



**HAL**  
open science

## Méthodes sans maillage et matériaux aléatoires

Serge Dumont, Frédéric Lebon

► **To cite this version:**

Serge Dumont, Frédéric Lebon. Méthodes sans maillage et matériaux aléatoires. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504162

**HAL Id: hal-01504162**

**<https://hal.science/hal-01504162v1>**

Submitted on 8 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Méthodes sans maillage et matériaux aléatoires

**Serge Dumont\* et Frédéric Lebon\*\***

\* *LAMFA CNRS UMR 6140, UPJV, 33, rue Saint-Leu, 80039 Amiens*  
*serge.dumont@u-picardie.fr*

\*\* *LMA CNRS UPR 7051, Université de Provence, 31, Chemin Joseph Aiguier, 13402*  
*Marseille cedex 20*  
*lebon@lma.cnrs-mrs.fr*

---

*RÉSUMÉ. Lors de cette étude, nous nous sommes intéressé aux propriétés mécaniques d'un matériau aléatoire linéaire, c'est à dire d'un matériau dont les microstructures sont définies par un procédé stochastique. Les résultats numériques ont été obtenus à l'aide d'un schéma numérique basé sur la transformée en ondelettes associé à des techniques d'homogénéisation. Après avoir présenté plus précisément le problème mécanique et les techniques pour le résoudre, nous allons montrer des résultats numériques qui seront comparés aux bornes de Hashin et Shtrikman.*

*ABSTRACT. This paper is devoted to the statistical study of the effective linear properties of random materials, that is to say microstructures are random lattices given by a stochastic process. The local numerical procedure associated to homogenization techniques is based on a wavelet-element method. The numerical results are compared with classical theories. A new approach is obtained in order to determine these effective properties if the details of the microstructure are not well-known.*

*MOTS-CLÉS : Méthodes sans maillage, Ondelettes, Homogénéisation, Matériaux aléatoires.*

*KEYWORDS: Meshless methods, Wavelets, Homogenization, Random materials.*

---

## 1. Introduction

Le propos de cet article est de déterminer et de calculer les propriétés effectives de milieux hétérogènes, linéaires et aléatoires. Même si les géomatériaux naturels sont hétérogènes, on peut les voir comme étant homogènes avec des propriétés effectives qui approchent le comportement global sous certaines sollicitations. Les sols, par exemple, sont souvent modélisés comme des corps constitués de matériaux homogènes ayant des propriétés effectives de ce type. Le comportement de ces sols ne peut être prédit sans la connaissance précise des propriétés effectives. Il est nécessaire d'introduire des informations plus détaillées sur la microstructure. Ces dernières années, on peut trouver dans la littérature des mesures, des techniques empiriques et théoriques afin de déterminer ces propriétés effectives. Malheureusement, le coût nécessaire à la résolution de tels problèmes peut être prohibitif. Dans des articles précédents, les auteurs ont présenté des schémas numériques associées à des techniques d'homogénéisation afin de prendre en compte les détails de la microstructures (Dumont *et al.*, 1996a, Dumont *et al.*, 1996b, Dumont *et al.*, 1999, Dumont *et al.*, 2000, Lebon, 2000). Ces algorithmes sont basés sur les bases d'ondelettes et permettent de prédire les propriétés effectives à partir de la connaissances de la microstructure. Il est donc possible d'analyser de façon optimale des matériaux composites linéaires à partir de l'image réelle d'un échantillon.

Malheureusement, dans le cas où les détails de la microstructure ne sont pas parfaitement connus, on doit déterminer les propriétés effectives à l'aide d'études statistiques. Dans (Torquato, 1991), Torquato a présenté des résultats concernant le cas où des informations statistiques partielles, comme des fonctions de corrélation, sont données. Des bornes des propriétés effectives améliorées d'un matériau homogène aléatoire à deux phases ont été obtenues. Dans cet article, on suppose que seule la fraction volumique de chaque phase est connue, et l'on veut obtenir les propriétés effectives moyennes du composite. De plus, on suppose que la microstructure est donnée pixel par pixel i.e. la microstructure est constituée de petits carrés de longueur caractéristique la longueur du pixel.

Dans la section 2, on présente les notations et le problème mécanique. La Section 3 est consacrée à l'algorithme. Dans la section 4, on présente deux études statistiques pour un composite Aluminium/Carbure de Silicium et pour un composite résine/verre. Les résultats obtenus sont comparés avec les bornes de Hashin et Shtrikman (Hashin *et al.*, 1963) et avec le schéma self-consistent (Hill, 1965, Peyroux, 1990). A la fin de l'article, des perspectives sont présentées.

## 2. Le problème mécanique

Considérons un composite constitué de deux matériaux élastiques isotropes. Nous supposons que seule la proportion de chaque matériau est connue, la répartition de ces deux matériaux dans le composite étant aléatoire. Lorsque l'on désire déterminer le comportement d'un matériau homogène équivalent, il est tout d'abord nécessaire

de réaliser une étape d'homogénéisation (Bensoussan *et al.*, 1978). Par la suite, nous allons considérer un composite plan occupant une région  $\Omega$  (échelle macroscopique, repérée par la variable  $x$ ), périodique de cellule de base carrée  $Y$  (microscopique, repérée par la variable  $y$ ). En d'autres termes, les coefficients d'élasticité  $C_{ijkl}^\varepsilon$  sont supposés  $Y$ -périodiques. A l'échelle macroscopique, le problème d'élasticité s'écrit donc

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad [1]$$

$$\text{où } a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega C_{ijkl}^\varepsilon e_{kl}(u) e_{ij}(v) \, dx, \quad e_{kl}(v) = \frac{1}{2}(u_{k,l} + u_{l,k}), \quad L(v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_{\partial_1 \Omega} F v \, dl, \text{ et } V = \{v \in (H^1(\Omega))^2, v = 0 \text{ sur } \partial_2 \Omega\}.$$

Lorsque la taille  $\varepsilon$  de  $Y$  tend vers 0, la solution  $u^\varepsilon$  de (1) tend vers  $u$  dans  $V$ , où  $u$  est la solution du problème

$$\text{Trouver } u \in V \text{ tel que } a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in V \quad [2]$$

$$\text{où } a(u, v) = \int_\Omega A_{ijkl} e_{kl}(u) e_{ij}(v) \, dx, \text{ avec } A_{ijkl} = \frac{1}{|Y|} \int_Y (C_{ijkl} + C_{ijpq} e_{pq}(u^{kl})) \, dy.$$

La détermination du déplacement  $u^{kl}$  nécessite la résolution de trois problèmes sur la cellule de base  $Y$  dans l'espace  $H = (H_{per}^1(Y))^2$ , du type

$$E^{ij} \text{ donné, trouver } u^{ij} \in H \text{ tel que } a_Y(u^{ij}, v) = \ell(v) \quad \forall v \in H, \quad [3]$$

$$\text{où } a_Y(u, v) = \int_Y C_{ijkl}(y) e_{ij}(u) e_{kl}(v) \, dy \text{ et } \ell(v) = \int_Y C_{ijkl}(y) E^{ij} e_{kl}(v) \, dy.$$

### 3. Approximation numérique

Afin de ne pas avoir à faire un maillage de la cellule de base après chaque tirage, nous avons choisi de discrétiser le problème [3] à l'aide d'une méthode sans maillage, la transformée en ondelettes (Daubechies, 1992, Dumont *et al.*, 1996b). De plus, comme nous allons le voir par la suite, le calcul des éléments de la matrice de rigidité est fait à l'avance, une fois pour toute. Ces coefficients ne dépendent pas de la géométrie du matériau, mais la géométrie indique seulement la place que doit prendre chaque élément dans la matrice de rigidité. De plus, grâce à la bonne localisation des ondelettes à la fois dans l'espace physique et dans l'espace spectral, la matrice de rigidité est bien conditionnée.

Plus précisément, la solution  $u$  de [3] est approchée par

$$u(y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}^2, j \geq 0} u_{jk} \Psi_{jk}(y) \quad y \in Y \quad [4]$$

où  $\Psi_{jk}(y) = 2^{j/2} \Psi(2^j y - k)$  est une fonction de forme localisée autour du point  $y = 2^{-j} k \in Y$ . La fonction  $\Psi$  étant à support compact, les coefficients dans la somme

[4] sont donc en nombre fini, on peut donc écrire la somme sur un sous-ensemble fini  $\Lambda_j$  de  $\mathbb{Z}^2$ .

A l'aide de ce type de fonction test, la projection de l'opérateur d'élasticité linéaire :

$$a(u, v) = \int_Y C e(u) : e(v) dy \quad [5]$$

est une matrice  $\mathcal{K}$  définie par

$$[\mathcal{K}] = [\mathcal{K}_{i\ell}]_{i, \ell \in \Lambda_j} \quad [6]$$

où  $\mathcal{K}_{i\ell}$  est une matrice élémentaire  $2 \times 2$

$$\mathcal{K}_{i\ell} = \begin{bmatrix} F_{11}^{11} + F_{22}^{33} & F_{12}^{12} + F_{21}^{33} \\ F_{21}^{12} + F_{12}^{33} & F_{22}^{22} + F_{11}^{33} \end{bmatrix},$$

$$\text{avec } F_{\eta\xi}^{\alpha\beta} = \int_Y C_{\alpha\beta}(x) \Psi_{ji,\eta}(y) \Psi_{j\ell,\xi}(y) dy.$$

Ensuite, les coefficients  $C_{\alpha\beta}$  étant constant par morceaux, on peut, en définissant l'ondelette de Haar définie sur  $\mathbb{R}$  :

$$\theta(y) = \begin{cases} 1 & \text{si } y \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

écrire  $C_{\alpha\beta}$  sous la forme (on omettra par la suite  $\alpha$  et  $\beta$ ) :

$$C(y) = \sum_{n \in \mathbb{Z}^2} C_n \Theta_{jn}(y)$$

où  $\Theta_{jn}(y) = 2^j \theta(2^j y_1 - n_1) \theta(2^j y_2 - n_2)$ . Les éléments de la matrice de rigidité sont alors calculés à partir de coefficients du type

$$\int_Y \Theta_{jn}(y) \Psi_{jk,\eta}(y) \Psi_{j\ell,\xi}(y).$$

Ces coefficients sont calculés une fois pour toute et de façon exacte, par la diagonalisation d'une matrice de petite dimension. Pour les détails sur les calculs de la matrice de rigidité, voir (Dumont *et al.*, 1996a, Dumont *et al.*, 1996b).

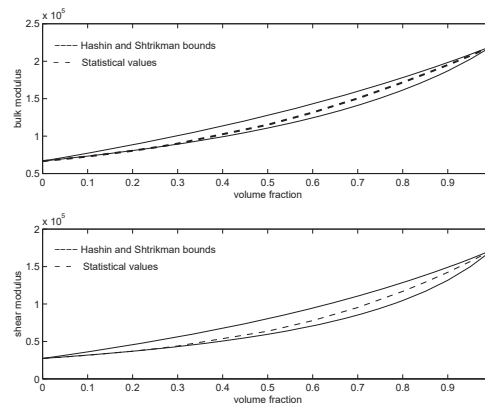
#### 4. Résultats numériques

Nous allons présenter des résultats dans le cas d'un alliage carbure de silicium/aluminium puis d'un alliage résine/verre. Pour chacun de ces deux alliages, nous allons étudier l'influence de deux paramètres : la fraction volumique de chaque composante (par exemple silicium et aluminium), ainsi que la distribution de chaque

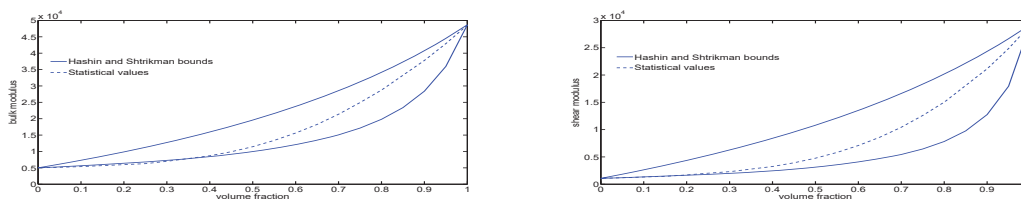
matériau dans la microstructure. Pour chaque fraction volumique, nous avons procédé à 5000 tirages aléatoires et nous avons étudié statistiquement les résultats.

La moyenne des tenseurs d'élasticité obtenue pour chacun des deux alliages est le tenseur d'un matériau homogène, linéaire et isotrope, et ce, pour toutes les fractions volumiques. Il est donc possible de comparer le module de Young et le coefficient de cisaillement du matériau limite (moyenne des matériaux sur un grand nombre de tirage) aux bornes données par Hashin et Shtrikman (Hashin *et al.*, 1963).

C'est ce que montre les deux figures suivantes.



**Figure 1.** Modules de cisaillement et de rigidité, bornes de Hashin et Shtrikman (Al-SiC)



**Figure 2.** Modules de cisaillement et de rigidité, bornes de Hashin et Shtrikman (résine-verre)

On observe que dans les deux cas, pour une faible fraction volumique du matériau le plus rigide, le matériau limite se comporte comme la plus petite des bornes de Hashin et Shtrikman. Au contraire, pour une grande proportion du matériau le plus rigide, le matériau limite a des propriétés moyennes par rapport aux bornes de Hashin et Shtrikman.

## 5. Conclusion et perspectives

Généralement, il est impossible de déterminer les propriétés effectives d'un matériau hétérogène aléatoire. Dans la littérature, les études rigoureuses de ces propriétés

effectives prennent la forme de bornes. Dans ce papier, nous obtenons un autre type de bornes sous la forme d'une moyenne et d'un écart type. Un résultat important est la convergence numérique du processus stochastique d'homogénéisation vers une solution moyenne. En d'autres termes, la limite quand le nombre de tirages tend vers l'infini, de l'énergie potentielle correspondant à un matériau aléatoire est l'énergie potentielle d'un matériau homogène isotrope. Deux poursuites de ce travail sont possibles : la première est l'étude de l'influence de la forme de chaque matériau dans la microstructure. On peut étudier différentes morphologie : croix, forme en L, ... Une autre voie de recherche est l'étude de propriétés effectives de comportements plus complexes : couplage piézoélectrique, thermomécanique, plasticité (Lebon *et al.*, 2006), ... . L'efficacité de cette méthode nous permet d'envisager ce type de problèmes.

## 6. Bibliographie

- Bensoussan A., Lions J., Papanicolaou G., *Asymptotic analysis for periodic structures*, 1st edn, North-Holland, 1978.
- Daubechies I., « Orthonormal bases of compactly supported wavelets », *Communication in Pure and Applied Mathematics*, vol. 41, p. 909-998, 1992.
- Dumont S., Lebon F., « Representation of plane elastostatics operators in Daubechies wavelets », *Computers and Structures*, vol. 60, p. 561-569, 1996a.
- Dumont S., Lebon F., « Wavelet-Galerkin method for heterogeneous media », *Computers and Structures*, vol. 61, p. 55-65, 1996b.
- Dumont S., Lebon F., « Wavelet-Galerkin method for plane elasticity », *Computational and Applied Mathematics*, vol. 8, p. 127-142, 1999.
- Dumont S., Lebon F., Ould-Khaoua A., « A Numerical tool for periodic heterogeneous media. Application to interface in Al/SiC composites », *Journal of Applied mechanics*, vol. 67, p. 214-217, 2000.
- Hashin Z., Shtrikman S., « A variational approach to the theory of the elastic behaviour of multiphase materials », *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 11, p. 127-140, 1963.
- Hill R., « A self-consistent mechanics of composite materials », *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, vol. 13, p. 213-222, 1965.
- Lebon F., « Small parameter, homogenization and wavelets », *Ciencias Matematicas*, vol. 18, p. 191-200, 2000.
- Lebon F., Rodriguez R., Lopez-Realpozo J., Bravo-Castillero J., Guinovart-Diaz R., Mesejo A., « Effective properties of nonlinear laminated composites with perfect adhesion », *ASME Journal of Applied Mechanics*, vol. 73, p. 174-178, 2006.
- Peyroux R., Caractéristiques thermoélastiques de matériaux composites à fibres courtes, PhD thesis, 1990.
- Torquato S., « Random heterogeneous media : Microstructure and improved bounds on effective properties », *Applied Mechanics Review*, vol. 44, p. 37-76, 1991.