



**HAL**  
open science

## Estimateurs d'erreur pour la méthode XFEM

Vanessa Lleras, Patrick Hild, Yves Renard

► **To cite this version:**

Vanessa Lleras, Patrick Hild, Yves Renard. Estimateurs d'erreur pour la méthode XFEM. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504168

**HAL Id: hal-01504168**

**<https://hal.science/hal-01504168>**

Submitted on 8 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Estimateurs d'erreur pour la méthode XFEM

**Vanessa Lleras <sup>1</sup>, Patrick Hild <sup>1</sup> et Yves Renard <sup>2</sup>**

<sup>1</sup>*Laboratoire de Mathématiques de Besançon  
Université de Franche-Comté / CNRS UMR 6623  
16 route de Gray, 25030 Besançon, France.  
vanessa.lleras@univ-fcomte.fr, patrick.hild@univ-fcomte.fr*

<sup>2</sup>*Pôle de Mathématiques, INSA de Lyon,  
Institut Camille Jordan, UMR CNRS 5208  
20 rue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne, France.  
yves.renard@insa-lyon.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce travail, on propose un estimateur d'erreur pour le problème d'élasticité linéaire en deux dimensions discrétisé par la méthode XFEM (eXtended Finite Element Method). On définit des estimations a posteriori de l'erreur basées sur la notion de résidu des équations d'équilibre et on met en exergue les bornes supérieure et inférieure de l'erreur de discrétisation.*

*ABSTRACT. This work presents an error estimator for the linear elasticity problem in two space dimensions approximated by the eXtended Finite Element Method (XFEM). A posteriori error estimations of residual type are defined and upper and lower bounds of the discretization error are proposed.*

*MOTS-CLÉS : Approximation par éléments finis, méthode XFEM, estimateur d'erreur par résidu.*

*KEYWORDS: Finite element approximation, XFEM method, residual error estimator.*

---

## 1. Introduction

Dans le contexte du calcul de structures, les méthodes d'éléments finis classiques utilisées pour la modélisation des fissures doivent respecter la géométrie de la fissure étudiée. Cette approche n'est pas très avantageuse dans la mesure où elle nécessite un grand nombre de degrés de liberté pour le raffinement en fond de fissure, ainsi qu'un remaillage lors de la propagation de la fissure. Ceci a motivé l'introduction de la méthode XFEM (eXtended Finite Element Method) par Moës, Dolbow et Belytschko en 1999 ((Moës *et al.*, 1999) et (Moës *et al.*, 2002a)). Cette approche permet de modéliser des discontinuités de type fissure dans un corps quelle que soit la position de la fissure par rapport au maillage et également de prendre mieux en compte la singularité en fond de fissure. La méthode XFEM a depuis été appliquée et étendue à divers autres problèmes ((Sukumar *et al.*, 2000) et (Moës *et al.*, 2002b) et (Gravouil *et al.*, 2002)) et des variantes visant à améliorer sa convergence ont été proposées et étudiées ((Laborde *et al.*, 2005) et (Béchet *et al.*, 2005) et (Chahine *et al.*, 2006) et (Chahine *et al.*, Soumis)). Ces deux dernières références établissent, en particulier, que la convergence de la méthode XFEM est quasi-optimale lorsque les fonctions singulières en pointe de fissure ont un support dont la taille est indépendante du paramètre de discrétisation.

Par ailleurs, si l'on désigne par  $u$  la solution d'un problème et par  $u^h$  la solution approchée donnée par une méthode d'éléments finis, il est souvent utile d'estimer l'erreur exacte  $\|u - u^h\|$  à l'aide d'une quantité  $\eta(u^h)$  calculable explicitement, que l'on appelle estimateur d'erreur a posteriori. Le développement d'estimateurs a posteriori sert à localiser les zones entachées d'erreur et également à effectuer des procédures d'adaptation de maillage afin d'optimiser la qualité d'un calcul pour un temps de calcul donné. Dans ce travail nous choisissons d'étudier des estimateurs d'erreur par résidu ((Babuska *et al.*, 1978) et (Verfürth, 1996)) afin d'évaluer la qualité d'un calcul obtenu par la méthode XFEM.

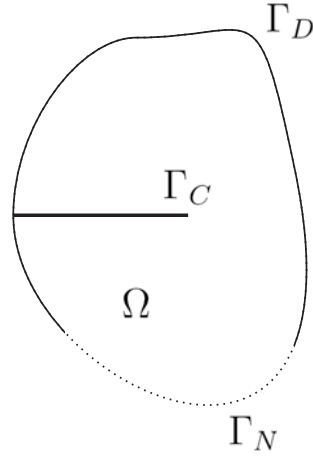
## 2. Le problème et sa discrétisation par la méthode XFEM

Soit  $\Omega$  un domaine borné fissuré de  $\mathbb{R}^2$ , de bord  $\Gamma$  où  $\Gamma_C \subset \Gamma$  représente la fissure rectiligne. Le corps élastique linéaire isotrope homogène est soumis à un encastrement sur  $\Gamma_D$ , à des densités de forces surfaciques nulles (pour simplifier) sur  $\Gamma_N$  et  $\Gamma_C$  et à des chargements volumiques  $f$ . Soit  $\mathcal{V} = \{v \in H^1(\Omega); v = 0 \text{ sur } \Gamma_D\}$  l'ensemble des champs de déplacements admissibles. On cherche  $u \in \mathcal{V}$  tel que

$$\int_{\Omega} \sigma(u) : \varepsilon(v) \, dx = \int_{\Omega} f \cdot v \, dx, \quad \forall v \in \mathcal{V} \quad [1]$$

où  $\sigma(\cdot)$  (resp.  $\varepsilon(\cdot)$ ) désigne le tenseur des contraintes (resp. déformations). On suppose que  $f$  est suffisamment régulière pour que la solution  $u$  du problème d'élasticité s'écrive comme somme d'une partie singulière  $u_s$  et d'une partie discontinue régulière satisfaisant (voir (Grisvard, 1985)) :

$$u - (K_1 u_I + K_2 u_{II}) = u - u_s \in H^{2+\epsilon}(\Omega),$$



**Figure 1.** Le domaine fissuré  $\Omega$

où  $K_I$ ,  $K_{II}$  sont les facteurs d'intensité de contrainte. Le comportement asymptotique en fond de fissure est défini par les fonctions  $u_I$  et  $u_{II}$ , données en coordonnées polaires par ((Lemaître *et al.*, 1994)) :

$$u_I = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \cos \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (3 - 4\nu - \cos \theta) \end{pmatrix},$$

$$u_{II} = \frac{1}{E} \sqrt{\frac{r}{2\pi}} (1 + \nu) \begin{pmatrix} \sin \frac{\theta}{2} (\delta + 2 + \cos \theta) \\ \sin \frac{\theta}{2} (\delta - 2 + \cos \theta) \end{pmatrix},$$

( $r$  : distance à la pointe de la fissure,  $E$  : module de Young,  $\nu$  : coefficient de Poisson,  $\delta = 3 - 4\nu$  en contraintes planes). La composante normale (resp. tangentielle) de la fonction  $u_I$  (resp.  $u_{II}$ ) est discontinue le long de la fissure.

Le principe de la méthode XFEM originale (Moës *et al.*, 1999) est d'utiliser un espace par éléments finis classique enrichi de quelques fonctions. Les nœuds dont la fonction de base a le support traversé par la fissure sont enrichis par une fonction de type Heaviside :

$$H(x) = +1 \quad \text{si } (x - x^*) \cdot n \geq 0, \quad \text{et } -1 \quad \text{ailleurs}, \quad [2]$$

où  $x^*$  désigne la pointe de la fissure et  $n$  est une normale à la fissure. De plus, les sommets du triangle contenant la pointe de la fissure sont enrichis par les fonctions singulières suivantes (en coordonnées polaires) :

$$\{F_j(x)\}_{1 \leq j \leq 4} = \left\{ \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2}, \sqrt{r} \sin \frac{\theta}{2} \sin \theta, \sqrt{r} \cos \frac{\theta}{2} \sin \theta \right\}. \quad [3]$$

Comme le maillage est indépendant de la géométrie de la fissure, la fonction de Heaviside traduit la discontinuité du champ de déplacements le long de la fissure et les

fonctions singulières représentent la singularité en pointe de fissure. Une telle méthode permet de discrétiser le domaine sans remailler les surfaces fissurées.

On approche le problème par une méthode d'éléments finis affines définie sur une triangulation régulière ( $h$  désigne le paramètre de discrétisation) sur le domaine non fissuré  $\overline{\Omega}$  (voir (Ciarlet, 1978)). Les fonctions chapeau sont notées  $\varphi_i$ ,  $i \in I$  ( $I$  : ensemble des nœuds du maillage). La variante de la méthode XFEM, (Chahine *et al.*, 2006) consiste à introduire une fonction cut-off notée  $\gamma$  de sorte que l'espace enrichi devient :

$$\mathcal{V}^h = \left\{ v^h = \sum_{i \in I} a_i \varphi_i + \sum_{i \in I_H} b_i H \varphi_i + \sum_{j=1}^4 c_j F_j \gamma = v_r^h + \gamma v_s^h \right\}, \quad [4]$$

où :  $a_i, b_i, c_j \in \mathbb{R}^2$ ,  $I_H$  désigne l'ensemble des nœuds enrichis par la fonction Heaviside donnée en (2),  $F_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , sont les fonctions singulières données en (3),  $\gamma$  est une fonction cut-off  $C^2$  telle qu'il existe  $0 < r_0 < r_1$  avec  $\gamma(r) = 1$  si  $r < r_0$ ,  $0 < \gamma(r) < 1$  si  $r_0 < r < r_1$ ,  $\gamma(r) = 0$  si  $r_1 < r$ .

Le problème discret s'écrit : trouver  $u^h \in \mathcal{V}^h$  tel que

$$\int_{\Omega} \sigma(u^h) : \varepsilon(v^h) dx = \int_{\Omega} f \cdot v^h dx, \quad \forall v^h \in \mathcal{V}^h. \quad [5]$$

Ce problème admet une unique solution.

Dans (Chahine *et al.*, 2006) et (Chahine *et al.*, Soumis), l'estimation quasi-optimale suivante est établie, avec  $C$  indépendante de  $\Omega$  :

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} \leq Ch \|u - \gamma u_s\|_{H^{2+\epsilon}(\Omega)}.$$

### 3. Un estimateur d'erreur par résidu

Comme les éléments de la triangulation régulière  $T^h$  de  $\overline{\Omega}$  ne coïncident pas avec la géométrie de  $\Omega$  sur la fissure, on définit l'ensemble des éléments généralisés  $G^h$  contenant les éléments suivants :

- les triangles  $T$  dont l'intérieur admet une intersection vide avec la fissure,
- les triangles et quadrangles obtenus en divisant un triangle coupé par la fissure,
- le triangle fissuré contenant la pointe de fissure.

Le résidu d'équilibre est défini sur chaque élément généralisé  $K \in G^h$  par

$$R_K = f + \operatorname{div} \sigma(u^h) = f + \operatorname{div} \sigma(\gamma u_s^h), \quad \text{sur } K,$$

où  $u^h = u_r^h + \gamma u_s^h$  (conformément aux notations de 4). Comme  $\operatorname{div} \sigma(u_I) = \operatorname{div} \sigma(u_{II}) = 0$ , on déduit que  $\operatorname{div} \sigma(\gamma u_s^h)$  s'annule sauf sur les éléments (éloignés de la pointe de la fissure) ayant une intersection non vide avec la couronne où  $\gamma$  est à valeurs dans  $]0, 1[$ .

**Definition 3.1 (Estimateur d'erreur)** Soit  $K \in G^h$  et  $T \in T^h$  le triangle contenant  $K$ . Les estimateurs d'erreur résiduelle local et global sont définis par

$$\eta_K^2 = h_T^2 \|R_K\|_{L^2(K)}^2 + h_T \sum_{E \in E_K} \|J_{E,n}(u^h)\|_{L^2(E)}^2,$$

$$\eta^2 = \sum_{K \in G_h} \eta_K^2,$$

où  $h_T$  désigne le diamètre de  $T$ ,  $E_K$  est l'ensemble des côtés de  $K$  n'appartenant pas à  $\Gamma_D$  et  $J_{E,n}(u^h)$  désigne le saut du vecteur contrainte  $\sigma(u^h)n$  ( $n$  est une normale unitaire au côté  $E$ ) à la traversée de  $E$ .

On obtient la majoration suivante de l'erreur de discrétisation :

**Theoreme 3.2** Soit  $u$  la solution de (1) et  $u^h$  la solution de (5). Alors on a

$$\|u - u^h\|_{H^1(\Omega)} \leq C\eta,$$

où  $C$  ne dépend pas de  $h$ .

Cette majoration est similaire à celle obtenue pour une méthode par éléments finis classique (sans les fonctions d'enrichissement). Toutefois l'analyse numérique de l'estimateur pour la méthode XFEM nécessite l'introduction et l'étude d'opérateurs d'interpolation spécifiques. Les détails sont consignés dans (Lleras, en préparation).

Nous travaillons actuellement sur la minoration locale de l'erreur en vue d'obtenir une estimation du type suivant : pour tout élément  $K \in G^h$ , on a

$$\eta_K \leq C \|\tilde{u} - \tilde{u}^h\|_{H^1(\omega_T)},$$

où  $\tilde{u}$  et (resp.  $\tilde{u}^h$ ) sont des prolongements spécifiques de  $u$  (resp.  $u^h$ ) au travers de la fissure (voir (Evans, 1999)),  $T \in T^h$  est le triangle contenant  $K$  et  $\omega_T$  désigne l'union de tous les éléments de  $T^h$  ayant une intersection non vide avec  $T$ .

#### 4. Travaux en cours et perspectives

Nous entamons cette étude d'estimateurs d'erreur pour la méthode XFEM en commençant par chercher un estimateur pour un corps élastique fissuré. Nous avons choisi un estimateur d'erreur par résidu pour notre étude tout en gardant à l'esprit que d'autres estimateurs, tels les estimateurs en relation de comportement ((Ladevèze, 1975) et (Ladevèze *et al.*, 1983)) peuvent également être étudiés. Ensuite nous envisageons de traiter le cas d'un problème de contact (avec ou sans frottement) ce qui compliquera sensiblement l'analyse numérique. Dans le cas de prise en compte du frottement de Coulomb, nous comptons utiliser un résultat récent obtenu dans (Renard, 2006) qui établit des conditions d'unicité pour le problème continu de frottement. Les simulations numériques utilisant le logiciel GETFEM++ (voir [www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem/](http://www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem/)) sont en cours de réalisation.

## 5. Bibliographie

- Babuska I., Rheinboldt W., « Error estimates for adaptive finite element computations », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 15, p. 736-754, 1978.
- Béchet E., Minnebo H., Moës N., Beugardt B., « Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 64, p. 1033-1056, 2005.
- Chahine E., Laborde P., Renard Y., « A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM », *C. R. Acad. Sci. Paris*, vol. 342, p. 527-532, 2006.
- Chahine E., Laborde P., Renard Y., « Crack tip enrichment in XFEM using a cut-off function », Soumis.
- Ciarlet P., *The finite element method for elliptic problems*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
- Evans L., *Partial differential equations*, American mathematical society, Providence, Rhode island, 1999.
- GETFEM++, [www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem/](http://www-gmm.insa-toulouse.fr/getfem/), n.d.
- Gravouil A., Moës N., Belytschko T., « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part II : Level set update », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 53, p. 2569-2586, 2002.
- Grisvard P., *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman, Boston-London-Melbourne, 1985.
- Laborde P., Renard Y., Pommier J., Salaun M., « High order extended finite element method for cracked domain », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 64, p. 354-381, 2005.
- Ladevèze P., Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse, Université Paris 6, 1975.
- Ladevèze P., Leguillon D., « Error estimate procedure in the finite element method and applications », *SIAM J. Numer. Anal.*, vol. 20, p. 485-509, 1983.
- Lemaître J., Chaboche J.-L., *Mechanics of solids materials*, Cambridge university press, 1994.
- Lleras V., en cours, Thèse de doctorat, Université de Besançon, en préparation.
- Moës N., Belytschko T., « XFEM : nouvelles frontières pour les éléments finis », *Revue européenne des éléments finis (Calcul des structures GIENS'01)*, vol. 11, p. 305-318, 2002a.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for cracked growth without remeshing », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Moës N., Gravouil A., Belytschko T., « Non-planar 3D crack growth by the extended finite element and level sets. Part I : Mechanical model », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 53, p. 2549-2568, 2002b.
- Renard Y., « A uniqueness criterion for the Signorini problem with Coulomb friction », *SIAM J. Math. Anal.*, vol. 38, no. 2, p. 452-467, 2006.
- Sukumar N., Moës N., Moran B., Belytschko T., « Extended finite element method for three dimensional crack modelling », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 48, p. 1549-1570, 2000.
- Verfürth R., *A review of a posteriori error estimation and adaptative meshrefinement techniques*, Wiley and Teubner, Chichester and Stuttgart, 1996.