



HAL
open science

Etude des vibrations linéaires de plaques par une méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé

El-Hassan Boutyour, Jean-Marc Cadou, Bruno Cochelin, Michel Potier-Ferry

► **To cite this version:**

El-Hassan Boutyour, Jean-Marc Cadou, Bruno Cochelin, Michel Potier-Ferry. Etude des vibrations linéaires de plaques par une méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01504122

HAL Id: hal-01504122

<https://hal.science/hal-01504122>

Submitted on 8 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Etude des vibrations linéaires de plaques par une méthode asymptotique numérique et les approximants de Padé.

E.H. Boutyour, * — **J.M. Cadou, **** — **B. Cochelin,***** — **M. Potier-Ferry, ******

* *Département de Physique, Faculté des Sciences et Techniques de Settat, Université Hassan I, BP 577, Settat, Maroc.*

** *Laboratoire de Génie Mécanique et Matériaux, Université de Bretagne Sud, Centre de Recherche de St-Maudé, BP 92116, 56321 Lorient Cedex.*

*** *Laboratoire de Mécanique et d'Acoustique, UPR CNRS 7051, 31, chemin Joseph Aiguier, 13402 Marseille cedex 20, France*

**** *Laboratoire de Physique et Mécanique des Matériaux, U.R.A. CNRS 1215, ISGMP, Université de Metz, Ile du Saulcy, 57045 Metz Cedex.*

RÉSUMÉ. Nous proposons dans ce travail une méthode originale de calcul des pulsations propres d'un problème de vibration de plaque. Cette méthode est basée sur l'introduction d'un indicateur qui est une fraction rationnelle et dont les racines du numérateur sont exactement les pulsations propres recherchées. Le problème est résolu à l'aide d'une méthode de perturbation et des approximants de Padé.

ABSTRACT The aim of this paper is to present a new algorithm based on the Asymptotic Numerical Method for the computation of eigenvalues and eigenvectors of linear problems. It is based on the introduction of an indicator, which is a rational fraction whose roots correspond exactly to eigenvalues of the considered problem.

MOTS-CLÉS : vibrations linéaires, valeurs propres, méthode de perturbation, approximants de Padé .

KEYWORDS: linear vibrations, eigenvalues, perturbation method, Padé approximants..

1. Introduction

En mécanique des structures les problèmes de vibrations ou de flambage linéaires sont gouvernés par un problème aux valeurs propres. Pour les problèmes dont les matrices sont symétriques définies positives, les méthodes du sous espace ou de Lanczos (Dhatt *et al.* 2005, Bathe *et al.* 1976) sont couramment utilisées. Dans ce travail, nous proposons d'adapter la méthode proposée dans (Boutyour *et al.* 2004) pour déterminer les points de bifurcations de problèmes non linéaires. Ces points de bifurcations sont déterminés à l'aide d'un indicateur qui a la particularité de s'annuler aux points singuliers. Cet indicateur est une fonction scalaire qui est

obtenue en introduisant une force de perturbation dans le problème initial. Dans ce travail nous proposons de perturber le problème de vibration linéaire en introduisant plusieurs forces. Dans ce cas on ne cherche plus les zéros d'une fonction scalaire mais d'un déterminant. Ce problème perturbé est résolu à l'aide d'une méthode asymptotique numérique (Boutyour *et al.* 2004). Les séries polynomiales une fois calculées sont remplacées par des fractions rationnelles équivalentes, les approximants de Padé (Baker *et al.* 1996). Les racines de ces derniers sont les pulsations propres du problème de vibration linéaire étudié. Deux exemples numériques de vibration de plaque permettent de démontrer les avantages d'une telle approche.

2. Problème à résoudre

Les pulsations et modes propres d'un problème de vibration linéaire sont déterminés grâce à la résolution du problème suivant :

$$[K - \lambda M]\{u\} = 0 \quad [1]$$

où K et M désignent respectivement les matrices de rigidité et de masse ($K \in \mathfrak{R}^{n \times n}$, et $M \in \mathfrak{R}^{n \times n}$) toutes les deux symétriques, K étant quant-à-elle définie positive. Le paramètre λ représente le carré de la pulsation et le vecteur u le mode propre de vibration. Dans nos applications numériques, le problème [1] résulte de la discrétisation par la méthode des éléments finis d'un problème de vibration linéaire de plaque.

2.1. Introduction de l'indicateur

Pour résoudre le problème aux valeurs propres [1], nous proposons d'introduire dans ce système un vecteur second membre de la manière suivante :

$$[K - \lambda M]\{u\} = \sum_{i=1}^N \mu^i f^i \quad [2]$$

où les vecteur forces f^i sont connues (déterminées de manière aléatoire) et les scalaires μ_i sont les nouvelles inconnues du problème. En effet déterminer les couples (λ_i, u_i) solutions du problème [1] est équivalent à déterminer les valeurs nulles des scalaires μ_i , soit:

$$\mu_i = 0 \quad i=1, \dots, N \quad [3]$$

Pour que le problème [2] soit bien posé, des conditions supplémentaires sont alors introduites :

$$\langle u - u_0^i, u_0^i \rangle = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad [4]$$

dans lesquelles $\langle u, v \rangle$ représente le produit scalaire suivant ${}^t u M v$. Les vecteurs u_0^i sont solutions des problèmes suivants :

$$[K] \{u_0^i\} = \{f_i\} \quad i = 1, \dots, N \quad [4]$$

Les relations [2] et [4] permettent d'écrire l'expression des inconnues μ_i sous la forme suivante :

$$\mu_i = \sum_{j=1}^N A_j d^{ij}(\lambda) \quad [5]$$

où les $A_j^{i=1}$ sont des paramètres arbitraires et $d^{ij}(\lambda)$ sont des fonctions inconnues de λ . La relation précédente permet de réécrire le critère [3] sous la forme suivante :

$$\det \begin{bmatrix} d^{11}(\lambda) & \dots & d^{1N}(\lambda) \\ \dots & \dots & \dots \\ d^{N1}(\lambda) & \dots & d^{NN}(\lambda) \end{bmatrix} = 0 \quad [6]$$

Déterminer les couples (λ_i, u_i) solutions du problème [1], revient alors à déterminer les valeurs de λ pour lesquelles le déterminant [6] est nul. Les composantes $d^{ij}(\lambda)$ de ce déterminant sont déterminées par la résolution du système linéaire suivant:

$$[K - \lambda M] \{u_i\} = \sum_{j=1}^N d^{ji} f_j \quad i = 1, \dots, N \quad [7]$$

$$\langle u_i - u_0^i, u_0^i \rangle = 0$$

A noter que le système [7] est obtenu en introduisant la relation [5] dans les équations [2] et [4]. La détermination des valeurs de λ vérifiant le critère [6] demande l'inversion de l'opérateur $[K - \lambda M]$. Une résolution directe, nécessite alors l'inversion de cet opérateur pour chaque valeur de λ et n'est donc pas envisageable. Pour résoudre le problème [7], nous proposons alors d'utiliser une méthode de perturbation.

2.2. Méthode de perturbation et de continuation

Les inconnues u_i et d^{ij} sont cherchées sous la forme d'une série entière du paramètre λ tronquée à l'ordre P, soit :

$$\begin{aligned} u_i &= u_0^i + \lambda u_1^i + \lambda^2 u_2^i + \lambda^3 u_3^i + \dots + \lambda^P u_P^i \\ d^{ij} &= d_0^{ij} + \lambda d_1^{ij} + \lambda^2 d_2^{ij} + \lambda^3 d_3^{ij} + \dots + \lambda^P d_P^{ij} \end{aligned} \quad [8]$$

avec les choix suivants : $d_0^{ij} = \delta_{ij}$ ($\delta_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ et 1 for $i = j$). En introduisant les expressions [8] dans les équations [7] et en indentifiant suivant les

puissances de λ , on obtient un ensemble de problème linéaire défini à l'ordre P par :

$$[K]\{u_p^i\} = \sum_{j=1}^N d_p^{ji} f_j + [M]\{u_{p-1}^i\} \quad i = 1, \dots, N \quad [9]$$

$$\langle u_p^i, u_0^i \rangle = 0$$

La résolution successive des problèmes [9] permet de déterminer les termes des séries [8]. Ces développements asymptotiques sont alors remplacés par des fractions rationnelles équivalents appelées approximants de Padé (Baker et al., 1996). Le déterminant [6] est alors également une fraction rationnelle de degré $N \cdot P$. Déterminer les valeurs de λ qui annulent ce déterminant revient alors à calculer les racines du numérateur de cette fraction de degré $N \cdot P$. Une fois ces racines calculées, elles sont introduites dans les expressions [8] afin de déterminer le mode de vibration correspondant. La qualité des solutions (λ_i, u_i) est alors évaluée en considérant la définition du résidu :

$$\text{Res}(\lambda_i) = \frac{\{u_i\}^T [K - \lambda_i M] \{u_i\}}{\lambda_i} \quad [10]$$

La méthode décrite précédemment peut ne pas conduire au calcul d'un nombre important de valeurs propres. Afin de déterminer, par exemple, les 20 premières pulsations propres d'un problème, nous proposons d'utiliser une méthode de décalage spectrale. Le paramètre λ devient alors :

$$\lambda = \lambda_0 + \varepsilon \quad [11]$$

où λ_0 désigne le décalage spectral et ε est le nouveau paramètre de perturbation. La matrice $[K]$ des problèmes [9] est également remplacée $[K - \lambda_0 M]$.

3. Applications numériques

La première application numérique concerne une plaque carrée (1m*1m), d'épaisseur 0.01m, encadrée sur un coté et dont les caractéristiques mécaniques sont $E=210\text{GPa}$ et $\nu=0.3$. La plaque est maillée par 8 éléments triangulaires de type DKT, soit un nombre de ddl égal à 58. Nous donnons dans le tableau (1), le résidu [10] des racines du numérateur de l'approximant de Padé du déterminant [6] pour plusieurs ordres P des séries ainsi que pour plusieurs forces N. Ce tableau montre que l'introduction de plusieurs forces ne conduit pas à la détermination d'un nombre plus important de valeurs propres. Avec $N=1$, $N=2$ ou $N=3$, 6 à 7 valeurs propres peuvent être calculées. Ce nombre de valeurs singulières semble également très peu sensible à l'ordre de troncature P des séries [8]. Ce tableau montre cependant que l'utilisation de plus d'une force dans l'expression [2] conduit à une meilleure qualité

des valeurs propres calculées. La qualité de la valeur propre N°2 avec une force est ainsi toujours inférieure (même pour un ordre de troncature élevé) à celle déterminée avec N=2 ou N=3.

N° val. propre	Une force, N=1			N=2			N=3		
	P=10	P=15	P=20	10	15	20	10	15	20
1	-14.5	-14.5	-14.6	-14.3	-14.1	-15.5	-14.5	-14.5	-15.1
2	-11.0	-10.0	-11.8	-14.2	-14.6	-15.3	-14.0	-15.2	-14.1
3	-5.0	-4.9	-4.1	-10.5	-12.4	-10.7	-9.1	-10.9	-11.7
4	-3.7	-3.2	-2.3	-9.2	-10.3	-9.4	-8.6	-10.1	-10.8
5	-3.3	-2.9	-3.2	-8.6	-10.4	-9.1	-9.7	-9.3	-8.6
6	-2.9	-3.8	-1.5	-7.0	-8.7	-7.7	-8.0	-7.2	-6.6
7				-1.1	-2.4	-3.4	-2.9	-4.2	

Tableau 1. Résidu de la valeur propre pour plusieurs valeurs des paramètres N (nombre de forces) et P (ordre de troncature des séries [8]).

Les résultats précédents montrent qu'un seul pas de calcul ne conduit au calcul de 6 à 7 valeurs propres. Afin d'en calculer un plus grand nombre nous proposons une méthode de continuation basée sur un décalage spectral [11]. La valeur du décalage λ_0 est calculée de manière automatique à partir de la dernière valeur propre vérifiant un critère qualité fixé. Cette procédure de continuation est testée sur l'exemple d'une plaque de même dimension et de mêmes caractéristiques mécaniques que la précédente. Cette plaque est encadrée sur ses quatre cotés. Le maillage est composé de 222 éléments triangulaires DKT (792 ddl). Le tableau (2) montre que 4 pas de continuation sont nécessaires pour obtenir une dizaine de valeurs propres avec un résidu inférieur à 10^{-3} . Le nombre de racines calculées au cours de ces 4 pas est supérieur à 10 mais seules celles qui ont un résidu inférieur à 10^{-3} sont retenues. Ce tableau montre également que des pulsations propres peuvent être calculées plusieurs fois. Ces pulsations propres sont les racines du déterminant [6]. Pour un pas de continuation nous recherchons alors les racines à gauche et à droite du décalage λ_0 et il se peut que certaines racines satisfassent le critère résidu pour deux pas successifs.

4. Conclusion

Nous proposons dans ce travail une méthode originale pour calculer les pulsations propres d'un problème de vibrations linéaires. Cette méthode est basée sur le calcul des racines de l'approximant de Padé d'un déterminant. Ce déterminant est issu de l'introduction de forces de perturbation dans le problème initial. Les résultats numériques montrent que cette méthode permet de calculer

avec une grande précision les pulsations propres. L'utilisation de plus d'une force de perturbation ne permet pas cependant d'obtenir plus de valeurs propres que le nombre obtenu avec une seule force. Une méthode de continuation permet de calculer un grand nombre de pulsations propres. Des améliorations sont à apporter à cette méthode car elle n'est pas compétitive comparée aux méthodes classiques.

Pas	λ_0/λ_1	Valeurs propres obtenues	Résidu
1	0	1	-13.3
		2	-7.8
		3	-7.8
		4	-5.2
2	25.6	4	-5.7
		5	-11.9
		6	-10.8
3	28.5	4	-5.9
		5	-14.1
		6	-14.4
4	56.1	6	-3.0
		7	-10.9
		8	-11.1
		9	-4.7
		10	-4.4
		11	-3.6

Tableau 2. Résidu et nombre de valeur propre obtenu avec plusieurs pas de continuation, $P=15$ et $N=1$. Plaque encastrée sur ses quatre cotés. Critère résidu fixé à 10^{-3} .

5. Bibliographie

Baker G. A., Graves-Morris , *Padé approximants*, 2nd eds, Cambridge University Press, 1996.

Bathe J., Wilson E.L., *Numerical methods in finite element analysis*, Prentice Hall, 1976.

Boutyour E.H., Zahrouni H., Potier-Ferry, Boudi M., “Bifurcations points and bifurcated branches by an asymptotic numerical method and Padé approximants”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 60, 2004, p. 1987-2012.

Dhatt G., Touzot G., Lefrançois E., *Méthode des éléments finis*, Hermes, 2005.