HAL open science

Opérateur Mojette en 3D

Myriam Servières, Nicolas Normand

▶ **To cite this version:**

Myriam Servières, Nicolas Normand. Opérateur Mojette en 3D. [Rapport de recherche] RI2003-7, IRCCYN. 2003. hal-01500588

HAL Id: hal-01500588

https://hal.science/hal-01500588v1

Submitted on 16 May 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Distributed under a Creative Commons Attribution - NonCommercial - NoDerivatives 4.0 International License

Opérateur Mojette en 3D

M. Servières et N. Normand
IVC-IRCCyN

30/10/2003

La transformation Mojette est une version discrète exacte de la transformée de Radon développée dans l'équipe ivc. Les travaux initiés en 2D [1, 2, 3, 4] sont maintenant étendus à la 3D.

Lors de la projection Mojette d'un plan, la projection obtenue est à une dimension. Les pixels de l'image se projettent sur les bins de cette projection. Il est facile de la caractériser à l'aide de sa direction et de son échantillonnage.

Lors d'une projection Mojette 3D, on obtient un plan de projection. Les voxels se projettent sur des bins dans ce plan. Les bins forment un échantillonnage régulier du plan. Pour caractériser ces lieux, nous devons trouver une base du plan de projection. Cette base doit être en plus une maille du plan, c'est à dire que en suivant les vecteurs de maille, à partir d'un bin du plan de projection, on doit pouvoir atteindre tous les autres.

Le choix de la maille du plan de projection n'est pas unique. Nous présentons une méthode d'obtention de cette maille telle que la matrice de passage entre la base du volume et la maille du plan soit à coefficients entiers. Nous partons d'une base orthogonale décrivant l'espace de départ.

Nous allons d'abord décrire une méthode permettant de définir automatiquement une maille sur le plan de projection à partir de combinaisons linéaires des projections des vecteurs de la base initiale en 2D puis en 3D. Puis, nous calculerons la matrice de passage entre la base du volume de départ et la maille du plan de projection.

1 Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 1D lors d'une projection Mojette 2D

Nous considérons l'espace de départ à deux dimensions muni d'une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$. Nous allons commencer par projeter les vecteurs de la base de départ sur la ligne de projection, puis de ces vecteurs projetés nous déduirons une base de la ligne de projection (Figure 1).

Pour une image $f(k,l)$ la projection Mojette 2D dans la direction (p,q) s'écrit :

$$p(b,p,q) = \sum_k \sum_l f(k,l)\Delta(b+qk-pl) \tag{1}$$

où $\Delta(b) = \begin{cases} 0 & \text{si } b \neq 0, \\ 1 & \text{si } b = 0. \end{cases}$ pour $p \neq 0$ et PGCD(p,q)=1.

Les vecteurs $(\vec{i}, \vec{j})$ se projettent en $(\vec{i'}, \vec{j'})$. Comme ces vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'})$ appartiennent à la ligne de projection, on a :

$$p\vec{i'} + q\vec{j'} = \vec{0}, \tag{2}$$

d'où

$$-\frac{p}{q}\vec{i'} = \vec{j'}. \tag{3}$$

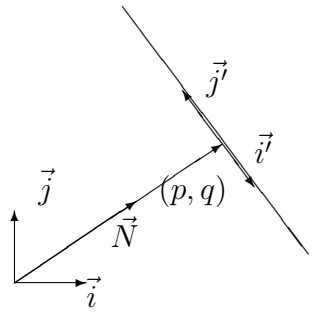

FIG. 1 – Projection de la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j})$ de l'espace 2D de départ dans la direction (p, q)

Donc toutes combinaison linéaire de $\vec{i'}$ et de $-\frac{p}{q}\vec{i'}$ est colinéaire à $\vec{i'}$.
On peut obtenir les points sur $\vec{i'}$ soit en avançant de α soit de $\beta\frac{p}{q}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Le vecteur de base est

$$\vec{m} = (\alpha + \beta\frac{p}{q})\vec{i'}. \tag{4}$$

On veut néanmoins $\alpha - \beta\frac{p}{q}$ le plus petit possible. Or, selon le théorème de Bezout, avec PGCD(p,q)=1, il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$q\alpha - \beta p = PGCD(p, q), \tag{5}$$

d'où on peut trouver α et β tels que :

$$\alpha - \beta\frac{p}{q} = \frac{PGCD(p, q)}{q} = \frac{1}{q}. \tag{6}$$

Donc on obtient comme vecteur de base :

$$\vec{m} = \frac{1}{q}\vec{i'}. \tag{7}$$

Nous allons réutiliser cette méthode pour obtenir les vecteurs de base pour un plan de projection lors d'une projection Mojette 3D.

2 Détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D lors d'une projection Mojette 3D

Nous considérons l'espace de départ à trois dimensions muni d'une base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Nous allons commencer par projeter les vecteurs de la base de départ sur le plan de projection, puis de ces vecteurs projetés nous déduirons une maille du plan de projection.

2.1 Calcul de la projection des vecteurs de base

Soit une projection Mojette dirac 3D $M(x, y, z)$ suivant la direction (p, q, r), avec PGCD(p,q,r)=1. Calculons la matrice de projection sur le plan perpendiculaire au vecteur $\vec{N} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ avec $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la base orthonormale de l'espace de départ et $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ la projection de cette base sur le plan de projection (Figure 2). Le voxel $(0, 0, 0)$ se projette sur le bin $(0, 0)$.

Soit $A(x, y, z)$ un point de l'espace, il se projette en $A'(x', y', z')$ sur le plan de projection. On a donc $A' \in \vec{N}^t$

$$px' + qy' + rz' = 0. \tag{8}$$

De plus, on doit avoir $\vec{AA'}.\vec{N} = \vec{0}$. D'où

$$\begin{cases} x' - x = \alpha p \\ y' - y = \alpha q \\ z' - z = \alpha r \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = \alpha p + x \\ y' = \alpha q + y \\ z' = \alpha r + z \end{cases}. \tag{9}$$

En reportant dans Eq. 8, α s'exprime comme :

$$\alpha = -\frac{px + qy + zr}{p^2 + q^2 + r^2}, \tag{10}$$

d'où

$$\begin{cases} x' = \frac{(q^2+r^2)x - pqy - prz}{p^2+q^2+r^2} \\ y' = \frac{-pqx + (p^2+r^2)x - qrz}{p^2+q^2+r^2} \\ z' = \frac{-rpx - rqy + (p^2+q^2)z}{p^2+q^2+r^2} \end{cases}. \tag{11}$$

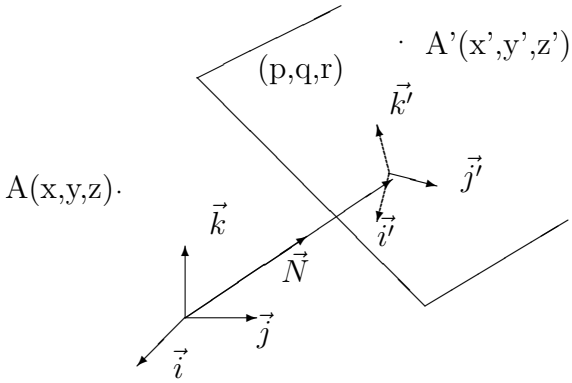

FIG. 2 – Projection de la base orthonormale $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace 3D de départ dans la direction (p, q, r)

La matrice de projection de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ est donc :

$$M = \frac{1}{p^2+q^2+r^2} \begin{pmatrix} q^2+r^2 & -pq & -pr \\ -pq & p^2+r^2 & -qr \\ -pr & -qr & p^2+q^2 \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Les vecteurs $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, projections de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ s'expriment comme :

$$\begin{cases} \vec{i'} = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}((q^2+r^2)\vec{i} - pq\vec{j} - pr\vec{k}) \\ \vec{j'} = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}(-pq\vec{i} + (p^2+r^2)\vec{j} - qr\vec{k}) \\ \vec{k'} = \frac{1}{p^2+q^2+r^2}(-pr\vec{i} - qr\vec{j} + (p^2+q^2)\vec{k}) \end{cases}. \tag{13}$$

Nous avons obtenu $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ la projection des vecteurs de la base de départ dans le plan de projection. De ces vecteurs projetés, nous pouvons en déduire des vecteurs de maille.

2.2 Obtention des vecteurs de base de la maille 2D

Si on connaît $\vec{m}$ et $\vec{n}$ tel que $(\vec{m}, \vec{n})$ forment une maille, à partir d'un point du plan de projection on peut atteindre tous les autres points du plan. Il existe $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$ad - bc = 1, \tag{14}$$

et si $(\vec{m}, \vec{n})$ forment une maille, alors on peut atteindre tous les bins du plan avec des vecteurs $\vec{m'}$ et $\vec{n'}$ tels que

$$\begin{aligned} \vec{m'} &= a\vec{m} + b\vec{n} \\ \vec{n'} &= c\vec{m} + d\vec{n}. \end{aligned} \tag{15}$$

Pour chercher le premier vecteur de maille, nous choisissons la direction de $\vec{i'}$. A partir de l'origine du plan de projection (i.e. le bin projection du voxel $(0, 0, 0)$), on cherche le point "le plus proche" du point d'origine que l'on prendra comme extrémité du premier vecteur. Pour trouver le second vecteur, on prend la droite parallèle à $\vec{i'}$ passant par un point de la grille et on prend le point "le plus proche" comme extrémité du deuxième vecteur de la maille (Figure 3).

2.2.1 Obtention du premier vecteur de maille $\vec{m}$

Les vecteurs $\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'}$ appartiennent au plan de projection. On a alors :

$$p\vec{i'} + q\vec{j'} + r\vec{k'} = \vec{0}, \tag{16}$$

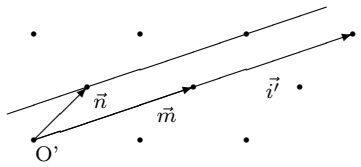

FIG. 3 – Maille $(\vec{m}, \vec{n})$ du plan de projection

d'où

$$\vec{i'} = -\frac{q}{p}\vec{j'} - \frac{r}{p}\vec{k'}, \tag{17}$$

et

$$-\frac{p}{PGCD(q,r)}\vec{i'} = \frac{q}{PGCD(q,r)}\vec{j'} + \frac{r}{PGCD(q,r)}\vec{k'}. \tag{18}$$

Donc toute combinaison linéaire de $\vec{i'}$ et de $\frac{q}{PGCD(q,r)}\vec{j'} + \frac{r}{PGCD(q,r)}\vec{k'}$ est colinéaire à $\vec{i'}$.

On peut obtenir les points sur $\vec{i'}$ soit en avançant de α soit de $-\beta\frac{p}{PGCD(q,r)}$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$. Le premier vecteur de la maille est

$$\vec{m} = (\alpha - \beta\frac{p}{PGCD(q,r)})\vec{i'}. \tag{19}$$

On veut néanmoins $\alpha - \beta\frac{p}{PGCD(q,r)}$ le plus petit possible. Or, selon le théorème de Bezout, avec PGCD(p,PGCD(q,r))=1 (soit PGCD(p,q,r)=1), il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que :

$$PGCD(q,r)\alpha - \beta p = 1, \tag{20}$$

d'où on peut trouver α et β tels que :

$$\alpha - \beta\frac{p}{PGCD(q,r)} = \frac{1}{PGCD(q,r)}. \tag{21}$$

Donc on obtient comme premier vecteur de maille :

$$\vec{m} = \frac{1}{PGCD(q,r)}\vec{i'}. \tag{22}$$

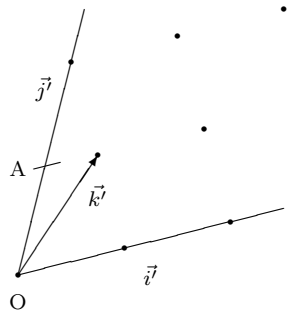

FIG. 4 – Projection de $\vec{k'}$ sur $\vec{j'}$

2.2.2 Obtention du deuxième vecteur de maille $\vec{n}$

Pour avoir le deuxième vecteur de la maille, on cherche une combinaison linéaire de $\vec{j'}$ et $\vec{k'}$ qui donne le point "le plus proche" du point origine. Le point le plus proche peut être donné par $\vec{j'}$ ou par la projection de $\vec{k'}$ sur $\vec{j'}$ (Figure 4).

On exprime sur $\vec{k'}$ en fonction de $(\vec{i'}, \vec{j'})$:

$$\vec{k'} = -\frac{p}{r}\vec{i'} - \frac{q}{r}\vec{j'}. \tag{23}$$

La projection de $\vec{k'}$ sur $\vec{j'}$ est proportionnelle à $\frac{q}{r}$ ($\frac{q}{r}$ n'est pas forcément une fraction irréductible) donc proportionnelle à

$$\frac{\frac{q}{PGCD(q,r)}}{\frac{r}{PGCD(q,r)}} = A * \frac{PGCD(q,r)}{r}, \tag{24}$$

avec A entier.

La projection du deuxième vecteur de maille $\vec{n}$ sur $\vec{j'}$ est au moins de $\frac{PGCD(q,r)}{r}$.

On cherche a et b tels que $\vec{n} = a\vec{j'} + b\vec{k'}$. Si on projette $\vec{n}$ sur $\vec{j'}$ on a

$$a - \frac{bq}{r} = \frac{PGCD(q,r)}{r}, \tag{25}$$

d'où

$$ar - bq = PGCD(q,r). \tag{26}$$

Selon l'identité de Bezout, on peut trouver un couple (a, b) non unique qui remplisse les conditions çi dessus.

On calcule (a, b) à l'aide de l'algorithme d'euclide étendu :

$$\begin{array}{l} ar - bq = PGCD(q, r) \\ r = qu_1 + v_1 \\ q = v_1 u_2 + v_2 \\ v_1 = v_2 u_3 + v_3 \\ ... \\ v_{n-2} = v_{n-1} u_n + v_n \\ v_{n-1} = v_n u_{n+1} + 0 \end{array} . \tag{27}$$

On a $v_n = PGCD(q, r)$. En notant $r = v_{-1}$ et $q = v_0$, on voit que chaque reste d'ordre k (avec $k > 1$) peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de v_{k-1} et v_{k-2} :

$$v_n = v_{n-2} - v_{n-1} u_n, \tag{28}$$

et

$$v_{n-1} = v_{n-3} - v_{n-2} u_{n-1}. \tag{29}$$

Ainsi v_n est une combinaison linéaire de v_{n-1} et de v_{n-2} et, comme v_{n-1} est une combinaison linéaire de v_{n-2} et v_{n-3}, on peut exprimer à son tour v_n comme une combinaison linéaire de v_{n-2} et v_{n-3} :

$$v_n = (1 + u_n u_{n-1}) v_{n-2} - u_n v_{n-3}. \tag{30}$$

En procédant ainsi avec les restes successifs, on trouve explicitement v_n comme combinaison linéaire de v_{-1} et v_0, les coefficients étant des sommes et produits des quotients successifs.

Et on réitère le processus jusqu'à trouver v_n comme combinaison linéaire de $v_{n-1} = r$ et de $v_0 = q$, c'est-à-dire $ar - bq = PGCD(q, r)$. On détermine ainsi $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ pour obtenir l'expression de $\vec{n}$.

2.3 Vérification de l'obtention d'une maille

On veut vérifier si les vecteurs $\vec{m}$ et $\vec{n}$ forment bien une maille. Pour cela on calcule le volume attaché à le surface décrite par $\vec{m} \wedge \vec{n}$ Pour obtenir la surface de la maille

définie par $\vec{m}$ et $\vec{n}$, on calcule $||\vec{m} \wedge \vec{n}||$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$:

$$\begin{aligned}
\vec{m} \wedge \vec{n} &= \frac{\vec{i'}}{\mathrm{PGCD}(q,r)} \wedge (a\vec{j'} + b\vec{k'}) \\
&= \frac{1}{\mathrm{PGCD}(q,r)(p^2+q^2+r^2)^2} \\
&\quad \left[\begin{pmatrix} q^2+r^2 \\ -pq \\ -pr \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -apq - bpr \\ a(p^2+r^2) - bqr \\ -aqr + b(p^2+q^2) \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \right] \\
&= \frac{1}{p^2+q^2+r^2} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} . \qquad (31)
\end{aligned}$$

On obtient alors

$$||\vec{m} \wedge \vec{n}|| = \frac{1}{\sqrt{p^2+q^2+r^2}}. \qquad (32)$$

Si $\vec{N}$ est le vecteur donnant la direction de projection (p, q, r), le volume décrit par $(\vec{m} \wedge \vec{n}).\vec{N})$ est unitaire.

$$\begin{aligned}
(\vec{m} \wedge \vec{n}).\vec{N} &= \frac{1}{p^2+q^2+r^2} \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} p \\ q \\ r \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{pmatrix} \\
&= 1 \qquad (33)
\end{aligned}$$

On a bien obtenu par le calcul de $\vec{m}$ et $\vec{n}$ une base du plan de projection.

Cette méthode permet la détermination des vecteurs de base décrivant les mailles d'un plan de projection 2D lors d'une projection Mojette 3D.

3 Matrice de passage entre la base du volume et la maille de la projection

Maintenant que nous avons les vecteurs de maille du plan de projection dans la direction (p, q, r), nous pouvons calculer la matrice de passage de la base de départ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ dans la maille $(\vec{m}, \vec{n})$. La projection Mojette 3D s'écrit :

$$M_{23} f(B, p, q, r) = \sum_k \sum_l \sum_m f(k, l, m) \Delta(B - P_{23} \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}), \qquad (34)$$

avec $B^T = (b_1, b_2)$ sur la maille définissant le plan de projection de direction (p, q, r) avec $\mathrm{PGCD}(p, q, r) = 1$.

Il faut déterminer la matrice de passage P_{23}.

3.1 Obtention de la matrice P_{23}

On suppose connaître les vecteurs de base du plan de projection dans la direction (p, q, r) (section 2.2).

$$\vec{m} = \frac{\vec{i'}}{\mathrm{PGCD}(q,r)} \tag{35}$$

$$\vec{n} = a\vec{j'} + b\vec{k'} \tag{36}$$

Lors de la projection les vecteurs de la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ sont projetés sur $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$, les valeurs des coordonnées restent inchangées.

Dans le plan de projection, le vecteur $\vec{k'}$ peut s'exprimer en fonction de $\vec{i'}$ et $\vec{j'}$ si $r \neq 0$:

$$\vec{k'} = \frac{-p}{r}\vec{i'} - \frac{q}{r}\vec{j'}. \tag{37}$$

La matrice de passage de $(\vec{i'}, \vec{j'}, \vec{k'})$ à $(\vec{i'}, \vec{j'})$ est :

$$A_{(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})\to(\vec{i'},\vec{j'})} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p/r \\ 0 & 1 & -q/r \end{pmatrix}. \tag{38}$$

Ensuite ces vecteurs projetés sont utilisés pour définir la maille $(\vec{m}, \vec{n})$. La matrice de passage de la base $(\vec{i'}, \vec{j'})$ à $(\vec{m}, \vec{n})$ est (section 2.2) :

$$A_{(\vec{i'},\vec{j'})\to(\vec{m},\vec{n})} = \begin{pmatrix} \mathrm{PGCD}(q,r) & \frac{bp\mathrm{PGCD}(q,r)}{ar-bq} \\ 0 & \frac{r}{ar-bq} \end{pmatrix}. \tag{39}$$

La matrice de passage de $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ à $(\vec{m}, \vec{n})$ est donc

$$P_{23} = A_{(\vec{i'},\vec{j'},\vec{k'})\to(\vec{i'},\vec{j'})} * A_{(\vec{i'},\vec{j'})\to(\vec{m},\vec{n})} \tag{40}$$

$$= \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{PGCD}(q,r) & bp & -ap \\ 0 & \frac{r}{\mathrm{PGCD}(q,r)} & \frac{-q}{\mathrm{PGCD}(q,r)} \end{pmatrix} & \text{si } (q,r) \neq (0,0) \\ \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{si (q,r) = (0,0).} \end{cases} \tag{41}$$

3.2 Exemple pour un voxel quelconque

Calculons les coordonnées de la projection du voxel $\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix}$ dans la direction (p, q, r).

On obtient comme coordonnées :

$$P_{23} * \begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathrm{PGCD}(q,r)k + bpl - apm \\ \frac{lr-qm}{\mathrm{PGCD}(q,r)} \end{pmatrix}. \tag{42}$$

3.3 Correspondance bin/pixel

On veut maintenant monter que la description du plan de projection par la maille $(\vec{m}, \vec{n})$ est une description "sans trou", c'est à dire que l'on obtient bien un bin en face de chaque voxel projeté et que chaque voxel correspond à la rétroprojection d'un bin.

L'obtention de la matrice P_{23} montre que pour toute coordonnée entière d'un voxel on obtient des coordonnées entières dans la base définie par la maille $(\vec{m}, \vec{n})$ car la matrice de passage P_{23} ne contient que des coefficients entier. Donc un voxel se projette toujours sur un bin.

Réciproquement, montrons que tout bin du plan que l'on peut attendre par une combinaison linéaire des vecteurs de base $(\vec{m}, \vec{n})$ correspond à au moins un voxel. Par construction le pixel $(0, 0, 0)$ se projette sur le bin $(0, 0)$.

Si on considère le voxel $(1, 0, 0)$ dans la base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, il se projette en $(\mathrm{PGCD}(q, r), 0)$ dans la base $(\vec{m}, \vec{n})$. De plus, le voxel $(0, \frac{q}{\mathrm{PGCD}(q,r)}, \frac{r}{\mathrm{PGCD}(q,r)})$ se projete sur le bin $(-p, 0)$ dans $(\vec{m}, \vec{n})$. Comme $\mathrm{PGCD}(\mathrm{PGCD}(q, r), p) = 1$, selon le théorème de Bezout il existe $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\alpha \mathrm{PGCD}(q, r) - \beta p = 1. \tag{43}$$

Comme on peut trouver α et β, le voxel $(\alpha, \beta q/\mathrm{PGCD}(q, r), \beta r/\mathrm{PGCD}(q, r))$ qui se projette en $(1, 0)$ existe. Donc on trouve des voxels en face de toute la ligne de bin $(1, 0)$.

Si on considère le voxel $(0, a, b)$, avec a, b définis comme dans la section2.2, il se projette en $(0, 1)$. On trouve donc des voxels en face de toute la ligne de bin $(0, 1)$.

En face chaque bin, on trouve un voxel et en face de chaque voxel se trouve un bin. La maille décrite précédemment permet de décrire le plan de projection sans trou et avec une matrice de passage à coefficients entiers. Elle permet de définir simplement la projection Mojette 3D.

4 Conclusion

Nous avons trouvé une manière simple de décrire le passage d'un objet à sa projection Mojette pour la dimension 2 et la dimension 3. Cette méthode est susceptible de se généraliser en dimension supérieure.

Références

[1] JeanPierre Guédon and Nicolas Normand. The mojette transform : application in image analysis and coding. pages 873–884. SPIE, 1997.

[2] Nicolas Normand and JeanPierre Guédon. La transformée mojette : une représentation redondante pour l'image. *Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, Informatique Théorique*, 325 :123–126, 1997.

[3] JeanPierre Guédon and Nicolas Normand. Spline mojette transform. application in tomography and communication. *EUSIPCO*, 2002.

[4] F. Autrusseau, JP. Guédon, and Yves Bizais. Mojette cryptomarking algorithm for medical images. In *Medical Imaging 2003*, pages 958–965, Febuary 2003.