



Prolongement de données à partir de mesures en surface

Thouraya Baranger, Stéphane Andrieux

► To cite this version:

Thouraya Baranger, Stéphane Andrieux. Prolongement de données à partir de mesures en surface. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504289

HAL Id: hal-01504289

<https://hal.science/hal-01504289>

Submitted on 9 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Prolongement de données à partir de mesures en surface

Applications en élasticité et en mécanique de la rupture

Thouraya N. Baranger* — **Stéphane Andrieux****

** LaMCoS, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, F69621, France ; Université de Lyon, Lyon, F-69003, France; Université Lyon 1, Villeurbanne, F-69622, France*

Thouraya.Baranger@insa-lyon.fr.

*** LaMSID, UMR EDF-CNRS 2832*

1, avenue du général de Gaule 92 141 Clamart, France

Stephane.Andrieux@edf.fr

RÉSUMÉ. On présente une méthode de prolongement de données dans un solide à partir de mesures surabondantes en surface. Ce problème, dit problème de Cauchy, est un problème inverse mal posée. La méthode est basée sur la minimisation d'une fonctionnelle d'erreur en énergie dépendant des données manquantes. On présente d'abord la formulation du problème, puis deux applications pour illustrer l'efficacité de la méthode. Le premier exemple concerne un problème d'indentation tridimensionnel, le second un problème d'identification du facteur de concentration de contrainte dans une fissure.

ABSTRACT. In this paper we present a method for expanding data inside a solid by using overspecified ones measured on a part of the solid boundary. This problem, known as Cauchy problem, is ill-posed. The method is based on the minimization of an energy error function depending on the unknown data. First the formulation of the problem is presented, and then two applications are presented to illustrate the robustness of the method. The first example is concerned with three-dimensional indentation problem and the second one is concerned with the identification of stress factor in a crack.

MOTS-CLÉS: Problème de Cauchy, Identification, Élasticité, Mécanique de la rupture, Prolongement de données.

KEYWORDS: Cauchy problems, identification, Elasticity, Linear fracture mechanics, expanding data.

1. Introduction

Le problème de Cauchy recouvre de façon générale la question du prolongement d'un ensemble de fonctions devant satisfaire à des équations de champ, c'est-à-dire la nullité de l'action d'un opérateur différentiel A , et pour lesquelles sont connues, sur une variété V de dimension inférieure à l'espace dans lequel on se place (courbe en 2D, surface en 3D), les données surabondantes : valeurs du champ et valeurs des conditions aux limites naturelles associées à l'opérateur A . Si les problèmes de Cauchy sont bien posés pour certains opérateurs et certaines variétés (problème à conditions initiales en élastodynamique ou pour l'équation de la chaleur), ils sont en général mal posés ; tout particulièrement pour les opérateurs elliptiques (élasticité, équation de conduction stationnaire). Ces problèmes forment une classe de problèmes inverses intéressante pour de nombreuses applications. On peut ainsi rechercher à partir des données surabondantes sur une partie du bord d'un solide, des conditions aux limites sur des bords inaccessibles, sur le bord d'une inclusion ou d'une surface intérieure connue ; c'est le problème de complétion des données. On peut aussi s'intéresser directement au champ dans le solide : contraintes à l'intérieur d'un solide élastique dont les conditions aux limites sont inconnues ou imprécises.

2. Approche variationnelle du problème de prolongement de données

On s'intéresse ici aux équations de l'élastostatique (les problèmes de conduction stationnaires sont abordés dans Andrieux *et al.*, 2005, 2006). On considère un solide élastique Ω , dont le bord est séparé en trois parties sans recouvrement :

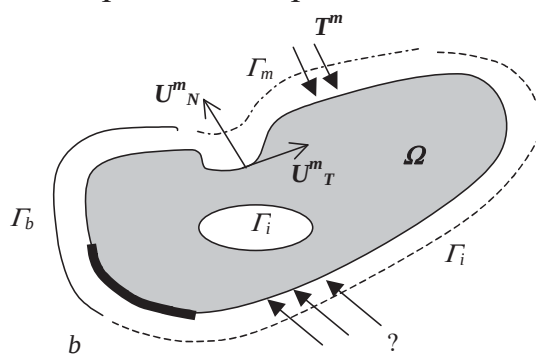


Figure 1. Géométrie pour les problèmes de Cauchy en élasticité

- Sur la première, notée Γ_m , le vecteur contrainte T^m et le champ de déplacement U^m sont connus : ce seront les données de Cauchy, l'indice m rappelant que ces données sont en général issues de mesures.
- Sur la deuxième partie Γ_b , on dispose de conditions aux limites usuelles connues (déplacement ou vecteur contrainte). Sans plus de détail nous noterons ces conditions de façon abstraite par : $Bu = b$

- Enfin sur la troisième partie, Γ_i , ni les tractions surfaciques ni le champ de déplacement ne sont donnés.

Le tenseur de rigidité élastique $\mathbf{A}$ étant supposé connu dans tout le solide, le problème de Cauchy est alors le suivant :

Etant donnés : Les champs de vecteur contrainte (tractions surfaciques) $\mathbf{T}^m$ et de déplacement $\mathbf{U}^m$ sur Γ_m , et le vecteur $\mathbf{b}$ des conditions aux limites sur Γ_b . Déterminer les champs de traction surfacique $\mathbf{T}^i$ et de déplacement $\mathbf{U}^i$ sur Γ_i , tels qu'il existe un champ de déplacement $\mathbf{u}$ dans le solide vérifiant les équations d'équilibre élastique et les conditions sur Γ_b et Γ_m

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u})) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{n} = \mathbf{T}^m, \mathbf{u} = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ \mathbf{B}\mathbf{u} = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}).\mathbf{n} = \mathbf{T}^i, \mathbf{u} = \mathbf{U}^i & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad [1]$$

On va construire une formulation énergétique du problème de Cauchy (Andrieux *et al.*, 2005) : sa solution sera cherchée sous la forme de la minimisation d'une fonctionnelle du couple $(\mathbf{T}^i, \mathbf{U}^i)$. Pour cela, et afin d'exploiter les données surabondantes sur le bord Γ_m , on introduit deux champs de déplacement, $\mathbf{u}_1$ et $\mathbf{u}_2$, solutions de problèmes élastiques directs bien posés :

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}_1)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{u}_1 = \mathbf{U}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ \mathbf{B}\mathbf{u}_1 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}_1).\mathbf{n} = \boldsymbol{\tau} & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad \begin{cases} \operatorname{div}(\mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}_2)) = 0 & \text{dans } \Omega \\ \mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}_2).\mathbf{n} = \mathbf{T}^m & \text{sur } \Gamma_m \\ \mathbf{B}\mathbf{u}_2 = \mathbf{b} & \text{sur } \Gamma_b \\ \mathbf{u}_2 = \mathbf{v} & \text{sur } \Gamma_i \end{cases} \quad [2]$$

Le premier est solution d'un problème dans lequel on utilise l'une des données surabondantes ($\mathbf{U}^m$) sur Γ_m et un champ de vecteur contrainte quelconque ($\boldsymbol{\tau}$) sur Γ_i . Pour le second problème, on utilise l'autre donnée surabondante ($\mathbf{T}^m$) sur Γ_m et un champ de déplacement quelconque ($\mathbf{v}$) sur Γ_i . Le choix de conditions mixtes pour ces deux problèmes assure une solution unique à chacun d'eux (lorsque les conditions sur Γ_b ne suffisent pas pour bloquer les déplacements rigidifiants). On remarque alors que si les champs $\mathbf{v}$ et $\boldsymbol{\tau}$ introduits conduisent au même champ de déplacement $\mathbf{v} = \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_2$, le problème de Cauchy est résolu : $\mathbf{u} = \mathbf{v}$, $\mathbf{T}^i = \boldsymbol{\tau}$, $\mathbf{U}^i = \mathbf{v}$. On obtient la formulation variationnelle du problème de Cauchy en introduisant une fonctionnelle d'écart en énergie D sur les couples de champs $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$:

$$(\mathbf{T}^i, \mathbf{U}^i) = \operatorname{Arg} \min E(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{v}) \quad [3]$$

$$\text{avec : } - E(\mathbf{v}, \boldsymbol{\tau}) = D(\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\tau}), \mathbf{u}_2(\mathbf{v})) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{A} : \varepsilon(\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{v})) : \varepsilon(\mathbf{u}_1(\boldsymbol{\tau}) - \mathbf{u}_2(\mathbf{v}))$$

$$- \mathbf{u}_1 = \mathbf{u}_1(\mathbf{b}, \mathbf{U}^m, \boldsymbol{\tau}) \text{ et } \mathbf{u}_2 = \mathbf{u}_2(\mathbf{b}, \mathbf{T}^m, \mathbf{v}) \text{ solutions de [2]}$$

Hormis le fait qu'elle conduit directement à une méthode de résolution par minimisation, l'intérêt de cette formulation de problème de Cauchy réside dans les propriétés suivantes de la fonctionnelle E .

- a) E est une fonctionnelle **positive, convexe et quadratique** ;
- b) Si un couple de champs $(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v})$ annule E alors :
 - i) $\boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u}_1 + \boldsymbol{R}$, où $\boldsymbol{R}$ est un déplacement rigidifiant,
 - ii) $\boldsymbol{u}_1$ est la solution du **Problème de Cauchy** [1].
- c) E prend une forme ne faisant intervenir que des **termes de bord** :

$$E(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma_m} (\boldsymbol{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_1) \cdot \boldsymbol{n} - \boldsymbol{T}^m) \cdot (\boldsymbol{U}^m - \boldsymbol{u}_2) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_u} (\boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{A} : \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}_2) \cdot \boldsymbol{n}) \cdot (\boldsymbol{u}_1 - \boldsymbol{v}) d\Gamma$$

Cette dernière expression de E est intéressante à deux titres. Sur le plan mécanique elle montre que mesurer l'écart en énergie c'est également mesurer un écart en terme de travail mécanique sur le bord du domaine. Si l'on compare cette expression à celle d'une approche aux moindres carrés mixant écart en contrainte et écart en déplacement, on constate qu'ici l'erreur sur les déplacements est pondérée par l'erreur sur les tractions surfaciques : les quantités duales sont traitées de façon symétrique et aucune coefficient d'adimensionalisation n'apparaît. Sur le plan pratique, on préférera cette expression qui ne nécessite pas d'intégration sur le domaine mais uniquement sur une partie de son bord. Par ailleurs, les quantités qui apparaissent sont assez naturellement disponibles dans un code de calcul aux éléments finis (forces nodales et déplacements nodaux). Sur le plan algorithmique, la minimisation de E est effectuée grâce à une méthode de région de confiance pour pallier au mauvais conditionnement (en général) du Hessien de E , dû au caractère mal posé du problème de Cauchy (sensibilité aux données).

La formulation proposée permet de donner une interprétation énergétique à la méthode de résolutions alternées de Kozlov *et al.*, 1991. Très utilisée dans la littérature, elle s'avère être une méthode de minimisation de E par directions alternées (Andrieux *et al.*, 2006, Baranger *et al.* 2007) : de ce fait on a convergence de la méthode utilisée ici, avec de plus, des performances très supérieures.

3. Applications

Pour illustrer l'efficacité de la méthode, deux exemples sont présentés. Le premier concerne l'indentation d'un solide (figure I). Les surfaces latérales sont libres de tout effort, et par raison de symétrie on modélise le quart de la structure. La frontière Γ_i englobe la surface inférieure du massif et la surface supérieure (en excluant la surface où les mesures sont prises). Les surfaces latérales constituent la frontière Γ_b , sur laquelle on applique les conditions aux limites de symétrie et celles de frontière libre. Les données sur Γ_m sont extraites à partir des résultats obtenus par une résolution par éléments finis du problème direct d'indentation. La figure II présente le profil du déplacement u_z relevé sur les bords 1 et 2. On remarque une bonne adéquation entre les déplacements identifiés et les valeurs exactes. Les figures III et IV présentent le profil de la contrainte σ_{zz} relevé sur les bords 1 et 2 ainsi que la diagonale. Les contraintes identifiées présentent une bonne adéquation avec les valeurs exactes obtenues à partir du modèle éléments finis

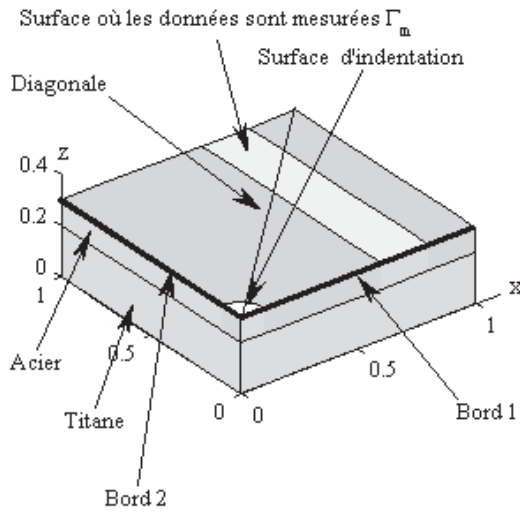
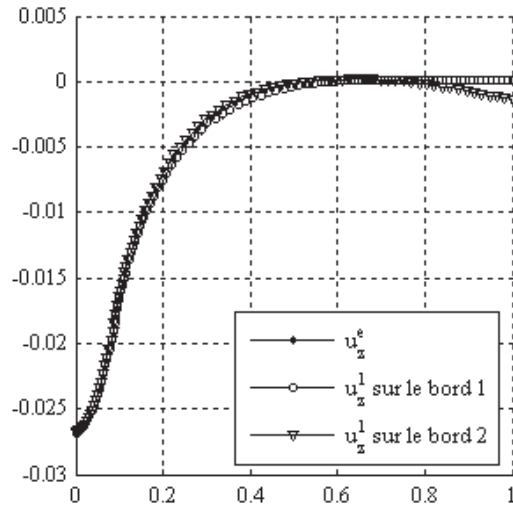
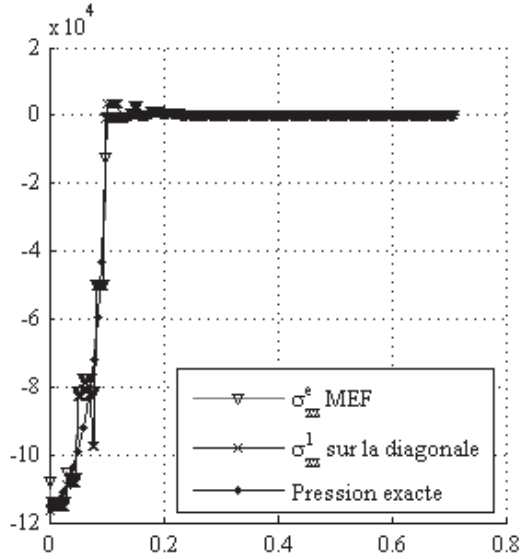
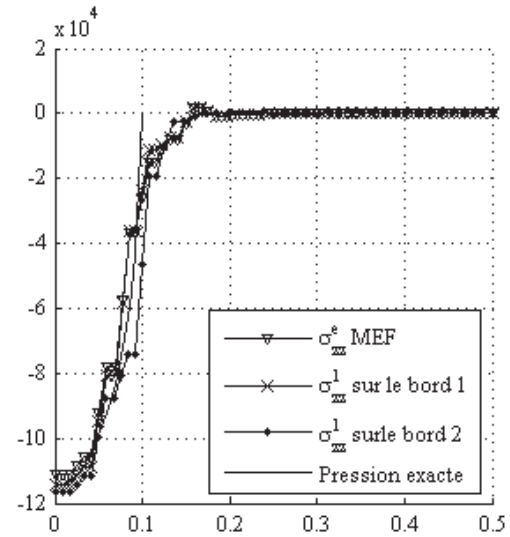


Figure I. Exemple 3D. Géométrie


 Figure II. Profil de u_z exact et identifié

 Figure III. Profil de σ_{zz} exact et identifié

 Figure IV. Profil de σ_{zz} exact et identifié

Le second exemple concerne une plaque avec une fissure voir figure V. On cherche à identifier le facteur intensité de contrainte. On suppose connu le support de la fissure et par raison de symétrie, on modélise la moitié de la plaque. Les données surabondantes sont extraites à partir des résultats d'une modélisation par éléments finis du problème direct.

Deux modèles du problème inverse ont été considérés: le modèle 1 consiste à considérer le domaine constitué par les trois zones et à compléter les données sur la frontière Γ_{i1} (support de la fissure). Le modèle 2 consiste à considérer le domaine constitué des zones 1 et 2 seulement et à compléter les données sur la frontière Γ_{i2} . La figure VI présente le champ de déplacements identifié (u_1, v_1) et le champ exact (u_e, v_e) dans le cas du modèle 1. On remarque une bonne corrélation entre les deux champs. Le tableau I présente les facteurs intensité de contrainte en mode I, évalués à l'aide du problème direct et des deux problèmes inverses 1 et 2 sur trois contours différents. On remarque, ici aussi une bonne corrélation avec la valeur analytique.

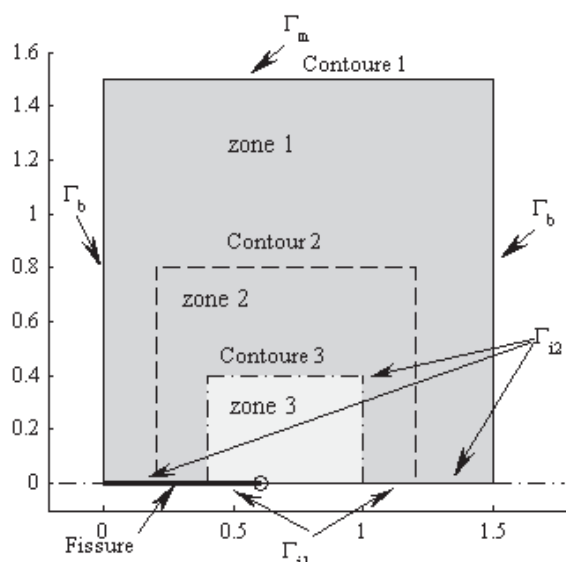


Figure V. Géométrie du modèle

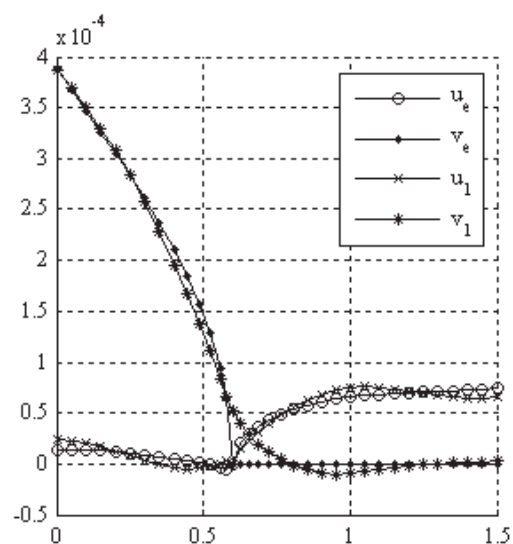


Figure VI. Champs de déplacements

K_i évalué sur le contour i	K_1 (MPa m ^{1/2})	K_2 (MPa m ^{1/2})	K_3 (MPa m ^{1/2})
Problème direct MEF	57.6901 (0.4%)	57.6805 (0.03%)	57.6606 (0.05%)
PI: Modèle 1: zone 1, 2, 3	58.1109 (0.7%)	58.7746 (1.9%)	58.1745 (0.8%)
PI: Modèle 2: zone 1 et 2	54.8813 (4.8%)	57.8499 (0.3%)	55.8745 (3.1%)

Tableau I. Comparaison des facteurs de concentration de contrainte évaluée à partir du problème direct et du problème inverse. La solution analytique donne $K=57.6633 \text{ MPa m}^{1/2}$

4. Conclusion

La méthode de prolongement par minimisation d'une erreur en énergie s'avère très performante sur des applications 3D ou présentant des singularités. L'extension à des phénomènes dépendant du temps. Enfin, pour envisager des applications plus réalistes, il est nécessaire de s'intéresser à la robustesse vis-à-vis du bruit de mesure et d'étudier les cas à petit nombre de données.

5. Bibliographie

- Andrieux S., Baranger T. N. and Ben Abda A., « Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional », *Inverse Problems*, 22 115-133, 2006.
- Baranger T. N. and Andrieux S., «An optimization approach for the Cauchy problem in linear elasticity», *J. Multidisciplinary Optimization*, to appear, 2007.
- Andrieux S., T. N. Baranger T.N. and A. Ben Abda A., «Data completion via an energy error functional », *C.R. Mécanique* **333**, 171-177, 2005.
- Koslov V.A., Maz'ya V.G. and Fomin A.V. «An iterative method for solving the Cauchy problem for elliptic equations», *Comput. Meth. Math. Phys.*, Vol. 31, N°1, 45-52, 1991.