



**HAL**  
open science

## Identification à partir de mesures de champs

Stéphane A Avril, Fabrice Pierron

► **To cite this version:**

Stéphane A Avril, Fabrice Pierron. Identification à partir de mesures de champs. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. <hal-01500106>

**HAL Id: hal-01500106**

**<https://hal.science/hal-01500106v1>**

Submitted on 3 Apr 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons CC0 1.0 - Universal - International License

---

# Identification à partir de mesures de champs : Comparaison entre différentes approches dans le cas élastique linéaire

**Stéphane Avril – Fabrice Pierron**

*Laboratoire de mécanique et Procédés de Fabrication  
Ecole nationale Supérieure d'Arts et Métiers  
Rue Saint Dominique  
BP 508  
F-51006 Châlons en Champagne  
Stephane.avril@chalons.ensam.fr*

---

*RÉSUMÉ. Deux types de méthodes sont couramment utilisés pour identifier les paramètres constitutifs d'une loi de comportement élastique à partir de mesures cinématiques disponibles sur la totalité du volume d'un solide: les méthodes basées sur le recalage des paramètres d'entrée d'un calcul numérique de type éléments finis (méthodes FEMU), et la méthode des champs virtuels (MCV). Dans cette étude, on montre que, quelque soit la méthode FEMU utilisée, le système d'équations final à inverser peut aussi être obtenu par l'application de la MCV avec un choix judicieux de champs virtuels. Ces champs virtuels sont donnés pour formuler trois algorithmes pour chacune des trois méthodes FEMU les plus couramment utilisées. Ces algorithmes sont finalement appliqués sur un exemple.*

*ABSTRACT. Two main types of approaches are available in the literature for identifying material parameters from full-field measurements: Finite Element Model Updating (FEMU) methods and the Virtual Fields Method (VFM). In this study, it is proved that using particular virtual fields, the application of the VFM onto measured displacement fields provides the same results as applying a FEMU method. According to this property of the VFM, three FEMU algorithms have been derived and validated.*

*MOTS-CLÉS : identification, élasticité linéaire, éléments finis, méthode des champs virtuels, recalage, estimation d'incertitude.*

*KEYWORDS: material identification, linear elasticity, finite element model, virtual fields method, finite element updating, uncertainty estimation.*

---

## 1. Introduction

La caractérisation mécanique des matériaux est essentielle pour le calcul des structures. Bien que des essais normalisés existent pour la caractérisation de matériaux isotropes et macroscopiquement homogènes, ils s'avèrent souvent inadaptés pour des matériaux anisotropes et/ou macroscopiquement hétérogènes (Aramitsu *et al.*, 1994) car ils sont basés sur l'utilisation de quelques points de mesures seulement alors que des mesures de champs seraient requises. L'utilisation de mesures de champs en mécanique est justement en pleine expansion, mais leur application reste limitée à la visualisation et l'analyse qualitative de mécanismes de déformation. Une utilisation quantitative à des fins d'identification est toutefois en voie de développement. Deux approches existent dans la littérature :

- une approche de type recalage, basée essentiellement sur des calculs éléments finis (Molimard *et al.*, 2005, Genovese *et al.*, 2005, Geymonat *et al.*, 2002).
- une approche basée sur les équations d'équilibre, soit écrites de manière forte (Claire *et al.*, 2002), soit de manière faible via la méthode des champs virtuels (Grédiac *et al.*, 2007).

L'objectif de ce papier est de montrer que, lorsqu'un champ de mesures est disponible, toutes les techniques d'identification conduisent au même type d'équations que celles générées par la méthode des champs virtuels (MCV).

## 2. Présentation du problème

Considérons un solide de volume  $\Omega$  sur lequel le déplacement engendré par un chargement est mesuré sur une grille régulière de points  $(x_i, y_j, z_k)$ . La mesure est notée  $\bar{u}(x_i, y_j, z_k)$ . A partir de cette mesure, le champ de déplacement est reconstruit sur une base de fonctions linéaires par morceaux, comme dans la méthode des éléments finis (Avril *et al.*, 2007). Pour cela, le volume  $\Omega$  est partitionné en éléments finis comportant un nombre  $N$  de nœuds au total. On peut écrire le champ de déplacements reconstruit à partir des données ainsi :

$$\tilde{u}(x, y, z) = \sum_{m=1}^N \tilde{a}_m \phi_m(x, y, z) \quad [1]$$

Les coefficients  $\tilde{a}_m$  sont obtenus par régression au sens des moindres carrés sur les mesures  $\bar{u}(x_i, y_j, z_k)$ . Ils constituent le vecteur des degrés de libertés nodaux pour la partition en éléments finis considérée. Ce vecteur est noté  $\{\tilde{a}\}$ . Il ne représente pas la valeur exacte des degrés de libertés nodaux dû au chargement appliqué, notée  $\{a\}$ . Il est entaché d'une erreur, notée  $\{a_\varepsilon\}$ , provenant des erreurs existant dans les mesures  $\bar{u}(x_i, y_j, z_k)$ , tel que :

$$\{\tilde{a}\} = \{a\} + \{a_\varepsilon\} \quad [2]$$

On ne connaît pas les composantes de  $\{a_\varepsilon\}$  mais on fait l'hypothèse, comme cela est décrit dans (Avril *et al.*, 2007), que c'est un vecteur aléatoire de moyenne nulle et de matrice de covariance connue notée  $[R]$ .

La loi de comportement du solide sur  $\Omega$  est supposée linéaire élastique, dépendant d'un nombre fini  $D$  de paramètres constitutifs, notés  $p_n$ , formant un vecteur noté  $\{p\}$ . Soit  $[A(p)]$  la matrice de raideur associée à cette partition éléments finis pour la loi de comportement considérée avec un choix de paramètres  $\{p\}$ . On peut décomposer  $[A(p)]$  en une combinaison linéaire de matrices, notées  $[A_n]$ , qui ne dépendent plus des paramètres constitutifs inconnus :

$$[A(p)] = \sum_{n=1}^D p_n [A_n] \quad [3]$$

Soit  $\{b\}$  le vecteur des forces nodales associé au chargement appliqué pour la partition en éléments finis considérée. Notons  $\{\hat{p}\}$  le vecteur composé de la valeur exacte de l'ensemble des paramètres inconnus. A l'équilibre, l'équation suivante est vérifiée :

$$\sum_{n=1}^D \hat{p}_n [A_n] \{\tilde{a}\} = \{b\} - \sum_{n=1}^D \hat{p}_n [A_n] \{a_\varepsilon\} \quad [4]$$

Si on retire de  $\{b\}$  les forces nodales inconnues (car sur la frontière on ne sait mesurer qu'une résultante d'effort, mais pas sa distribution), on garde seulement un vecteur réduit, noté  $\{F\}$ . On peut alors réécrire l'équation précédente ainsi :

$$\sum_{n=1}^D \hat{p}_n [K_n] \{\tilde{u}\} + \sum_{n=1}^D \hat{p}_n [L_n] \{\tilde{v}\} = \{F\} + \sum_{n=1}^D \hat{p}_n [K_n] \{u_\varepsilon\} + \sum_{n=1}^D V_n [L_n] \{v_\varepsilon\} \quad [5]$$

Où  $\{\tilde{u}\}$  et  $\{\tilde{v}\}$  sont extraits de  $\{\tilde{a}\}$  tandis que  $[K_k]$  et  $[L_k]$  sont extraites de  $[A_k]$  et  $\{u_\varepsilon\}$  et  $\{v_\varepsilon\}$  sont extraits de  $\{a_\varepsilon\}$  selon le principe décrit dans (Avril *et al.*, 2007).

Notons maintenant  $[Q(u, v)]$  toute matrice de dimension  $N \times D$ , dont chaque colonne est égale à  $[K_n] \{u\} + [L_n] \{v\}$ ,  $n$  variant de 1 à  $D$ , où  $\{u\}$  est un vecteur de même dimension que  $\{\tilde{u}\}$  et  $\{v\}$  est un vecteur de même dimension que  $\{\tilde{v}\}$ . On a ainsi :

$$[Q(\tilde{u}, \tilde{v})] \{\hat{p}\} = \{F\} + [Q(u_\varepsilon, v_\varepsilon)] \{\hat{p}\} \quad [6]$$

Dans la réalité, on ne connaît  $[Q(u_\varepsilon, v_\varepsilon)]$  que de manière statistique, ce qui ne permet pas de retrouver directement  $\{\hat{p}\}$ . L'objectif des méthodes d'identification à partir de mesures de champs est donc de trouver un estimateur de  $\{\hat{p}\}$ , noté  $\{\hat{q}\}$  par la suite, en utilisant au mieux les informations disponibles au sujet de  $[Q(u_\varepsilon, v_\varepsilon)]$ .

## 2. Méthode des champs virtuels et obtention de la solution au maximum de vraisemblance

Dans la MCV, l'équation [6] est multipliée par une matrice rectangle, notée  $[M]$ , de dimension  $D \times N$ . Chaque ligne de la matrice  $[M]$  est composée des degrés de liberté nodaux d'un champ virtuel différent. On obtient alors un système inversible de  $D$  équations à  $D$  inconnues dont  $\{\hat{q}\}$  est la solution :

$$[M][Q(\tilde{u}, \tilde{v})]\{\hat{q}\} = [M]\{F\} \quad [7]$$

Le choix de la matrice  $[M]$ , c'est-à-dire des champs virtuels, a une influence importante sur le résultat final (Grediac *et al.*, 2007). En effet, le vecteur  $\{\hat{q}\}$  identifié est aléatoire. Pour minimiser la variance des composantes de ce vecteur, on montre qu'il faut utiliser une matrice  $[M]$  telle que :

$$[M]^t = [K_{\hat{q}}]^{-1}[R][K_{\hat{q}}]^{-1}[Q(u_{\hat{q}}, \tilde{v})] \quad [8]$$

Où  $\{u_{\hat{q}}\}$  est un vecteur tel que  $[Q(u_{\hat{q}}, \tilde{v})]\{\hat{q}\} = \{F\}$ , soit :

$$\{u_{\hat{q}}\} = [K_{\hat{q}}]^{-1}\{\{F\} - [L_{\hat{q}}]\{\tilde{v}\}\} \quad [9]$$

C'est la solution au maximum de vraisemblance. On remarque que cette définition est implicite car elle fait intervenir la solution  $\{\hat{q}\}$ . La résolution est faite en choisissant une valeur initiale de paramètres puis en itérant la procédure donnée par les équations [7], [8] et [9]. Dès la deuxième itération, la convergence au premier ordre est atteinte lorsque le bruit de mesure est d'un ordre de grandeur inférieur aux mesures elles-mêmes (Avril *et al.*, 2007).

## 3. Autres solutions obtenues par recalage

Dans les méthodes de recalage, les paramètres identifiés sont obtenus par minimisation de fonctions coûts telles que :

1. l'écart en déplacement (Molimard *et al.*, 2005, Genovese *et al.*, 2005) :

$$\varphi_1(q, u_q) = \{u_q - \tilde{u}\}^t \{u_q - \tilde{u}\} \quad [10]$$

2. l'erreur en relation de comportement (Geymonat *et al.*, 2002) :

$$\varphi_2(q, u_q) = \{u_q - \tilde{u}\}^t [K_q] \{u_q - \tilde{u}\} \quad [11]$$

3. l'écart en effort ou « à l'équilibre », équivalente à l'utilisation directe de la formulation forte des équations d'équilibre (Claire *et al.*, 2002) :

$$\varphi_3(q, u_q) = \{u_q - \tilde{u}\}^t [K_q][K_q] \{u_q - \tilde{u}\} \quad [12]$$

Cette minimisation se fait sous la contrainte suivante :

$$[Q(u_q, \tilde{v})]\{q\} = \{F\} \Leftrightarrow \{u_q\} = [K_q]^{-1} \{F - [L_q]\{\tilde{v}\}\} \quad [13]$$

Il apparaît que lorsqu'on cherche à annuler le gradient des lagrangiens construits à partir des fonctions coûts précédentes, on retombe sur des équations similaires à l'équation [7], mais avec des matrices  $[M]$  différentes de celle donnée dans [8] :

1. pour l'écart en déplacement :

$$[M]^t = [K_{\hat{q}}]^{-2} [Q(u_{\hat{q}}, \tilde{v})] \quad [14]$$

2. pour l'erreur en relation de comportement :

$$[M]^t = [K_{\hat{q}}]^{-1} [Q(u_{\hat{q}}, \tilde{v})] + [K_{\hat{q}}]^{-1} [Q(\tilde{u}, \tilde{v})] \quad [15]$$

3. pour l'écart en effort :

$$[M]^t = [Q(\tilde{u}, \tilde{v})] \quad [16]$$

La définition de  $[M]$  est implicite dans les cas 1 et 2, ce qui nécessite une résolution itérative, comme pour la MCV. On montre toutefois que dès la deuxième itération, la convergence au premier ordre est atteinte lorsque le bruit de mesure est d'un ordre de grandeur inférieur aux mesures elles-mêmes (Avril *et al.*, 2007).

Chacune des approches conduit donc à une solution différente du maximum de vraisemblance obtenu avec la MCV. Néanmoins, l'écart en déplacement est très proche, puisque la seule différence est la présence de la matrice  $[R]$  dans la formule. Concernant l'erreur en relation de comportement et l'écart en effort, on remarque qu'en plus d'être différente de la solution au maximum de vraisemblance, la matrice  $[M]$  fait intervenir le champ réel  $\{\tilde{u}\}$  dans sa définition, ce qui lui donne un caractère aléatoire. Son injection dans l'équation [7] donne donc des solutions dont l'espérance est biaisée par rapport à la valeur exacte des paramètres à identifier.

#### 4. Application à des données expérimentales et conclusion

Les trois techniques de recalage et la MCV avec maximum de vraisemblance ont été testées sur les champs de déplacements mesurés lors de quatre essais de flexion/cisaillement réalisés sur des éprouvettes en verre époxyde. Les champs générés par cet essai permettent d'identifier les quatre composantes de la matrice de rigidité plane orthotrope du matériau :  $Q_{xx}$   $Q_{yy}$   $Q_{xy}$  et  $Q_{ss}$ . Cet essai est décrit dans (Avril *et al.*, 2007).

Les résultats sont reportés dans le tableau 1. Pour chaque paramètre et méthode, on donne d'abord la moyenne des valeurs identifiées en GPa, puis son coefficient de variation en %. Ces résultats illustrent bien les conclusions tirées dans la partie précédente. En effet, on remarque le biais dans les valeurs obtenues par la minimisation de l'erreur en relation de comportement et de l'écart à l'équilibre. Quant à la minimisation de l'écart en déplacement, elle permet d'obtenir des valeurs très proches de celles obtenues par la MCV. Les valeurs identifiées pour ces deux

techniques sont en accord avec les valeurs de référence du matériau. Le paramètre  $Q_{xy}$  a le coefficient de variation le plus élevé, ce qui signifie que c'est en fonction de ce paramètre que les champs mesurés ont la sensibilité la plus faible. Des modifications de l'essai ont été envisagées pour rendre ce coefficient de variation équivalent à celui des autres paramètres (Grédiac *et al.*, 2007).

L'extension des théories et développements présentés dans ce papier pour des lois de comportement élasto-plastiques est en cours.

Tableau 1. Comparaison des valeurs identifiées en utilisant différentes techniques sur les données de l'essai décrit dans (Avril *et al.*, 2007).

	MCV		Recalage 1		Recalage 2		Recalage 3		Référence	
$Q_{xx}$	42	1,4%	42,5	1,1%	38,5	2,2%	35	3,4%	44,9	0,7%
$Q_{yy}$	13	6,5%	12,2	5,2%	6,7	18%	6,5	14%	12,2	2,8%
$Q_{xy}$	3,3	13%	3,5	16%	2,5	8,2%	1,8	24%	3,9	2,4%
$Q_{ss}$	3,61	0,7%	3,61	0,7%	3,61	0,7%	3,61	0,7%	3,7	8,6%

## 5. Bibliographie

- Arimitsu Y., Nishioka K., Senda T., « A study of Saint-Venant's principle for composite materials by means of internal stress fields ». *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 62, 1995, p. 53-62.
- Avril S., Pierron F., « A general framework for the identification of constitutive parameters from full-field measurement in linear elasticity », *International Journal of Solids and Structures*, 2007, disponible en ligne, doi:10.1016/j.ijsolstr.2006.12.018.
- Claire D., Hild F., Roux S., « Identification of damage fields using kinematic measurements », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 330, 2002, p. 729-734.
- Genovese, K., Lamberti, L., and Pappalettere, C., « Improved global-local simulated annealing formulation for solving non-smooth engineering optimization problems », *International Journal of Solids and Structures*, Vol. 42, N°1, 2005, p. 203-237.
- Geymonat G., Hild F., Pagano S., « Identification of elastic parameters by displacement field measurements », *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, Vol. 330, 2002, p. 403-408.
- Grédiac M., Pierron F., Avril S., Toussaint E., « The virtual fields method for extracting constitutive parameters from full-field measurements: a review », *Strain*, Vol. 42, 2006, p. 233-253.
- Molimard, J., Riche, R. L., Vautrin, A., and Lee, J., « Identification of the four orthotropic plate stiffnesses using a single open-hole tensile test ». *Experimental Mechanics*, Vol. 45, N°5, 2005, p. 404-411.