



HAL
open science

Éléments finis étendus multi-grilles avec raffinement local pour la mécanique de la rupture

Johann Rannou, Anthony Gravouil, Marie-Christine Baietto

► **To cite this version:**

Johann Rannou, Anthony Gravouil, Marie-Christine Baietto. Éléments finis étendus multi-grilles avec raffinement local pour la mécanique de la rupture. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504124

HAL Id: hal-01504124

<https://hal.science/hal-01504124>

Submitted on 11 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Éléments finis étendus multi-grilles avec raffinement local pour la mécanique de la rupture

Johann Rannou — Anthony Gravouil — Marie-Christine Baietto

*LaMCoS, INSA-Lyon, CNRS UMR5259
20 av A. Einstein 69621 Villeurbanne, France
johann.rannou@insa-lyon.fr*

RÉSUMÉ. La méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a été appliquée à de nombreux domaines de mécanique des structures, en particulier à la simulation de propagation de fissures. Cependant, pour des applications industrielles, même si la fissure ne nécessite pas d'être maillée explicitement, les différentes échelles spatiales associées à la géométrie de la structure, à celle de la fissure, aux conditions aux limites, etc doivent être prises en compte. Pour cela, nous proposons dans cet article de coupler la méthode des éléments finis étendus à la stratégie multi-grilles. L'implémentation numérique dans le cadre d'éléments finis hiérarchiques est précisée. Des exemples de propagation de fissure en mode mixte sont ensuite donnés pour valider la méthode.

ABSTRACT. The eXtended Finite Element Method (X-FEM) has been applied to a wide range of applications, in particular for crack growth simulations in structural mechanics. However, for real applications (engineering simulations,...), even if one does not need to mesh the crack, it is necessary to take into account the different spatial scales linked to the size of the domain, the geometry of the boundary, the size of the boundary with prescribed displacement or loading, the discretized "representation" of the crack,... In this respect, one proposes in this paper to couple the eXtended Finite Element Method with a multi-grid strategy. Details are given for numerical implementation with a hierarchical finite element strategy. Finally, some examples are given (mixed mode crack growth simulations) to validate the method.

MOTS-CLÉS : éléments finis étendus, multi-grilles, propagation de fissure, fatigue

KEYWORDS: extended finite element method, multi-grid solver, crack growth simulations, fatigue

1. Introduction

Dans le milieu industriel, de nombreuses applications sont concernées par la mécanique de la rupture. La volonté de prévoir et de contrôler la durée de vie de certaines structures nécessite de pouvoir simuler de manière précise l'évolution des fissures de fatigues. En ce qui concerne le calcul numérique, de nombreuses difficultés ont été levées par l'introduction de méthodes d'enrichissement des éléments finis. Parmi elles, la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) (Moës *et al.*, 1999) est très bien adaptée à la simulation de propagation de fissures. Cependant, dans de nombreux cas industriels, l'échelle de la structure et l'échelle de la fissure peuvent différer de plusieurs ordres de grandeurs (Ribeaucourt *et al.*, 2005). Bien que rendant indépendants le maillage et la géométrie de la discontinuité, la méthode X-FEM ne permet pas de prendre en compte ces différences. C'est le cas, par exemple, lorsque l'on veut simuler la propagation d'une fissure très courte à l'aide d'un maillage pré-existant relativement grossier.

C'est pourquoi nous proposons ici de coupler la méthode des éléments finis étendus avec les techniques multi-grilles (Parsons *et al.*, 1990). L'échelle globale de la structure est prise en compte par un maillage relativement grossier. Un maillage plus fin, localisé et non compatible avec le maillage global permet de décrire la fissure avec les avantages de X-FEM. Une troisième échelle encore plus fine permet de décrire des phénomènes non linéaires (non traité ici). En effet, la prise en compte du contact entre les lèvres ou de la plasticité en pointe de fissure nécessite une discrétisation très fine (Ribeaucourt *et al.*, 2005) et (Elguedj *et al.*, 2005).

2. Les méthodes multi-grilles

Les méthodes multi-grilles sont basées sur la propriété qu'ont les solveurs itératifs linéaires de lisser les erreurs. Cela signifie que ces solveurs sont efficaces pour capturer les composantes hautes fréquences du champ de déplacement et le sont beaucoup moins pour capturer les composantes basses fréquences. Le problème de référence de la figure 1 est composé de deux domaines A et B qui servent de support aux vecteurs de déplacements nodaux U^A et U^B . On peut décomposer le champ de déplacement inconnu U^B en une composante hautes fréquences U_{hf}^B et une composante basses fréquences U_{bf}^B :

$$\begin{aligned} U^B &= U_{hf}^B + U_{bf}^B \\ &= U_{hf}^B + P\bar{U}^B \end{aligned} \quad [1]$$

U_{hf}^B est calculé directement sur le problème fin localisé en réalisant un faible nombre d'itérations puisque les composantes hautes fréquences sont très rapidement capturées. Cette étape est appelée étape de relaxation. Le calcul de U_{bf}^B est réalisé indirectement sur le maillage grossier sur lequel les composantes basses fréquences du problème cible voient leur fréquence augmenter et sont donc plus aptes à être capturées par un solveur itératif. On résout un problème grossier, donc peu coûteux, qui

nous donne un champ de déplacement \overline{U}^B dont le support est le maillage grossier. La prolongation de \overline{U}^B à l'aide d'un opérateur de changement d'échelle P permet d'obtenir $U_{bf}^B = P\overline{U}^B$. L'écriture du principe des travaux virtuels à l'aide de la décomposition [1] conduit à plusieurs variantes d'algorithmes multi-grilles. Ces variantes se distinguent notamment par la nature des quantités transférées entre les grilles et par le problème à résoudre sur le niveau grossier. Le schéma retenue est le Full Approximation Scheme (FAS) qui permet l'utilisation de grilles fines localisées non compatibles avec la grille grossière comme sur la figure 1. L'algorithme est généralisable à $n > 2$ niveaux de grilles, chacune étant utile pour capturer une certaine gamme de fréquences de la solution.

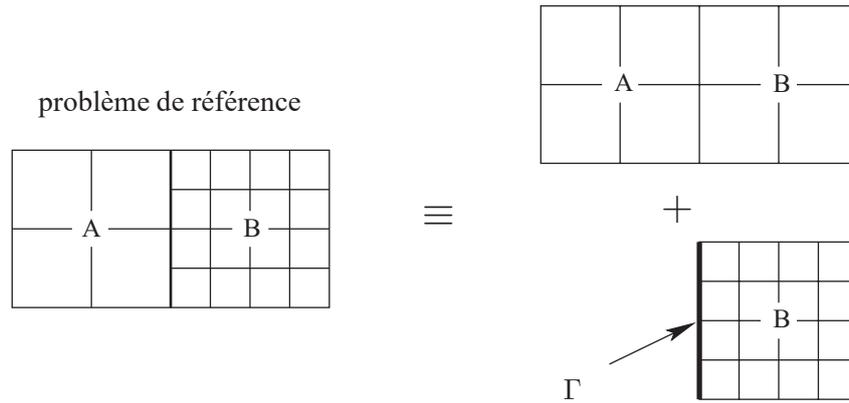


Figure 1. Le problème de référence (à gauche) est décomposé en une grille grossière et une grille fine localisée.

3. Opérateurs de changement d'échelle et enrichissements

Les différentes grilles communiquent entre elles à l'aide d'opérateurs de changement d'échelle. L'opérateur de prolongation P interpole les quantités primales (des déplacements) d'un maillage grossier vers un maillage fin et l'opérateur de restriction R transfère les quantités duales (des forces nodales ou des résidus) d'un maillage fin vers un maillage grossier. On montre par ailleurs que $R = P^T$, on ne s'intéressera donc qu'à la construction de P . Il permet de définir le champ de déplacement $\underline{u}^f(\underline{x})$ dont le support est le maillage \mathcal{M}_f à partir du champ de déplacement $\underline{u}^g(\underline{x})$ supporté par le maillage grossier \mathcal{M}_g . Considérons un noeud non enrichi n de \mathcal{M}_f dont la position est \underline{x}_n . Ses degrés de liberté \underline{u}_n^f sont directement déterminés par la relation :

$$\underline{u}_n^f = \underline{u}^g(\underline{x}_n) \quad [2]$$

Si le noeud n est enrichi, la relation précédente se généralise par :

$$\underline{u}_n^f + \underline{a}_n^f H(\underline{x}_n) + \sum_{j=1}^4 \underline{b}_{jn}^f \gamma_j(\underline{x}_n) = \underline{u}^g(\underline{x}_n) \quad [3]$$

où \underline{u}_n^f représente les degrés de liberté classiques du noeud n et \underline{a}_n^f et \underline{b}_{jn}^f représentent les degrés de liberté d'enrichissement associés respectivement aux fonctions saut (H) et pointe (γ_j) dans la stratégie classique X-FEM. Ces nouveaux degrés de liberté ne sont donc plus ici directement déterminés. On montre cependant qu'en interpolant séparément les champs de déplacements selon leur nature (standard, discontinue de type saut ou singulière), on obtient une prolongation exacte du champ de déplacement excepté sur une petite zone entourant la pointe de fissure (Rannou *et al.*, n.d.). Cette zone correspond aux noeuds, en vis à vis sur les deux échelles, dont les enrichissements ne sont pas de même nature, on dit que ces noeuds ont des enrichissements incompatibles. Cette zone étant très locale, l'erreur introduite est haute fréquence et est lissée très rapidement lors des étapes de relaxation, la convergence de la méthode n'est donc pas affectée.

4. Résultats

La figure 2.a illustre un problème de nature multi-échelles où on veut prendre en compte une petite fissure en ne disposant que d'un maillage initial relativement grossier. Pour traiter ce problème, on utilise alors un algorithme FAS linéaire localisé et 9 niveaux de grille (figure 2.b). Par ailleurs, les trois niveaux les plus grossiers ne sont pas enrichis car la fissure est entièrement contenu dans un élément, ce qui pose des difficultés pour définir les enrichissements (deux pointes dans un même élément). L'erreur sur la valeur de K_I obtenue en fonction du niveau de grille est représenté sur la figure 3. Cette erreur correspond à l'écart de la valeur de K_I calculée à l'aide d'une intégrale d'interaction par rapport à la valeur obtenue de manière analytique pour un milieu infini. Afin de démontrer les performances de cet algorithme, nous pouvons

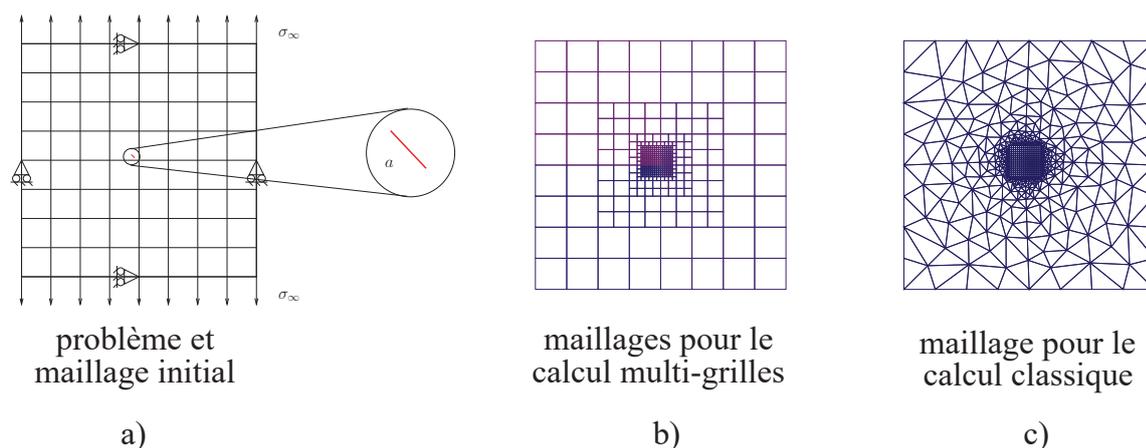


Figure 2. Problème et maillage initial (a). 9 niveaux de grille sont utilisés pour le calcul multi-grilles (b). Un maillage compatible est utilisé pour réaliser un calcul de comparaison avec une méthode de résolution classique (c).

comparer les temps de calculs obtenus avec ceux d'une résolution classique par gradient conjugué. Le maillage utilisé pour ce calcul est représenté sur la figure 2.c. Le

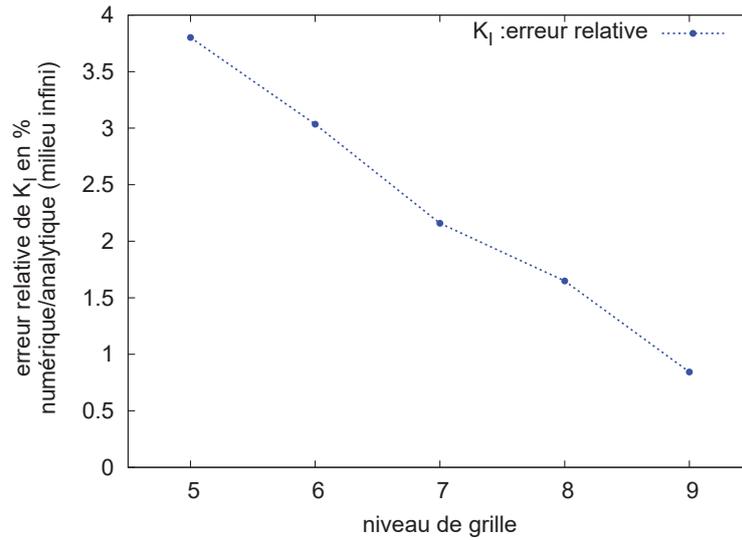


Figure 3. Écart de la valeur calculée de K_I par rapport à la valeur analytique calculée pour un milieu infini.

temps de calcul affiché représente le temps cpu passé dans le solveur itératif, le temps cpu demandé par les étapes de relaxation et pour l'assemblage des matrices de rigidité n'est pas pris en compte ici. La figure 4 représente ces temps de calcul pour les deux méthodes en fonction de la taille du maillage cible. Il apparaît que les propriétés de convergence de l'algorithme FAS sont bien supérieures à celle d'un gradient conjugué. Le fait d'enrichir ou pas certains niveaux pour y représenter la fissure n'influe pas sur

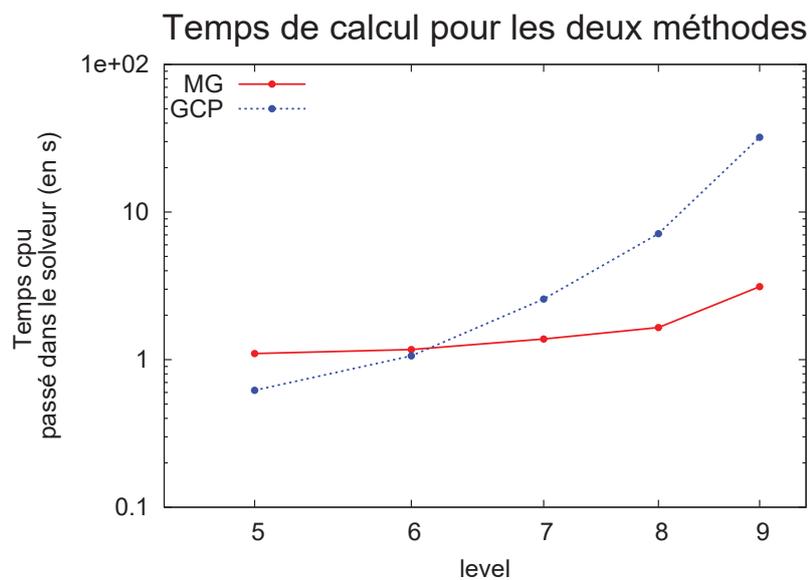


Figure 4. Temps de calcul en fonction du niveau de raffinement pour l'algorithme multi-grilles (MG) et pour un gradient conjugué pré-conditionné (GCP)

la solution finale. En effet, les champs de déplacement obtenus sur les échelles inter-

médiaires (éventuellement non enrichies) n'ont pas de sens physique. Le rôle de ces grilles est uniquement d'aider l'algorithme à converger, et seul le champ de déplacement sur la grille la plus fine a un sens physique. Par ailleurs, même si aucune discontinuité n'est représentable sur ces échelles, le champ de déplacement est quand même influencé par la fissure par l'intermédiaire du second membre du problème à résoudre (spécifique au schéma FAS). On observe cependant que les propriétés de convergence se dégradent quand trop peu de niveaux sont enrichis. Le problème physique représenté sur les grilles intermédiaires est alors trop éloigné du problème de référence. On en déduit qu'il faut enrichir sur tous les niveaux où cela est possible.

5. Perspectives

Une stratégie multi-échelles pour la simulation de propagation de fissure a été présentée. L'utilisation des techniques multi-grilles permet d'obtenir un algorithme efficace en terme de temps de calcul. La localisation permet en outre de se concentrer sur les zones qui nous intéressent. En ce qui concerne la mécanique linéaire de la rupture, ces zones sont généralement localisées autour de la fissure. Le couplage de cette technique à la méthode X-FEM permet de conserver un niveau de raffinement raisonnable en pointe de fissure et évite tout remaillage au cours de la propagation. Dans le cas de la mécanique non-linéaire, le niveau de détail nécessaire pour décrire les champs de déplacement et de contrainte requiert de raffiner davantage le maillage autour de la pointe de fissure. Des travaux sont actuellement en cours pour adapter l'algorithme décrit ici à des problèmes non linéaires pour tenir compte du contact et de la plasticité en pointe de fissure.

6. Bibliographie

- Elguedj T., Gravouil A., Combescure A., « A mixed Augmented Lagrangian eXtended Finite Element Method for modelling elastic-plastic fatigue crack growth with frictional contact », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, submitted, 2005.
- Moës N., Dolbow J., Belytchko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, p. 131 - 150, 1999.
- Parsons I. D., Hall J. F., « The multigrid method in solid mechanics : Part I – algorithm description and behaviour », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 1990.
- Rannou J., Gravouil A., Combescure A., « A multi-grid eXtended Finite Element Method for elastic crack growth simulation », *Revue Européenne de Mécanique Numérique*, n.d. accepté.
- Ribeaucourt R., Baïetto-Dubourg M., Gravouil A., « A mixed fatigue crack growth model applied to rolling contact fatigue », *3rd World Tribology Congress, Washington, D.C., USA*, september 12-16, 2005.

Remerciements. Ce travail a été mené dans le cadre du projet PROPAVANFIS soutenu par la fondation CETIM.