



**HAL**  
open science

## Adaptation de maillage avec approximation de la géométrie pour le calcul de coques minces

Philippe Destuynder, Yann Moguen, Michel Salaün

► **To cite this version:**

Philippe Destuynder, Yann Moguen, Michel Salaün. Adaptation de maillage avec approximation de la géométrie pour le calcul de coques minces. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504294

**HAL Id: hal-01504294**

**<https://hal.science/hal-01504294>**

Submitted on 9 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Adaptation de maillage avec approximation de la géométrie pour le calcul de coques minces

Ph. Destuynder\* — Y. Moguen\*\* — M. Salaün\*\*\*

\* Conservatoire National des Arts et Métiers - Chaire de Calcul Scientifique  
292 rue Saint-Martin - F-75141 Paris cedex 03  
destuynd@cnam.fr

\*\* Université de Pau et des Pays de l'Adour - Laboratoire de Thermique, Energétique et Procédés  
IUT-GTE, avenue de l'Université - F-64000 Pau  
yann.moguen@etud.univ-pau.fr

\*\*\* ENSICA - Département de Génie Mécanique  
1 place Emile Blouin - F-31056 Toulouse cedex 05  
michel.salaun@ensica.fr

---

*RÉSUMÉ. Une méthodologie relative au raffinement de maillage pour le calcul des coques minces est présentée. Nous supposons que les seules informations dont nous disposons sur la géométrie de la coque sont données par un ensemble de sommets situés sur sa surface moyenne et de la normale unitaire en ces sommets. Une méthode d'interpolation par arêtes des sommets et des normales, couplée avec un algorithme de subdivision des triangles du maillage de la surface moyenne, est mise en œuvre. L'estimation d'erreur locale est basée sur la détection des défauts de régularité des efforts de la coque. Quelques exemples numériques illustrent les bons résultats obtenus.*

*ABSTRACT. A methodology concerning mesh refinement for thin shells computation is presented. The geometry of the shell is given only by the reduced informations consisting in nodes and normals on its mid-surface. An interpolation method by edges, coupled with a triangle bisection algorithm, is applied. Local error estimation is based on the detection of regularity defects of the shell stresses. Few numerical examples are given, which illustrate the good results that we have obtained.*

*MOTS-CLÉS : Coque, raffinement adaptatif de maillage, approximation de la géométrie, estimation d'erreur a posteriori.*

*KEYWORDS: Shell, adaptative mesh refinement, geometry approximation, a posteriori error estimation.*

---

## 1. Introduction

Le problème du raffinement adaptatif de maillage pour le calcul des coques reste étonnamment peu abordé dans la littérature. Lorsqu'il l'est, d'une part, la carte définissant la surface moyenne de la coque est supposée connue et, d'autre part, le processus de raffinement se traduit généralement par un remaillage complet de la structure à partir de la définition d'une nouvelle répartition spatiale de la taille des éléments (voir [BON 96] ou [LAC 02] par exemple). Dans cette étude, une autre approche est envisagée. Nous y proposons une stratégie de subdivision des éléments géométriques du maillage, couplée avec une méthode d'interpolation de la surface moyenne de la coque.

Nous supposons que la surface moyenne  $\omega$  de la coque est représentée par un ensemble de facettes triangulaires planes. Nous avons donc à définir une stratégie de subdivision des triangles préservant la fiabilité du calcul. Il s'agit en particulier de construire de nouveaux sommets qui soient aussi proches que possible de la surface moyenne. Pour cela, nous supposons donnée la normale unitaire à  $\omega$  en chaque sommet du maillage, sans pour autant que la géométrie de cette surface moyenne soit connue de façon analytique.

## 2. Critère de raffinement

L'indicateur d'erreur est adapté à une formulation mixte du modèle de Koiter sous les hypothèses de Kirchhoff–Love (voir [DES 96]). Cette formulation conduit à des efforts constants par élément. Le critère de raffinement que nous proposons ici repose sur la détection des variations de l'énergie élastique au sein de la coque, calculée au moyen des efforts intérieurs : l'effort résultant  $n^h$ , le moment de flexion  $m^h$  et l'effort tranchant  $Q^h$ , obtenu ici comme multiplicateur de Lagrange de la condition de Kirchhoff–Love. Nous introduisons alors sur chaque triangle  $K$  du maillage :

$$\left\{ \begin{array}{l} \eta_n(K) = \sqrt{\frac{1-\nu^2}{2E\varepsilon}} \| \tilde{n}^h - n^h \|_{0,K} \quad , \\ \eta_m(K) = \sqrt{\frac{\varepsilon(1-\nu^2)}{6E}} \| \tilde{m}^h - m^h \|_{0,K} \quad , \\ \eta_Q(K) = \sqrt{\frac{1+\nu}{2E\varepsilon}} \| Q^h \|_{0,K} \quad , \end{array} \right.$$

où  $\varepsilon$ ,  $E$  et  $\nu$  sont respectivement la demi-épaisseur, le module de Young et le coefficient de Poisson du matériau constituant la coque. Dans notre calcul, les efforts sont obtenus constants par élément. Aussi, les champs  $\tilde{m}^h$  et  $\tilde{n}^h$  sont construits par interpolation  $P1$  des champs d'efforts aux sommets, lesquels sont simplement les moyennes locales des efforts sur les éléments, pondérées par les aires de ces derniers. De plus, dans l'expression de  $\eta_Q(K)$ , on notera l'absence d'effort tranchant interpolé. En effet,

dans le modèle de Kirchhoff–Love, celui-ci est considéré comme négligeable devant les contraintes planes. Cependant, il n'est pas nul et peut se concentrer en certains endroits de la structure. Le terme  $\eta_Q(K)$  de l'indicateur d'erreur permet alors de "forcer" le raffinement en ces endroits.

REMARQUE. — On peut noter une forte analogie entre l'approche que nous venons de décrire et celle de Zhu et Zienkiewicz [ZHU 92] pour le calcul des moyennes locales des champs d'efforts. Cependant, les deux méthodes diffèrent dans le choix du degré des polynômes utilisés lors de ce calcul. Plus précisément, soit  $v^h$  une composante de l'un des efforts sur les éléments et  $T_S$  l'ensemble des triangles dont  $S$  est un sommet. La composante correspondante de l'effort au sommet  $S$  est telle que :

$$v_S = \min_{v \in \mathbb{R}} \int_{T_S} (v - v^h)^2 \quad ,$$

alors que suivant [ZHU 92] la minimisation se ferait dans  $P1$ .

Un indicateur local d'erreur est ensuite défini par :

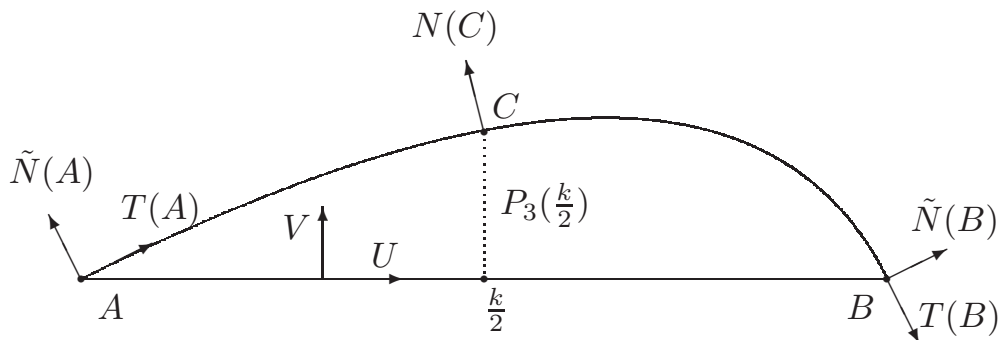
$$\eta(K) = \sqrt{\eta_n^2(K) + \eta_m^2(K) + \eta_Q^2(K)} \quad .$$

Le triangle  $K$  sera subdivisé dès que l'on a :  $\eta(K) > \eta_{\text{moyen}} + \alpha s$ , où  $s$  est l'écart-type des indicateurs sur l'ensemble du maillage et  $\alpha$  un paramètre strictement positif fixé.

REMARQUE. — Si l'indicateur d'erreur considéré ici présente l'avantage de la simplicité, d'autres indicateurs / estimateurs sont bien sûr tout aussi envisageables.

### 3. Aspects géométriques

Concernant les aspects géométriques du raffinement de maillage (construction des nouveaux sommets et des normales associées), nous suivons la méthode proposée dans [ARR 94] (voir Figure 1).



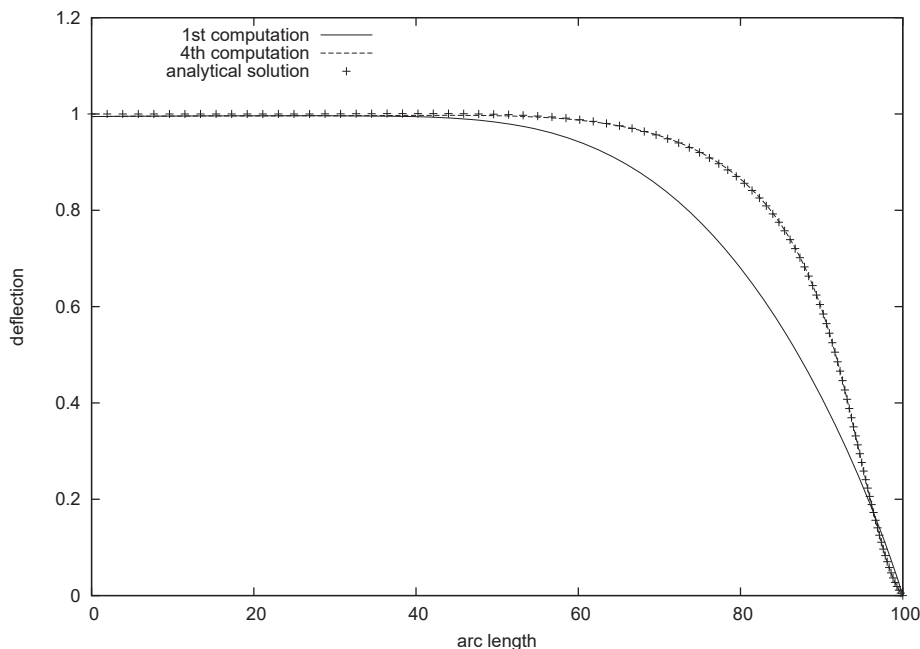
**Figure 1.** Approximation de la surface moyenne dans le plan  $\Pi$ . Les vecteurs  $\tilde{N}(A)$  et  $\tilde{N}(B)$ , qui ne sont représentés que pour faciliter la compréhension de la figure, sont les projections orthogonales sur ce plan des normales  $N(A)$  et  $N(B)$  en A et B.

Considérons les extrémités  $A$  et  $B$  d'une arête d'un triangle pour laquelle un nouveau sommet doit être défini. Notons  $N(A)$  et  $N(B)$  les normales unitaires associées. Alors, les points  $A$ ,  $B$  et le vecteur  $\gamma = N(A) + N(B)$  définissent un plan  $\Pi$  qui intersecte  $\omega$  suivant un arc  $\widehat{AB}$ . Pour l'interpoler, nous introduisons une base orthonormée directe  $(U, V)$  de  $\Pi$  avec  $U = AB/\|AB\|$ . Un polynôme  $P_3$  de degré 3 défini sur  $[0, \|AB\|]$  est alors déterminé par les conditions d'interpolation et de tangence en  $A$  et  $B$ . Le nouveau sommet  $C$  et la normale en ce point, sont alors donnés par :

$$AC = \frac{\|AB\|}{2} U + P_3\left(\frac{\|AB\|}{2}\right) V, \quad N(C) = \frac{N(A) + N(B)}{\|N(A) + N(B)\|}.$$

REMARQUE. — On notera que cette méthode d'interpolation, qui n'utilise que des informations connues sur les arêtes (position des nœuds et normales associées), s'appliquerait de manière identique à des quadrangles.

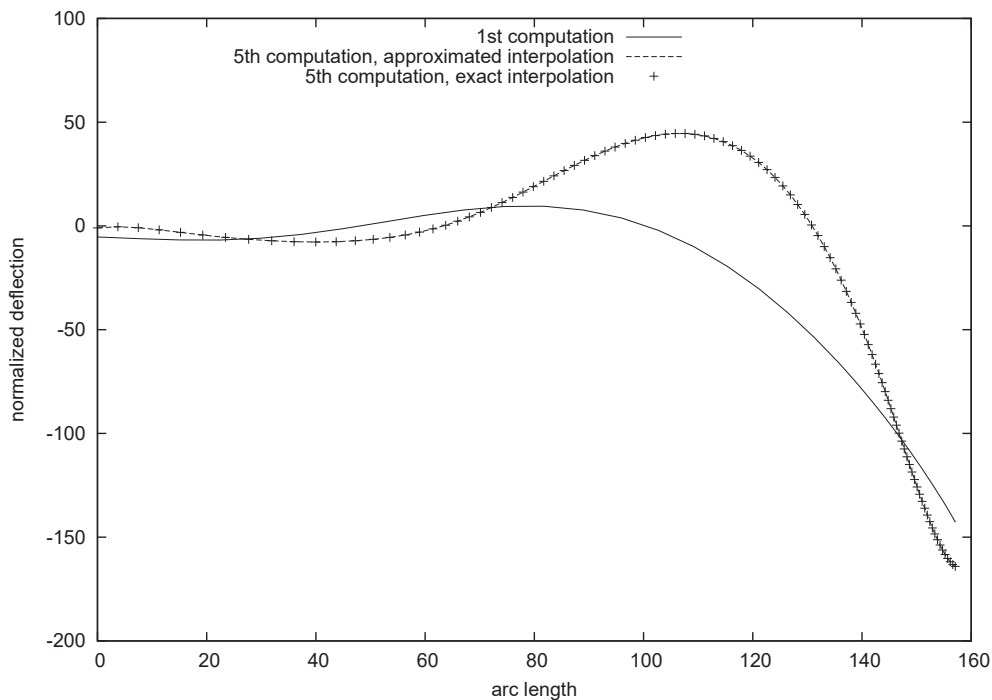
Enfin, l'algorithme de subdivision des triangles du maillage est inspiré de Rivara [RIV 84]. Dans un premier temps, chaque triangle à raffiner est découpé en quatre de la façon suivante : on relie le nœud milieu de l'arête la plus longue avec le sommet opposé et les milieux des deux autres côtés. Puis, pour assurer la conformité du maillage, on relie les nœuds non conformes soit au sommet opposé s'ils sont sur l'arête la plus longue d'un triangle, soit au nœud milieu de l'arête la plus longue, sinon. Ce processus est répété jusqu'à l'obtention de la conformité sur tout le maillage, ce qui arrive, en pratique, en quelques itérations.



**Figure 2.** *Cylindre encastré-libre sous pression uniforme - Déplacement normal suivant la direction axiale du cylindre - 1<sup>er</sup> calcul (trait continu), 4<sup>ème</sup> calcul (- -) et solution analytique (++)*.

## 4. Expérimentations numériques

La méthode que nous venons de décrire a été mise en œuvre sur plusieurs cas-tests classiques, comme le cylindre pincé, pour lequel on dispose d'une solution de référence (voir [BAT 92]), ou le cylindre encastré-libre sous pression uniforme, qui possède une solution analytique exacte (voir [DES 90, DES 96]). La figure 2 illustre la convergence de la solution éléments finis vers cette solution analytique, dans ce second cas. La figure 3 montre, quant à elle, la bonne précision de la méthode d'interpolation des nœuds utilisée ici.

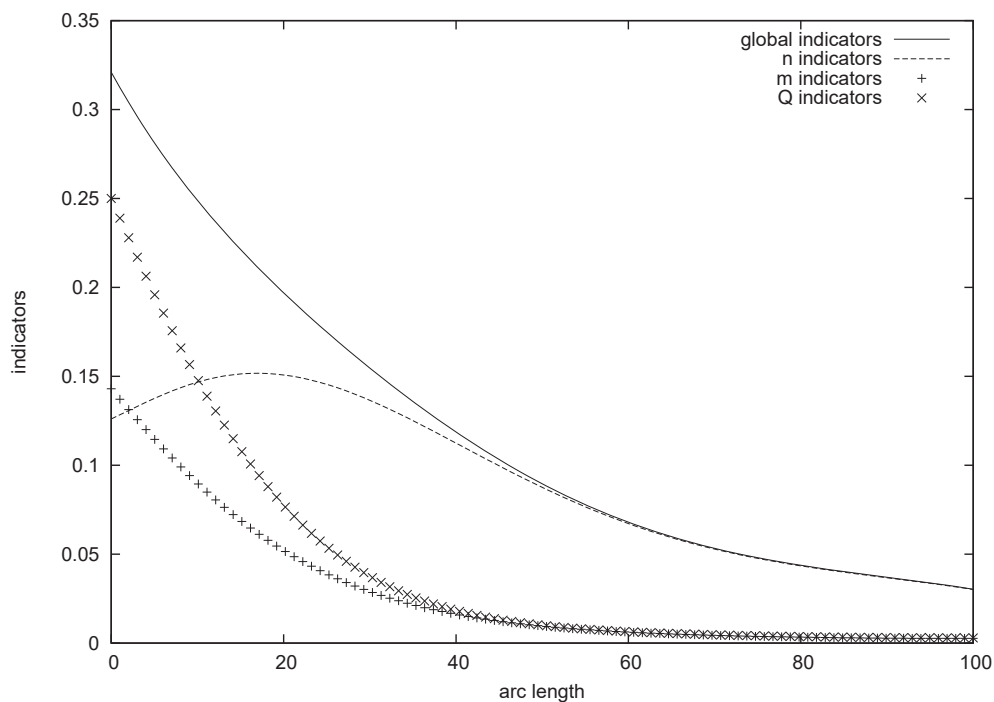


**Figure 3.** Cylindre pincé - Flèche normalisée suivant la direction orthoradiale - 1<sup>er</sup> calcul (trait continu), 5<sup>ème</sup> calcul : géométrie approchée (- -) et géométrie exacte (++).

Enfin, la figure 4 permet de vérifier, dans le cas du cylindre pincé, que les indicateurs d'erreur des différents efforts sont du même ordre de grandeur. Ainsi, nous pouvons considérer qu'aucun indicateur n'est systématiquement occulté par les autres, ce qui justifie les pondérations des indicateurs proposées dans la section 2.

## 5. Conclusions

La méthodologie proposée ici conduit à des résultats numériques en accord avec les solutions disponibles dans la littérature. En particulier, la méthode de raffinement de maillage proposée (approximation des nœuds et des normales) ne dégrade pas ces résultats. Une réflexion sur la mise au point d'autres estimateurs d'erreur est en cours.



**Figure 4.** *Cylindre pincé - Comparaison entre les indicateurs d'erreur  $\eta$ ,  $\eta_n$ ,  $\eta_m$  et  $\eta_Q$  suivant la direction longitudinale du cylindre (premier calcul).*

## 6. Bibliographie

- [ARR 94] ARREGUI I., SALAÜN M., « Interpolation d'une surface déterminée par des nœuds et des normales », *C. R. Acad. Sci. Paris, Série I*, vol. 318, 1994, p. 265–268.
- [BAT 92] BATOZ J., DHATT G., *Modélisation des structures par éléments finis - Vol. 3 - Coques*, Hermès, Paris, 1992.
- [BON 96] BOND T., LI L., BETTESS P., BULL J., APPLGARTH I., « Adaptive mesh refinement for shells with modified Ahmad elements », *Computers & Structures*, vol. 61, n° 6, 1996, p. 1135–1141.
- [DES 90] DESTUYNDER P., *Modélisation des coques minces élastiques*, Masson, Paris, 1990.
- [DES 96] DESTUYNDER P., SALAÜN M., « A Mixed Finite Element for Shell Model with Free Edge Boundary Conditions - Part 3 : Numerical Aspects », *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, vol. 136, 1996, p. 273–292.
- [LAC 02] LACKNER R., MANG H., « Mesh generation and mesh refinement procedures for the analysis of concrete shells », *Advances in Engineering Software*, vol. 33, 2002, p. 389–402.
- [RIV 84] RIVARA M., « Algorithms for refining triangular grids suitable for adaptive and multigrid techniques », *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 20, 1984, p. 745–756.
- [ZHU 92] ZHU J., ZIENKIEWICZ O., « The superconvergent patch recovery and *a posteriori* error estimates. Part 1 : The recovery technique », *Int. J. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 33, 1992, p. 1331–1364.