HAL
open science

Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de Monte Carlo : application à une bobine supraconductrice

El Hadj Ailam, Mohamed Elbaa, Salah Eddine Bentridi, Bruno Douine, Kévin Berger, Jean Lévêque

To cite this version:

El Hadj Ailam, Mohamed Elbaa, Salah Eddine Bentridi, Bruno Douine, Kévin Berger, et al.. Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de Monte Carlo : application à une bobine supraconductrice. CISTEM 2016 - Conférence Internationale en Sciences et Technologies Electriques au Maghreb, Oct 2016, Marrakech, Maroc. pp.1-4/ID 228. hal-01501819

HAL Id: hal-01501819

https://hal.science/hal-01501819

Submitted on 4 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Résolution de l'équation de Laplace par la méthode de Monte Carlo : application à une bobine supraconductrice

El Hadj AILAM, Mohamed ELBAA, Salaheddine BENTRIDI
LESI, Université de Khemis Miliana
Khemis Miliana, Algeria
ailam_elhadj@yahoo.fr

Bruno DOUINE, Kevin BERGER, Jean LEVEQUE
GREEN, Université de Lorraine
Vandoeuvre-les-Nancy, France
bruno.douine@univ-lorraine.fr

***Résumé*— Dans cet article, nous traitons un problème magnétostatique qui consiste à calculer le potentiel scalaire magnétique d'une bobine supraconductrice de type solénoïde. Ceci permet une meilleure conception électromagnétique d'une machine électrique tournante. Pour ce faire, l'équation de Laplace est résolue en utilisant une technique de Monte Carlo. Des simulations sont réalisées où les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo sont comparées à une solution analytique dans un cas particulier.**

Mots clés—Méthode de Monté Carlo, équation de Laplace,modélisation coulombienne d'un solénoïde.

***Abstract*— This paper deals with the resolution of a magnetostatic problem which corresponds to the calculation of the magnetic scalar potential of a superconducting solenoid. This study allows a fast electromagnetic design of a rotating electrical machine. In fact, the Laplace equation is resolved using a Monte Carlo technique. The obtained simulations using the Monte Carlo method are compared to a analytical solution for given case.**

Keywords—Monte Carlo Method, Laplace equation, Coulomb model of a solenoid.

I. INTRODUCTION

Dans l'étude des machines électriques, on est parfois confrontés à des problèmes magnétostatiques où les courants et les champs magnétiques sont constants. Plusieurs méthodes peuvent être utilisées pour la résolution de ces problèmes, telles les méthodes des éléments finis et des différences finies. Ces méthodes sont coûteuses en terme de temps de calcul et mémoire d'ordinateur à cause de l'inversion de matrices à dimensions élevées.

Une autre approche de résolution de ce type de problèmes est la méthode de Monte Carlo par chaînes de Markov. En générant un certain nombre de chemins aléatoires, la solution est estimée comme une espérance, sans inverser de matrices et sans même calculer les valeurs de la solution en tout point du maillage.

II. MODELISATION DU PROBLEME

Le système électromagnétique que nous avons étudié est une bobine de type solénoïde, représenté sur la figure Fig. 1.

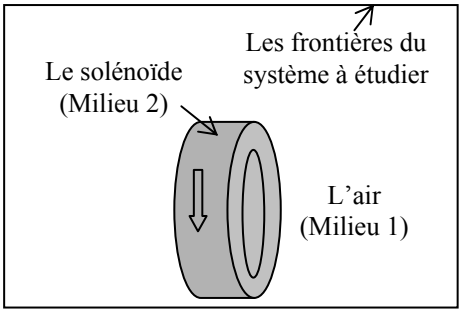

Figure .1 : Système électromagnétique à modéliser

La modélisation de ce système sera composée de deux parties [1-3] : la modélisation du solénoïde et la définition des conditions de passages et des conditions aux limites du système. Le solénoïde est assimilé a une densité de courant volumique uniforme dans toute la section du bobinage. On suppose qu'il n'y a pas de matériaux ferromagnétiques.

On obtient donc un problème de magnétostatique tridimensionnel et linéaire. La modélisation coulombienne permet d'avoir une représentation simple du système a étudier en vue de calculer le potentiel scalaire magnétique. Le solénoïde est remplacé par 4 surfaces chargées comme indiqué sur la figure 2 et les densités surfaciques équivalentes de charges magnétiques ont pour expressions [4] :

$\sigma = \mu_0 j(R_e - r)$, pour Ri < r < Re

$\sigma = \mu_0 j(R_e - R_i)$, pour r < Ri

Avec Ri et Re les rayons intérieur et extérieur du solénoïde.

Les frontières du domaine Ω sont suffisamment loin et la condition aux limites sera une condition de Dirichlet du type :

$U_m = 0$

Le système électromagnétique après modélisation est présenté sur la figure 2.

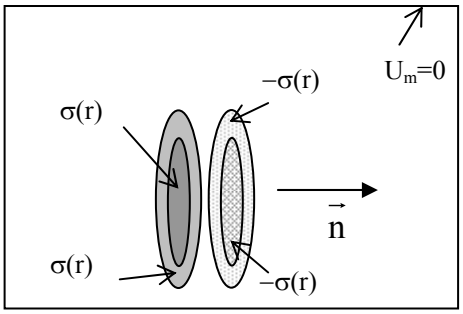

Figure 2. Système électromagnétique après modélisation

Le modèle complet après modélisation devient :

$$\begin{cases} \Delta U_m = 0 \quad \text{dans } \Omega \\ \left.\dfrac{\partial U_m}{\partial z}\right|_1 - \left.\dfrac{\partial U_m}{\partial z}\right|_2 = \sigma \text{ sur les disques} \\ U_m = 0 \quad \text{d}ans\ \partial\Omega \end{cases} \qquad (1)$$

où z est l'axe du solénoïde et $\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_1$ et $\left.\dfrac{\partial}{\partial z}\right|_1$ représentent les dérivées partielles à droite et à gauche.

III. Application de la methode de Monte Carlo

Après avoir établi un modèle simple de notre système, l'étape suivante sera consacrée à la résolution de l'équation 1. Le système à étudier est tridimensionnel. En utilisant les méthodes classiques de résolution, telles que celles basées sur les éléments finis ou sur les différences finies, il faut travailler avec des matrices de dimensions très élevées. Du point de vue numérique le problème sera coûteux en temps de calcul et en mémoire d'ordinateur.

La méthode de Monte Carlo est bien adaptée pour ce type de problèmes car elle permet de calculer le potentiel scalaire magnétique dans des régions bien définies du système.

Ceci permet de surmonter le problème d'inversion de matrices de grandes tailles.

De plus, cette méthode est facile à mettre en oeuvre. Elle a été utilisée dans plusieurs applications, notamment pour le calcul d'intégrales et la résolution d'équations aux dérivées partielles [5].

Le calcul du potentiel scalaire magnétique *Um* de notre système se fait selon les étapes suivantes :

1. générer un grand nombre de chemins partant du point de calcul (*io, jo, ko*).
2. pour un chemin donné, une particule se déplace spatialement selon la même valeur de probabilité 1/6.
3. la particule rebondit en arrivant aux écrans magnétiques, et le chemin s'arrête en arrivant aux frontières du système.
4. après chaque traversée des disques chargés, le potentiel scalaire magnétique n'incrémente de la valeur δUm égale au produit entre la densité surfacique de charges, définie dans l'équation 1, et le pas de maillage δ.
5. Après avoir effectué le nombre de chemins désiré, la valeur moyenne du potentiel magnétique scalaire *Um* est calculée par le rapport entre la valeur cumulée et le nombre de chemins aléatoires effectués.

IV. Simulations

La technique de calcul est validée en l'appliquant dans un premier temps à un problème dont la solution analytique est connue [4]. Les calculs effectués correspondent à un solénoïde avec les dimensions suivantes :

- Rayon intérieur Ri = 5mm
- Rayon extérieur Re = 10mm
- Longueur L = 10mm
- Densité de courant j = 100 A.mm^{-2}.

Les résultats de calculs sont comparés à la solution analytique donnée par la relation 5 [4].

$$U_m = U_{m(+)} + U_{m(-)}$$

avec :

$$U_{m(+)}\left(z - \frac{L}{2}\right) = \frac{j}{2}\left\{ \left(R_e - R_i\right)\left[\sqrt{R_i^2 + z^2} - |z|\right] + \frac{R_e}{2}\sqrt{R_e^2 + z^2} + \left(\frac{R_e}{2} - R_i\right)\sqrt{R_i^2 + z^2} + \frac{z^2}{2} Log\left[\frac{R_e + \sqrt{R_e^2 + z^2}}{R_i + \sqrt{R_i^2 + z^2}}\right] \right\} \qquad (2)$$

Pour $U_{m(-)}$, on remplace z par –z, $\left(z-\frac{L}{2}\right)$ par $\left(-z+\frac{L}{2}\right)$ et j par –j dans l'équation 2.

Les résultats de calculs des deux méthodes, Monte Carlo et analytique, sont présentés sur la figure 3.

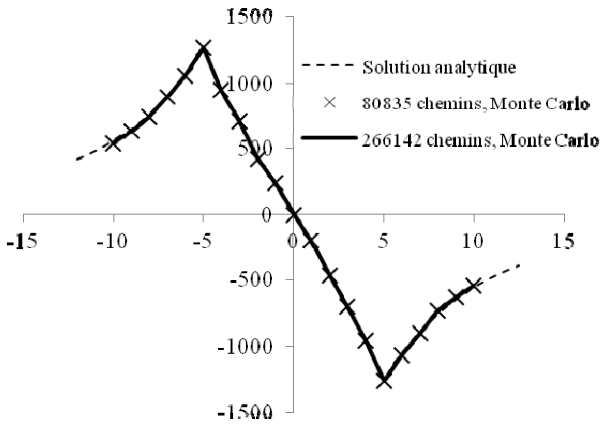

Figure 3. Résultats de deux techniques de calcul : Monte Carlo et analytique

On constate que les résultats obtenus par la méthode de Monte Carlo sont très proches de la solution analytique ce qui montre l'utilité et l'efficacité de cette méthode.

Cette méthode peut être très utile dans le cas des machines électriques de structure non-conventionnelle où les logiciels commerciaux, souvent en 2D, sont inadaptés. En effet, dans notre laboratoire une machine électrique constituée d'un solénoïde et de deux pièces supraconductrices, structure 3D, est le sujet d'une étude d'optimisation en utilisant la méthode de Monte Carlo.

V. CONCEPTION D'UNE MACHINE SUPRACONDUCTRICE

Après avoir validé le programme réalisé, la méthode de Monté Carlo a été utilisée dans la conception d'une machine supraconductrice. La machine conçue est composée de deux semi-induits en cuivre et de d'un inducteur basé sur le principe de la concentration magnétique. L'inducteur est composé d'un solénoïde supraconducteur et de deux pastilles supraconductrices. Le rôle du solénoïde et de créer une forte induction magnétique. Cette induction est modulée grâce aux pastilles supraconductrices qui sont considérées comme des diamagnétiques parfaits. Le principe de la machine conçue ainsi que le prototype réalisé sont illustrés sur les figures 4 et 5.

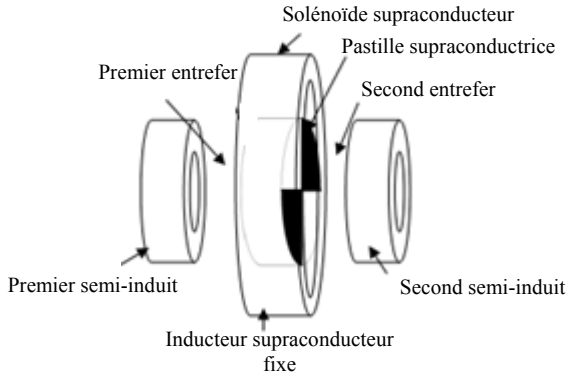

Figure 4. Principe de la machine à concentration magnétique à double entrefers

Figure 5. Prototype de la machine supraconductrice réalisée

VI. CONCLUSION

L'utilité et l'efficacité de la méthode de Monté Carlo dans la résolution de l'équation de Laplace a été illustrée dans cette étude. En effet, le temps de calcul est réduit significativement en utilisant cette méthode pour un résultat identique à celui analytique. La superposition des résultats obtenus pour chaque solénoïde nous a permis d'étudier un problème plus complexe qui consiste à la conception d'une machine supraconductrice axiale d'une structure originale. La prochaine étape sera l'optimisation de la structure étudiée. Cela ne pourra se faire sans l'automatisation du programme développé.

VII. REFERENCES

[1] E. Ailam, M.N. Benallal, M. Hachama, J. Leveque, A. Rezzoug, "Comparison study between several solutions of superconducting inductors", IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Volume 23, Issue 1, February 2013.

[2] E. Ailam, D. Netter, J. Leveque, B.Douine, A. Rezzoug, P.Masson, "Design and Testing of a Superconducting Motor", IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Volume 17, Issue 1, Part 2, March 2007 Page(s) :27- 33.

[3] D. Netter, J. Leveque, E. Ailam, B. Douine, A. Rezzoug, P. Masson, "Theoretical study of a new kind HTS Motor>, IEEE Transactions on Applied Superconductivity, Volume 15, Issue 2, Part 2, June 2005 Page(s) :2186 - 2189.

[4] D. Netter, "Supraconducteurs et Méthodes Stochastiques", These HDR, Nancy, 2005.

[5] E. Durand, "Magnétostatique", Edition MASSON, 1969.