



HAL
open science

Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines

Nadia Elkhodja, Hachmi Ben Dhia, François-Xavier Roux

► **To cite this version:**

Nadia Elkhodja, Hachmi Ben Dhia, François-Xavier Roux. Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. pp.467-472. hal-01504127

HAL Id: hal-01504127

<https://hal.science/hal-01504127v1>

Submitted on 8 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Modélisation de structures multi-défauts dans le cadre Arlequin et approches par sous-domaines

Nadia Elkhodja ^{*,**}, Hachmi Ben Dhia ^{*}, François-Xavier Roux ^{**}

^{*} Ecole Centrale Paris, Laboratoire MSSMat UMR 8579 ECP 92295 Châtenay-Malabry cedex France

{nadia.elkhodja,hachmi.ben-dhia}@ecp.fr

^{**} ONERA - Centre de Chatillon 29 Av. de la Div. Leclerc, BP 72, F-92322 Châtillon francois-xavier.roux@onera.fr

RÉSUMÉ. La méthode Arlequin a été utilisée avec succès pour altérer de manière flexible une structure saine, en superposant un modèle local (ou patch) altéré à un modèle global donné. Ce travail s'inscrit dans un double objectif. Le premier est l'extension de cette méthode à la multi-altération des structures, par superposition de plusieurs patches, tout en tenant compte des inter-actions entre ces patches. Le second est la résolution numérique performante des problèmes Arlequin discrets dérivés de cette modélisation multi-patches par des Méthodes de Décomposition de Domaines.

ABSTRACT. The Arlequin method has been successfully used to alterate a given safe structure by super-imposing a local altered model (or patch) to a global given model. This paper aims on the one hand to extend the Arlequin method to the multi-alteration of a given global model, while analyzing the interactions between these alterations, and on the other hand to solve efficiently the obtained discrete Arlequin problems by means of Decomposition Domain Solvers.

MOTS-CLÉS : multi-domaine, multi-patch, multi-échelle, défaut, sous-structuration, couplage, recouvrement, méthode Arlequin.

KEYWORDS: multidomain, multipatch, multiscale, defect, substructuring, coupling, overlapping, Arlequin method.

1. Introduction

Procédant par superposition d'un modèle local (ou patch), le cadre multi-modèle Arlequin (Ben Dhia, 1998, Ben Dhia, 1999) permet, avec grande flexibilité, quasiment tout type d'altération locale d'un modèle numérique existant ainsi que des analyses numériques et/ou physiques locales plus avancées de ce modèle. Cette méthode a été testée avec succès pour insérer un trou, une inclusion, une fissure, un changement de modèle de structure, etc.(cf. eg. (Ben Dhia *et al.*, 2005)). Toutefois, la multi-altération avec la considération des interactions entre altérations, n'a pas été étudiée. De plus, la structure algébrique même des problèmes Arlequin, dans leur version mixte, n'a pas été exploitée en terme de recherche de solveurs performants. L'objectif de ce travail est de ce fait double. Le premier est de chercher à étendre la méthode Arlequin à l'analyse des structures multi-altérées, telle qu'une aube de turbine multi-perforée, représentée par la Figure 1. L'un des points clé de cette extension est la mise en oeuvre d'une stratégie d'évaluation du degré de couplage inter-patches, ainsi que le développement de méthodes permettant le dialogue entre les patches si ce dernier est suffisamment fort. Vu sous un angle numérique, les problèmes discrets que l'on peut dériver des problèmes Arlequin mixte par la méthode des éléments finis ont une structure semblable à ceux que l'on obtient par des Méthodes de Décomposition de Domaines (eg. (Farhat *et al.*, 1991), (Mandel, 1993), (LeTallec *et al.*, 1994)). La recherche de la performance, (voire de la simple faisabilité) pour la résolution de problèmes complexes de structures industrielles multi-altérées nous pousse donc à explorer les potentialités des Solveurs Sous-Domaines, tout en analysant l'impact des ingrédients du cadre Arlequin, et notamment des opérateurs de couplage, sur la performance des calculs. Ceci forme notre second objectif.

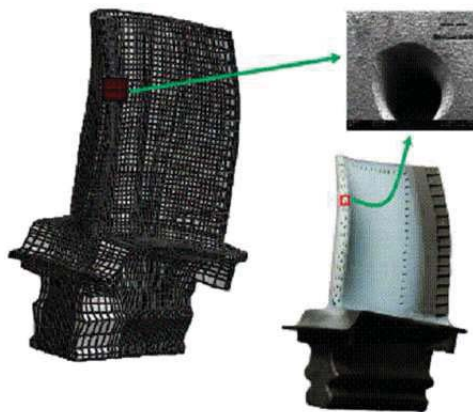


Figure 1- Nouvelle aube de turbine

Ce papier est structuré comme suit. En section 2, et dans le cadre de l'élasticité linéaire, nous donnons une écriture continue d'un problème Arlequin mixte, à un patch. Dans la section 3, ce modèle est utilisé pour calculer un problème de barre élastique dont la raideur est affaiblie en deux zones localisées. L'analyse des résultats numériques permet d'établir, dans le cas d'altérations relativement proches, que le maintien de l'intégrité du maillage du modèle substrat passe par l'introduction d'un patch de transition. La dernière section est consacrée à la proposition et la discussion de

Solveurs de Décomposition de Domaines pour la résolution des problèmes Arlequin discrets.

2. La méthode Arlequin

A titre d'exemple et par souci de simplicité du problème mathématique, nous considérons ici le cas d'une structure occupant l'adhérence d'un domaine Ω_g , contenant une inclusion dont l'adhérence est inclus dans l'adhérence du domaine Ω_l . Le problème Arlequin mixte, avec couplage de type énergétique s'écrit :

$$\begin{aligned} & \text{Trouver } (\mathbf{u}_g, \mathbf{u}_l, \boldsymbol{\lambda}) \in \mathbf{W}_g \times \mathbf{W}_l \times M ; \\ \forall \mathbf{v}_g \in \mathbf{W}_g, & \int_{\Omega_g} \alpha_g \boldsymbol{\sigma}_g(\mathbf{u}_g) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_g) + \int_{S_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_g + \ell^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_g) \\ & = \int_{\Omega_g} \beta_g \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_g \end{aligned} \quad [1]$$

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{v}_l \in \mathbf{W}_l, & \int_{\Omega_l} \alpha_l \boldsymbol{\sigma}_l(\mathbf{u}_l) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_l) - \int_{S_c} \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{v}_l + \ell^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\lambda}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{v}_l) \\ & = \int_{\Omega_l} \beta_l \mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_l \end{aligned} \quad [2]$$

$$\forall \boldsymbol{\mu} \in M, \quad \int_{S_c} \boldsymbol{\mu} \cdot (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) + \ell^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\mu}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) = 0 \quad [3]$$

où ℓ^2 , \mathbf{f} , $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}_g$, $\boldsymbol{\sigma}_l$, M , \mathbf{W}_g , \mathbf{W}_l et S_c représentent respectivement un paramètre d'homogénéisation, la densité volumique de forces appliquées, les tenseurs des déformations et des contraintes globales et locales, associés aux tenseurs des déformations par la loi de Hooke, les espaces admissibles et la zone de collage, entourant le voisinage de l'inclusion et dont la frontière contient celle de Ω_l . Les couples (α_g, α_l) et (β_g, β_l) désignent les partitions unitaires des énergies interne et externe. Ils mesurent la pondération des modèles. En considérant plusieurs patches disjoints, on peut facilement généraliser l'écriture ci-dessus et obtenir un problème Arlequin multi-altéré. Ce problème peut être discrétisé par la méthode des éléments finis. Dans la section qui suit, nous étudions numériquement le cas très simple d'une structure bi-altérée.

3. Analyse d'un cas 1D avec deux inclusions

On considère une barre élastique dont le module de Young est $E_1 = 1$, sauf en deux zones de très faibles tailles relatives dont le module de Young E_2 vaut 10^{-2} . La barre est soumise à une densité "volumique" d'efforts (cf Figure 2, à gauche). Deux modèles EF fins locaux, englobant chacun une des deux zones d'affaiblissement, sont superposés à un modèle EF grossier de la barre substrat, dans le cadre Arlequin. Les modèles

locaux sont fortement pondérés. Les solutions obtenues lorsque les deux défauts sont, soit séparés par des éléments macro., soit intra-élémentaire global, sont données et comparées à la solution classique obtenue pour un mono-modèle EF fin, affaibli.

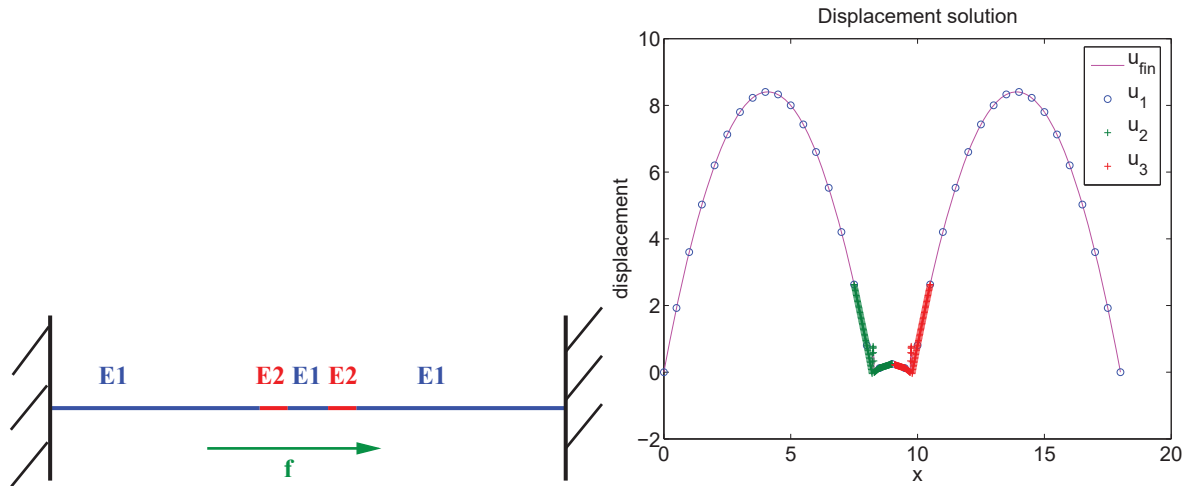


Figure 2- Solution en déplacement pour une barre contenant deux altération

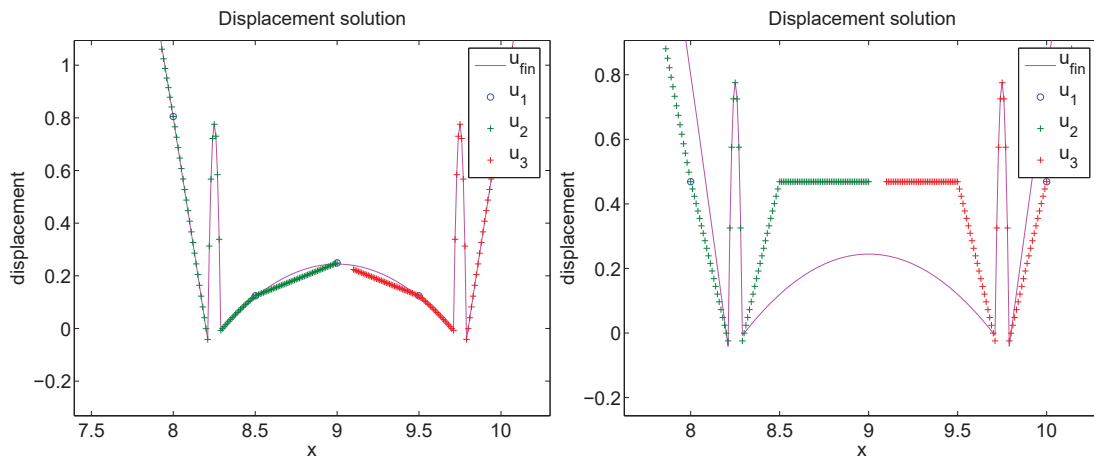


Figure 3- Zoom au niveau des deux altérations

La solution Arlequin discrète, correspondant au cas de la séparation des patches, est représentée sur la figure 2, à droite. Deux zooms sont opérés pour les cas de séparation et non séparation des patches et donnés par la figure 3. On constate que lorsque le maillage du modèle substrat est grossier par rapport à la taille des patches et à la distance inter-patches, générant une situation de patches intra-élémentaire du modèle substrat, la solution Arlequin n'est pas précise (figure 3, à droite). Elle est localement verrouillée sur la solution grossière du modèle substrat. Ce dernier n'est pas suffisamment riche pour transmettre les bonnes informations aux modèles locaux. Un léger raffinement du maillage substrat corrige la situation (figure 3, à gauche). Toutefois, pour permettre le maintien de l'intégrité du maillage du modèle substrat, et donc de la flexibilité de la méthode, on peut introduire un troisième patch ou patch de transition

assurant le dialogue entre le modèle grossier et les modèles fins. Cette méthodologie est en cours d'étude.

4. Stratégie de résolution par sous-domaine

On s'intéresse maintenant à la résolution idoine des problèmes Arlequin mixtes discrets. Compte tenu de leur structure algébrique, on cherche à mettre en oeuvre le solveur itératif le mieux adapté à leur résolution par des machines parallèles. Pour discrétiser le problème (1-3), on utilise la méthode des éléments finis, on obtient ainsi le système matriciel suivant :

$$\text{Trouver } (\mathbf{U}_g, \mathbf{U}_l, \mathbf{\Lambda}) \in \mathbb{R}^{N_g \times d} \times \mathbb{R}^{N_l \times d} \times \mathbb{R}^{N_c \times d};$$

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_g & \mathbf{0} & \mathcal{C}_g^T \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}_l & -\mathcal{C}_l^T \\ \mathcal{C}_g & -\mathcal{C}_l & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_g \\ \mathbf{U}_l \\ \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_g \\ \mathcal{F}_l \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad [4]$$

où \mathcal{K}_g , \mathcal{K}_l , \mathcal{F}_g , \mathcal{F}_l , \mathcal{C}_g et \mathcal{C}_l sont les opérateurs discrets de rigidités, forces et coupages. Compte tenu des conditions limites et du fait que l'on traite le cas d'une inclusion, la matrice \mathcal{K}_g est régulière, tandis que le noyau de \mathcal{K}_l n'est pas réduit à $\{\mathbf{0}\}$ et est formé par les modes de corps rigides infinitésimaux sur Ω_l . Afin de résoudre par une méthode de sous-structuration le système (4), on s'inspire de la stratégie des approches duales. Celle-ci consiste à exprimer les vecteurs \mathbf{U}_g et \mathbf{U}_l en fonction de $\mathbf{\Lambda}$, et à résoudre, de manière itérative l'équation résultante en $\mathbf{\Lambda}$. Pour cela, on substitue \mathbf{U}_g et \mathbf{U}_l dans la dernière équation du système (4), nous obtenons alors un problème condensé sur la zone de collage avec l'équation des multiplicateurs. Toutefois, comme dans notre cas, la matrice \mathcal{K}_l n'est pas régulière, on ne peut inverser le système suivant :

$$\begin{bmatrix} \mathcal{K}_g & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathcal{K}_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{U}_g \\ \mathbf{U}_l \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathcal{F}_g - \mathcal{C}_g^T \mathbf{\Lambda} \\ \mathcal{F}_l + \mathcal{C}_l^T \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \quad [5]$$

Il nous faut donc traiter les mouvements de corps rigides. Pour ce faire, on peut utiliser plusieurs solutions. Nous en détaillons deux.

4.1. Méthode de pénalisation-dualité

La méthode de pénalisation consiste à régulariser le système (5) en ajoutant un terme de pénalisation pour empêcher les mouvements rigides infinitésimaux du deuxième modèle. Ce terme peut être défini de la manière suivante :

$$p(\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l, \mathbf{v}_g - \mathbf{v}_l) = \kappa \int_{S_p} (\mathbf{u}_g - \mathbf{u}_l) \cdot (\mathbf{v}_g - \mathbf{v}_l) \quad [6]$$

où κ représente un paramètre strictement positif et où S_p désigne une zone localisée de la zone de collage S_c .

4.2. Méthode de FETI

La méthode FETI consiste à donner les relations entre \mathbf{U}_g , \mathbf{U}_l et Λ à l'aide de la pseudo-inverse de \mathcal{K}_l :

$$\mathbf{U}_g = \mathcal{K}_g^{-1}(\mathcal{F}_g - \mathcal{C}_g^T \Lambda) \quad [7]$$

$$\mathbf{U}_l = \mathcal{K}_l^\dagger(\mathcal{F}_l + \mathcal{C}_l^T \Lambda) + \mathcal{R}\mathbf{r} \quad [8]$$

Avec cette stratégie, le champ \mathbf{U}_l comporte toutefois une composante inconnue \mathbf{r} dans le noyau \mathcal{R} de la matrice \mathcal{K}_l . Des techniques permettent de calculer la pseudo-inverse \mathcal{K}_l^\dagger et de résoudre le système d'équations correspondant en (Λ, \mathbf{r}) (Farhat *et al.*, 1991). Ces techniques sont en cours d'adaptation à notre problème. De plus, nous cherchons à dégager les opérateurs de couplage volumiques assurant le meilleur conditionnement du système condensé sur la zone de collage, tout en établissant des liens avec les préconditionneurs développés pour la méthode FETI (préconditionneur "lumped", etc.).

5. Conclusion et perspectives

Dans ce travail, l'analyse des résultats numériques du problème Arlequin bi-patch 1D nous a permis d'établir que le maintien de l'intégrité du maillage du modèle substrat, et donc de la flexibilité de la méthode, lorsque celui-ci est grossier par rapport à la taille des patches et à leurs distances, passe par l'introduction d'un patch de transition. Par ailleurs, la structure algébrique des problèmes Arlequins mixtes discrets invite à l'exploration des potentialités des solveurs de type FETI et/ou multi-grilles, tout en analysant l'impact des ingrédients Arlequin, tels que les opérateurs de couplage sur le conditionnement des systèmes et donc la performance des calculs. Des résultats portant sur des exemples numériques 2D et 3D seront étudiés et montrés au Colloque.

6. Bibliographie

- Ben Dhia H., « Problèmes mécaniques multi-échelles : la méthode Arlequin », *C.R.A.S. Paris Série Iib 326* : 899-904,, 1998.
- Ben Dhia H., « Numerical modelling of multiscale problems : the Arlequin method », *ECCM'99*, 1999.
- Ben Dhia H., Rateau G., « The Arlequin method as a flexible engineering design tool », *IJNME*, 2005.
- Farhat C., Roux F.-X., « A method of finite element tearing and interconnecting and its parallel solution algorithm », *Int. J. Numer. Meth. Eng.*32, 1205-1227, 1991.
- LeTallec P., Mandel J., Vidrascu M., « Balancing domain decomposition for plates », vol. 180, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, p. 515-524, 1994.
- Mandel J., « Balancing Domain Decomposition », *Comm. Numer. Meth. Engrg.*, vol. 9, p. 233-241, 1993.