



HAL
open science

Modélisation d'interfaces absorbantes en vibroacoustique interne

Walid Larbi, Jean-François Deü, Roger Ohayon

► **To cite this version:**

Walid Larbi, Jean-François Deü, Roger Ohayon. Modélisation d'interfaces absorbantes en vibroacoustique interne. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01500104

HAL Id: hal-01500104

<https://hal.science/hal-01500104v1>

Submitted on 2 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modélisation d'interfaces absorbantes en vibroacoustique interne

Walid Larbi — Jean-François Deü — Roger Ohayon

*Laboratoire de Mécanique des Structures et des Systèmes Couplés
Conservatoire National des Arts et Métiers
Chaire de Mécanique - Case courrier 353
2 rue Conté, 75003 Paris, France
{walid.larbi,deu,ohayon}@cnam.fr*

RÉSUMÉ. Ce travail porte sur la modélisation éléments finis de problèmes de vibroacoustique interne avec interfaces dissipatives. L'objectif est de faire le lien entre une modélisation du matériau absorbant par impédance de paroi et une modélisation de type poroélastique s'appuyant sur la théorie de Biot. L'approche proposée consiste à déterminer les paramètres de l'impédance de paroi à partir de caractéristiques intrinsèques du milieu poreux. Cette impédance est ensuite introduite dans la formulation éléments finis du problème vibroacoustique pour tenir compte de l'aspect dissipatif à l'interface fluide-structure.

ABSTRACT. This work concerns finite elements modeling of vibroacoustic internal problems with dissipative interfaces. The main purpose is to establish the link between absorbing material models by wall acoustic impedance and by poroelastic model based on the Biot theory. The proposed approach consists in determining the acoustic impedance parameters starting from intrinsic characteristics of the porous medium. This impedance is then introduced into the vibroacoustic finite elements formulation to take into account the dissipative aspect of the fluid-structure interface.

MOTS-CLÉS : Elastoacoustique, réduction du bruit, milieu poreux, impédance acoustique de paroi, éléments finis.

KEYWORDS: Elastoacoustic, noise reduction, porous medium, wall acoustic impedance, finite elements.

1. Introduction

Dans le cadre général de la lutte contre les nuisances sonores et vibratoires, ce travail porte sur la modélisation éléments finis de problèmes de vibroacoustique interne avec interfaces dissipatives. L'objectif est de faire le lien entre une modélisation du matériau absorbant par impédance de paroi (Deü *et al.*, 2006, Larbi *et al.*, 2006) et une modélisation de type poroélastique s'appuyant sur la théorie de Biot-Allard (Allard, 1993) (cf. figure 1).

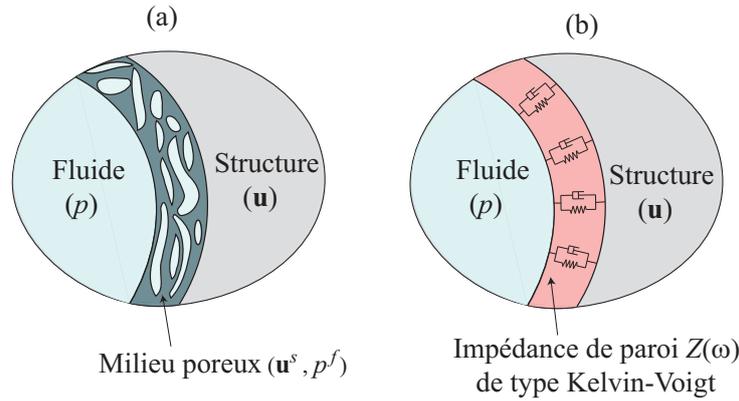


Figure 1. Problème vibroacoustique avec interface absorbante modélisée par : (a) milieu poreux, (b) impédance de paroi.

L'approche proposée consiste à déterminer les paramètres de l'impédance de paroi à partir des caractéristiques intrinsèques du milieu poreux. Cette impédance est ensuite introduite dans une formulation éléments finis originale du problème vibroacoustique pour tenir compte de l'aspect dissipatif à l'interface fluide-structure.

2. Modélisation poroélastique de milieux absorbants en théorie de Biot-Allard

On considère dans ce paragraphe un matériau poreux décrit par le modèle généralisé de Biot-Allard à cinq paramètres (Allard, 1993). On rappelle ici les équations locales homogénéisées du milieu poreux en fonction du déplacement de la phase solide \mathbf{u}^s et de la pression de la phase fluide p^f . A ce stade, il est important de souligner que les petits mouvements du fluide ne sont pas irrotationnels et que les effets de dissipation se traduisent par des quantités complexes qui dépendent de la pulsation ω (cf. signe "~" dans les équations suivantes). En régime harmonique, les équations locales du milieu poreux en (\mathbf{u}^s, p^f) s'écrivent sous la forme :

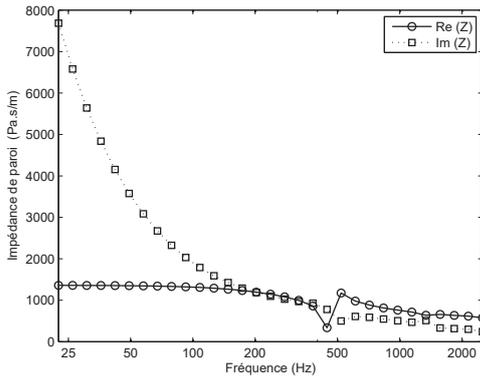
$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}^s) + \omega^2 \tilde{\rho} \mathbf{u}^s + \tilde{\gamma} \nabla p^f = \mathbf{0} \quad [1a]$$

$$\Delta p^f + \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\tilde{R}} p^f - \omega^2 \frac{\tilde{\rho}_{22}}{\phi^2} \tilde{\gamma} \operatorname{div} \mathbf{u}^s = 0 \quad [1b]$$

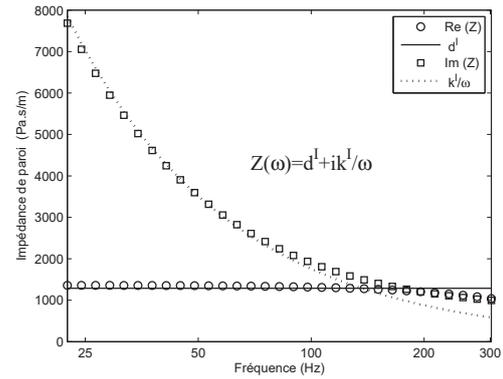
avec $\tilde{\rho} = \tilde{\rho}_{11} - \tilde{\rho}_{12}^2 / \tilde{\rho}_{22}$, $\tilde{\gamma} = \phi(\tilde{\rho}_{12} / \tilde{\rho}_{22} - \tilde{Q} / \tilde{R})$, $\tilde{Q} = (1 - \phi) \tilde{K}_e$, $\tilde{R} = \phi \tilde{K}_e$, et où ϕ est la porosité du matériau ; \tilde{K}_e est le module de compressibilité équivalent de la phase fluide ; et les $\tilde{\rho}_{ij}$ sont des masses volumiques qui caractérisent le milieu poreux.

Détermination de l'impédance acoustique de paroi sous incidence normale

On considère une couche unidimensionnelle de matériau poreux d'épaisseur $L = 0.1$ m dont les propriétés mécaniques sont données dans (Davidson, 2004). La couche est excitée par une pression unitaire à incidence normale sur la paroi $x = -L$ et encastrée sur la paroi $x = 0$. Les équations [1] permettent de déterminer analytiquement une relation locale entre la pression imposée et la vitesse de la paroi $x = -L$ et d'accéder ainsi à une courbe d'impédance dont les parties réelle et imaginaire sont représentées sur la figure 2a.



(a) Impédance acoustique de paroi calculée à partir de la formulation (\mathbf{u}^s, p^f) en théorie de Biot-Allard.



(b) Identification des paramètres k^I et d^I de l'impédance de paroi sur une plage de fréquence [0 - 300 Hz].

Figure 2. Parties réelle et imaginaire de l'impédance acoustique de paroi.

En se plaçant sur la plage de fréquence [0 - 300 Hz], l'impédance de paroi peut être approchée par un modèle d'amortissement de type Kelvin-Voigt, c'est-à-dire comme la somme d'une partie réelle constante et d'une partie imaginaire inversement proportionnelle à la fréquence : $Z(\omega) = d^I + ik^I/\omega$. Les paramètres k^I et d^I , qui caractérisent respectivement l'aspect élastique et visqueux de la couche absorbante, sont calculés par une méthode des moindres carrés à partir de l'impédance obtenue avec le modèle de milieu poreux décrit ci-dessus (cf. figure 2b).

3. Problème élastoacoustique avec paroi absorbante

3.1. Formulation éléments finis 3D de l'interface poroélastique

Il existe de nombreuses formulations éléments finis des équations poroélastique de Biot-Allard (Göransson, 1998, Atalla *et al.*, 1998). A titre d'exemple, on rappelle ici la formulation en (\mathbf{u}^s, p^f) développée par Atalla qui conduit au système suivant :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{K} & -\tilde{\mathbf{C}} \\ \mathbf{0} & \tilde{\mathbf{H}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{P}_f \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{M}} & \mathbf{0} \\ \tilde{\mathbf{C}}^T & \tilde{\mathbf{G}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U}_s \\ \mathbf{P}_f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{F}_f \end{pmatrix} \quad [2]$$

où les sous-matrices, complexes et fonction de ω , sont définies par :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_p} \boldsymbol{\sigma}^s(\mathbf{u}^s) : \boldsymbol{\varepsilon}^s(\delta\mathbf{u}^s) dv &\Rightarrow \delta\mathbf{U}_s^T \mathbf{K} \mathbf{U}_s ; & \int_{\Omega_p} \tilde{\rho} \mathbf{u}^s \cdot \delta\mathbf{u}^s dv &\Rightarrow \delta\mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{U}_s \\ \int_{\Omega_p} \tilde{\gamma} \nabla p^f \cdot \delta\mathbf{u}^s dv &\Rightarrow \delta\mathbf{U}_s^T \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{P}_f ; & \int_{\Omega_p} \tilde{\gamma} \mathbf{u}^s \cdot \nabla \delta p^f dv &\Rightarrow \delta\mathbf{P}_f^T \tilde{\mathbf{C}}^T \mathbf{U}_s \\ \int_{\Omega_p} \frac{\phi^2}{\tilde{\rho}_{22}} \nabla p^f \cdot \nabla p^f dv &\Rightarrow \delta\mathbf{P}_f^T \tilde{\mathbf{H}} \mathbf{P}_f ; & \int_{\Omega_p} \frac{\phi^2}{\tilde{R}} p^f \delta p^f dv &\Rightarrow \delta\mathbf{P}_f^T \tilde{\mathbf{G}} \mathbf{P}_f \end{aligned}$$

et où \mathbf{U}_s , \mathbf{P}_f sont les vecteurs des degrés de liberté relatifs au déplacement de la phase solide et à la pression de la phase fluide ; \mathbf{K} et $\tilde{\mathbf{M}}$ (respectivement $\tilde{\mathbf{H}}$ et $\tilde{\mathbf{G}}$) sont les matrices de rigidité et de masse de la phase solide (respectivement fluide) ; $\tilde{\mathbf{C}}$ est la matrice de couplage ; et enfin \mathbf{F}_s et \mathbf{F}_f sont les vecteurs des efforts extérieurs appliqués à la phase solide et à la phase fluide du matériau poreux.

Dans le traitement éléments finis du problème d'élastoacoustique interne avec matériau absorbant, la modélisation de ce dernier à partir de la formulation 3D précédente conduit donc à l'ajout de degrés de liberté des phases solide (déplacement \mathbf{u}^s) et fluide (pression p^f) du milieu poreux aux degrés de liberté relatifs aux domaines solide (déplacement \mathbf{u}) et fluide (pression p) du système couplé. Ceci constitue un inconvénient majeur d'un point de vue coût de résolution. Pour remédier à ce problème, les recherches s'orientent vers l'utilisation de modèles d'ordre réduit ou de type impédanciel.

3.2. Formulation du problème élastoacoustique avec impédance de paroi

L'approche simplifiée utilisée ici consiste à modéliser le matériau absorbant par une impédance acoustique de paroi $Z(\omega)$. La formulation éléments finis du problème couplé structure élastique - interface dissipative - fluide interne (voir figure 1b) s'écrit sous la forme (Larbi, 2006) :

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{K}_u & -\mathbf{C}_{up} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_p \end{pmatrix} - i \frac{\omega}{Z(\omega)} \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{D}_p \end{pmatrix} - \omega^2 \begin{pmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} \\ \mathbf{C}_{up}^T & \mathbf{M}_p \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad [3]$$

où \mathbf{K}_u et \mathbf{M}_u (respectivement \mathbf{K}_p et \mathbf{M}_p) sont les matrices de rigidité et de masse de la structure (respectivement du fluide) ; \mathbf{C}_{up} est la matrice de couplage ; \mathbf{D}_p est la matrice d'amortissement ; et \mathbf{F} est le vecteur des efforts extérieurs appliqués à la structure. Il faut noter que ces sous-matrices sont réelles et indépendantes de ω .

La formulation précédente, qui est non-symétrique, ne peut être écrite que dans le domaine fréquentiel et conduit à un système non-linéaire (ni même quadratique) en fonction de la pulsation ω à cause de l'expression de $Z(\omega)$ (fraction rationnelle complexe). Pour remédier à ce problème, une nouvelle formulation, qui consiste à introduire le déplacement normal du fluide à l'interface dissipative comme variable additionnelle, a été récemment développée par les auteurs (Deü *et al.*, 2006, Larbi *et*

al., 2006). Dans ce cas, en considérant que l'impédance de paroi $Z(\omega)$ peut être représentée par un modèle d'amortissement de type Kelvin-Voigt, le problème éléments finis peut alors s'écrire à la fois dans les domaines fréquentiel et temporel :

$$\begin{pmatrix} \mathbf{M}_u & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}_{\eta p}^T & \mathbf{M}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ddot{\mathbf{U}} \\ \ddot{\mathbf{H}} \\ \ddot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d^I \mathbf{D}_u & -d^I \mathbf{D}_{u\eta} & \mathbf{0} \\ -d^I \mathbf{D}_{u\eta}^T & d^I \mathbf{D}_\eta & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{\mathbf{U}} \\ \dot{\mathbf{H}} \\ \dot{\mathbf{P}} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{K}_u + k^I \mathbf{D}_u & -k^I \mathbf{D}_{u\eta} & \mathbf{0} \\ -k^I \mathbf{D}_{u\eta}^T & k^I \mathbf{D}_\eta & -\mathbf{C}_{\eta p} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_p \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{H} \\ \mathbf{P} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} \quad [4]$$

où \mathbf{H} est le vecteur de degrés de liberté relatif au déplacement normal du fluide à l'interface dissipative, \mathbf{D}_u et \mathbf{D}_η sont des matrices d'amortissement et enfin $\mathbf{D}_{u\eta}$ et $\mathbf{C}_{\eta p}$ sont des matrices de couplage. La symétrisation de cette formulation peut être obtenue par l'introduction d'un potentiel de déplacement fluide comme variable additionnelle (Morand *et al.*, 1995).

3.3. Réponse transitoire d'un tube acoustique avec matériau absorbant

Dans cet exemple, on considère un tube rigide rempli d'air dont l'une des extrémités est couverte par le matériau absorbant décrit précédemment ($k^I \approx 1.1 \times 10^6$ Pa/m et $d^I \approx 1290$ Pa.s/m) et l'autre soumise à une force de pression donnée (figure 3).

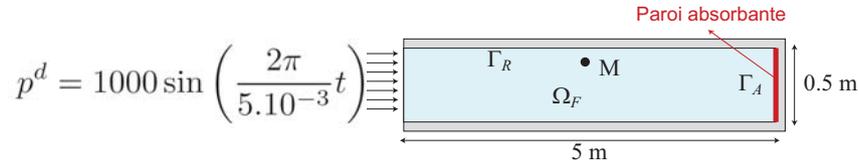


Figure 3. Tube acoustique avec pression imposée et paroi absorbante

Sur la figure 4, on présente la réponse en fréquence du système au point M (2.5m,0.4m) du fluide calculée avec la formulation éléments finis [4]. On observe la diminution des pics de pression due à l'effet dissipatif de la paroi absorbante.

4. Conclusion

Cette étude, qui concerne la modélisation éléments finis de problèmes d'élastoacoustique interne avec interface dissipative, a permis de faire le lien entre une modélisation des matériaux absorbants basée sur la théorie de Biot-Allard et une modélisation simplifiée par impédance acoustique de paroi. La technique proposée consiste à déterminer les paramètres de l'impédance à partir de ceux du milieu poreux, dans le cas d'une excitation à incidence normale et sur une plage de fréquence limitée.

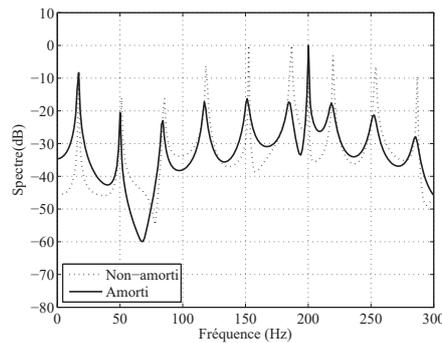


Figure 4. Réponse du tube acoustique au point M (2.5m,0.4m) à une pression donnée.

Cette approche, combinée à une formulation éléments finis originale développée par les auteurs, a été testée sur un tube acoustique avec paroi absorbante. Il est important de noter que l'approche par impédance localisée reste une approximation (il faudrait introduire un opérateur d'impédance non local). Néanmoins, des études récentes (Bermúdez *et al.*, Accepted) ont montré que cette approximation est acceptable dans des configurations plus complexes que celle envisagée ici.

5. Bibliographie

- Allard J.-F., *Propagation of sound in porous media : modelling sound absorbing materials*, Elsevier Applied Science, London, 1993.
- Atalla N., Panneton R., Debergue P., « A mixed displacement-pressure formulation for poroelastic materials », *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 104, n° 3, p. 1444-1452, 1998.
- Bermúdez A., Hervella-Nieto L., Prieto A., Rodríguez R., « Validation of acoustic models for time harmonic dissipative scattering problems », *Journal of Computational Acoustics*, Accepted.
- Davidson P., *Structure-acoustic analysis ; finite element modelling and reduction methods*, Doctoral thesis, Lund University, 2004.
- Deü J.-F., Larbi W., Ohayon R., « Dissipative interface modeling for vibroacoustic problems - a new symmetric formulation », in C. Mota Soares *et al.* (ed.), *Computational Mechanics - Solids, Structures and Coupled Problems*, Springer, p. 413-428, 2006.
- Göransson P., « A 3-D, symmetric, finite element formulation of the Biot equations with application to acoustic wave propagation through an elastic porous medium », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 41, n° 1, p. 167-192, 1998.
- Larbi W., *Modélisation d'interfaces dissipatives intelligentes en interaction fluide-structure - Application aux structures composites de révolution avec fluide interne*, Thèse de doctorat, Conservatoire National des Arts et Métiers, 2006.
- Larbi W., Deü J.-F., Ohayon R., « A new finite element formulation for internal acoustic problems with dissipative walls », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 68, n° 3, p. 381-399, 2006.
- Morand H.-P., Ohayon R., *Fluid-structure interaction*, Wiley, New York, 1995.