, en s'affranchissant de la description purement eulérienne sur laquelle se fondent les équations aux dérivées partielles. Ce cadre reproduit une part de la description lagrangienne qui est naturelle pour les systèmes microscopiques de particules, et permet de transposer cer-

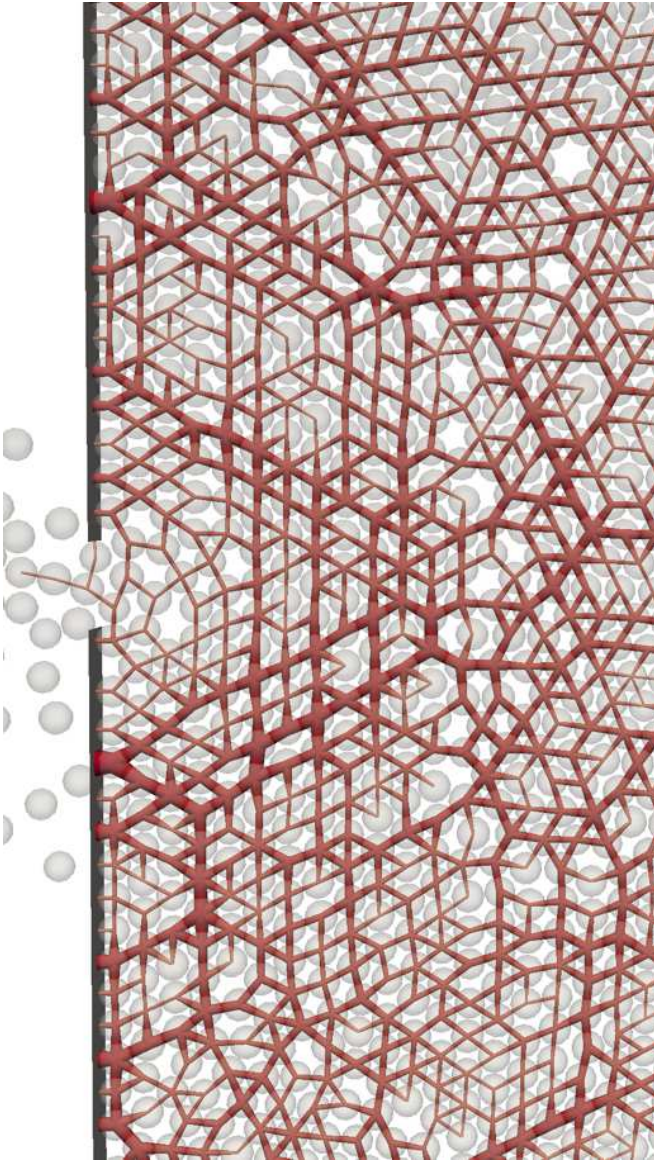


FIGURE 5 – Pression granulaire (S. Faure)

tains outils existants au cas macroscopique. Mais ce caractère lagrangien n'est pas totalement respecté : la distance de Wasserstein est le pendant, pour les mesures, de la distance euclidienne pour les systèmes de particules *modulo les permutations*, ce qui induit des propriétés géométriques paradoxales au premier abord de l'espace de Wasserstein.

En termes de modélisation, la grande rigidité de la description microscopique, fondée sur des collections de sphères dures, s'oppose à la fluidité de la description macroscopique, qui autorise les déformations conservatives locales, entraînant une différence profonde de comportement des deux modèles. Il n'existe pas à notre connaissance de cadre macroscopique permettant de retrouver la richesse de la description microscopique pour les régimes fortement congestionnés. Un tel cadre ne saurait être fondé sur la seule prise en compte d'une densité locale, insuffisante à encoder la complexité des arrangements locaux entre grains, et l'élaboration de modèles macroscopiques adaptés aux collections de sphères dures au voisinage de la densité maximale est un domaine encore largement ouvert.

### Remerciements

L'auteur remercie chaleureusement I. Hartarski, J. Le Rousseau, et R. Tessera, pour leurs suggestions.

### Références

- [AGS08] Luigi Ambrosio, Nicola Gigli, and Giuseppe Savaré. *Gradient flows : in metric spaces and in the space of probability measures*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [FM15] Sylvain Faure and Bertrand Maury. *Crowd motion from the granular*

standpoint. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 25(03) :463–493, 2015.

- [Mor77] J.J. Moreau. Evolution problem associated with a moving convex set in a *Hilbert* space. *J. Differential Equations*, 26(3) :347–374, 1977.
- [MRCSV11] Bertrand Maury, Aude Roudneff-Chupin, Filippo Santambrogio, and Juliette Venel. Handling congestion in crowd motion models. *Net. Het. Media*, 6(3) :485 – 519, 2011.
- [MV11] Maury, Bertrand and Venel, Juliette. A discrete contact model for crowd motion. *ESAIM : M2AN*, 45(1) :145–168, 2011.
- [San15] Filippo Santambrogio. Optimal transport for applied mathematicians, 2015.
- [Thi03] L. Thibault. Sweeping process with regular and nonregular sets. *J. Differential Equations*, 193(1) :1–26, 2003.
- [Vil03] Cédric Villani. *Topics in optimal transportation*. Graduate studies in mathematics. American Mathematical Society, cop., Providence (R.I.), 2003.