



HAL
open science

Application de la méthode 2SMART au flambement de coques résistantes de sous-marins

François Deheeger, Mikaël Cazuguel, Pierre Willaume, Maurice Pendola

► To cite this version:

François Deheeger, Mikaël Cazuguel, Pierre Willaume, Maurice Pendola. Application de la méthode 2SMART au flambement de coques résistantes de sous-marins. 9e colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2009, Giens, France. hal-01499931

HAL Id: hal-01499931

<https://hal.science/hal-01499931>

Submitted on 1 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

Application de la méthode ²SMART au flambement de coques résistantes de sous-marins

F. Deheeger¹, M. Cazuguel², P. Willaume¹, M. Pendola¹

¹ PHIMECA Engineering S.A.
Centre d'affaires du Zénith, 34 rue de Sarliève, 63800 COURNON
{deheeger, willaume, pendola}@phimeca.com

² DCNS Ingénierie Navires Armés – Département Analyse des Structures
Rue Choiseul, 56311 LORIENT Cedex
mikael.cazuguel@dcnsgroup.com

Résumé – La problématique du flambement est prépondérante dans le dimensionnement des coques résistantes de sous-marins. Ces instabilités sont pilotées, entre autres, par la présence de défauts de forme, de variabilité inhérente au processus de fabrication. Du fait de l'interaction possible de plusieurs modes de défaillances, les méthodes d'approximation classiques peuvent fournir des résultats biaisés. Ce papier présente donc l'intérêt de la méthode ²SMART, pour le cas d'une maille élémentaire représentative d'une coque résistante de sous-marin.

Mots clés – flambement non linéaire, cylindres raidis, méthode fiabiliste ²SMART, SVM, classification, simulations par subsets.

1 Introduction

La coque résistante d'un sous-marin est majoritairement composée d'une succession de cylindres et troncs de cône raidis, fermée par deux cloisons d'extrémité sphériques ou elliptiques, et dont les différentes zones peuvent être séparées par des cloisons intérieures résistantes de type cofferdam. Un des chargements dimensionnant pour cette structure est la pression d'immersion. Celle-ci induit un état de contraintes de compression, et nécessite donc la prise en compte de la problématique du flambement.

Du fait des épaisseurs considérées, l'apparition de plasticité peut intervenir avant les instabilités de flambement. De plus, une telle structure associée à ce type de chargement est particulièrement sensible aux défauts de forme, inhérents à tout processus de fabrication. Malgré leur faible amplitude (tolérances de quelques millimètres pour une structure de plusieurs mètres de rayon), la prise en compte de ces défauts est une condition indispensable à la prédiction réaliste de la tenue au flambement des coques résistantes de sous-marins. Du fait de l'augmentation des puissances de calculs, le traitement de ce type de problématique est devenu abordable par la méthode des éléments finis depuis quelques années.

Cependant, les défauts qui apparaîtront lors du processus de fabrication ne peuvent être connus a priori lors de la phase de dimensionnement. Le concepteur se ramène donc à la prise en compte de défauts réglementaires, et assure son dimensionnement par l'ajout de coefficients de sécurité le plus souvent empiriques. Le degré de conservatisme d'une telle approche est par conséquent difficilement quantifiable.

Dans ce contexte de manque de connaissances a priori, les méthodes fiabilistes peuvent permettre d'associer un intervalle de confiance aux résultats de calculs numériques. Encore faut-

il qu'elles soient adaptées à la prise en compte de multiples modes de défaillance, comme dans le cas du flambement de coques de sous-marins. Ce papier a ainsi pour objectif de montrer l'intérêt de la méthode ²SMART (*Subsets by Support vector Margin Algorithm for Reliability esTimation*) appliquée à la problématique du flambement d'une maille élémentaire de sous-marins.

2 Méthode ²SMART

2.1 Contexte de la mécanique probabiliste

La réalité de la mécanique est plongée dans l'incertain dont la prise en compte dans la conception est indispensable pour un dimensionnement fiable, robuste et optimal des structures. Les méthodes utilisées actuellement [9] s'appuient sur un modèle stochastique des variables de conception notées dans un vecteur X et sur une ou plusieurs fonction(s) de performance notée(s) $G(X)$. La fiabilité est alors mesurée par la probabilité P_f de l'événement $G \leq 0$ associé à la défaillance et la robustesse par la sensibilité de cette fonction $G(X)$ par rapport aux variables de conception. Les méthodes dérivées de Monte-Carlo ou les méthodes d'approximation exigent un grand nombre de répétitions du calcul mécanique pour des réalisations des variables aléatoires judicieusement choisies. Les modèles du comportement mécanique sont souvent complexes (comportement non-linéaire, dynamique, fatigue, mécanique de la rupture, etc).

L'enjeu est de minimiser le nombre des calculs mécaniques, principal consommateur des ressources en calcul. L'analyse de la littérature nous a conduit à fonder notre travail sur une méthode de substitution du modèle mécanique, option la mieux adaptée aux objectifs en terme de performance et d'adaptabilité à tout type de modèle physique. L'option tactique est fondée sur la théorie de l'apprentissage statistique et en particulier les Machines à Vecteurs Supports (SVM *Support Vector Machine*). Cette théorie généralise la notion de surface de réponse.

Ce papier propose une approche innovante couplant les *Support Vector Machines* (SVM) et les *Subset Simulation*. L'objectif est la mise en œuvre d'une approche probabiliste pour des problèmes caractérisés par :

- un modèle numérique simulant la mécanique ou la physique d'un problème représentatif d'une application industrielle (temps de calcul important) ;
- un état-limite $G(X) = 0$ de forme complexe ;
- un modèle stochastique de dimension significative ;
- l'utilisation d'un code propriétaire de manière externe (approche non-intrusive).

2.2 Machines à Vecteurs Supports

L'approche proposée consiste à utiliser une méthode d'apprentissage pour construire un substitut de la surface d'état-limite $G(X) = 0$ de manière séquentielle et itérative, permettant de garantir une précision satisfaisante sur ce substitut. Cette méthode est basée sur le couplage de l'outil SVM et de la méthode de simulation par *subset*. Il est donc nécessaire de décrire l'exercice de classification et les SVM.

2.2.1 Classification et SVM

Les SVM ont été créés pour résoudre les problèmes dits de *classification*. Le but est de séparer l'espace des données en classes. À chaque réalisation des variables de base est associée une classe. Le principe de l'algorithme est de créer un hyperplan qui sépare les données en deux classes, en utilisant le principe de *marge maximale*. Considérons une fonction de performance $G(X, M(X))$ des variables aléatoires X et du modèle $M(X)$ (les notions importantes de l'approche probabiliste sont décrites dans le livre de M. Lemaire [9]). Connaissant des points d'apprentissage - c'est-à-dire des évaluations de G pour quelques réalisations de X appartenant aux classes -1 ($G \leq 0$) et $+1$ ($G > 0$) - on recherche l'hyperplan maximisant la marge qui sépare les deux classes des points d'apprentissage de telle manière que la distance entre les points les plus proches de la marge et l'hyperplan soit maximisée (cf. figure 1). La première version de l'algorithme a été proposée par Vapnik [12].

L'intérêt pour le problème de la fiabilité est simple : il s'agit d'associer une classe à la réponse du système mécanique pour la réalisation x des variables de base, classe "sûreté" ($+1$), et classe "défaillance" (-1). **Notre objectif est de trouver une formulation analytique de la frontière des classes.**

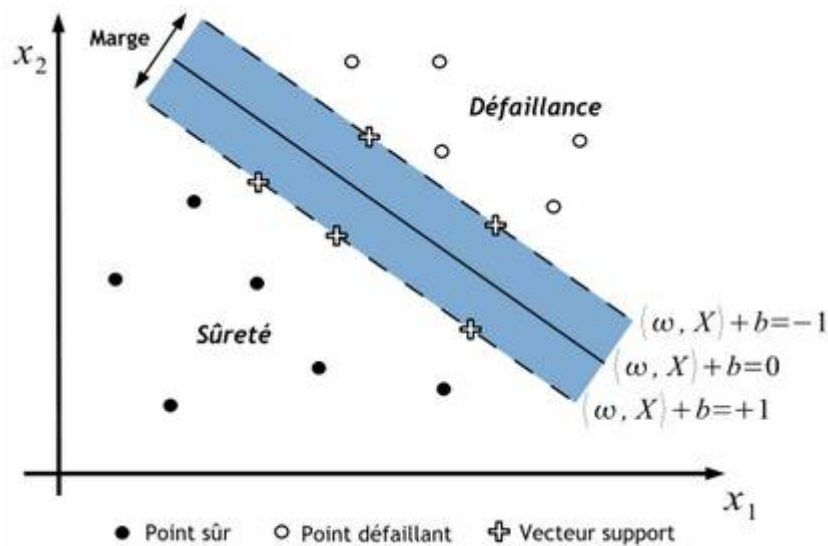


Figure 1. Illustration de la classification binaire par *Support Vector Machine*. Les différents attributs des SVM sont affichés sur la figure : la marge, les points d'apprentissage des 2 classes, les points (ou vecteurs) supports qui permettent à eux seuls de définir la frontière entre les classes.

On demande à cet hyperplan de maximiser la distance entre l'hyperplan et les deux classes, ce qui constitue une condition d'optimalité de position de l'hyperplan. Cela se comprend intuitivement sur la figure 1. Le problème de classification se résume à déterminer le vecteur de paramètres ω et le seuil b , en respectant ces conditions d'optimalité de position de l'hyperplan.

La résolution du problème d'optimisation passe par l'utilisation du Lagrangien pour intégrer les contraintes de bonne classification. Les contraintes actives de l'optimisation correspondent aux points ou vecteurs supports. Ces contraintes actives ne sont autres que les points sur la marge.

Il est clairement montré que l'hyperplan est uniquement défini par les vecteurs supports, *i.e.* les points les plus proches, ce qui est pressenti intuitivement : pour définir la frontière entre les

domaines il suffit de s'appuyer sur les points proches de cette frontière. Cette propriété est essentielle pour la suite : **pour affiner la séparation, seules les réalisations dans la marge sont utiles, les autres peuvent être classées sans calcul supplémentaire à partir de la connaissance du séparateur SVM.**

2.2.2 Classification non linéaire

Cette méthode a été généralisée à la classification non linéaire par l'introduction de fonctions noyaux « *the kernel trick* » qui permettent de réaliser la classification dans un espace de projection dit « *feature space* » de taille supérieure à l'espace de départ dans lequel il existe un séparateur linéaire. Ce concept est illustré en figure 2.

Deux applications, classification et régression, sont étudiées par la théorie de l'apprentissage statistique et sont intéressantes pour une utilisation en mécanique probabiliste :

- La classification : à partir de quelques échantillons, un modèle mathématique permettant de reproduire la fonction $\text{sign}(G(X))$ est recherché. En fiabilité, cela est lié à la recherche de l'état-limite : $G(X) = 0$. L'obtention d'un modèle mécanique de l'état-limite permet le calcul rapide de la probabilité de défaillance, ainsi que du point de défaillance le plus probable.
- La régression : un modèle mathématique permettant d'approximer la fonction $G(X)$ est recherché. L'obtention de ce modèle permet le calcul de la distribution de la réponse et l'estimation de la moyenne et des moments statistiques d'ordres supérieurs.

À partir de cet outil ont été construites des méthodologies originales spécifiques aux problèmes posés par l'approche probabiliste des structures : *i.e.* l'analyse de fiabilité et l'analyse de sensibilité.

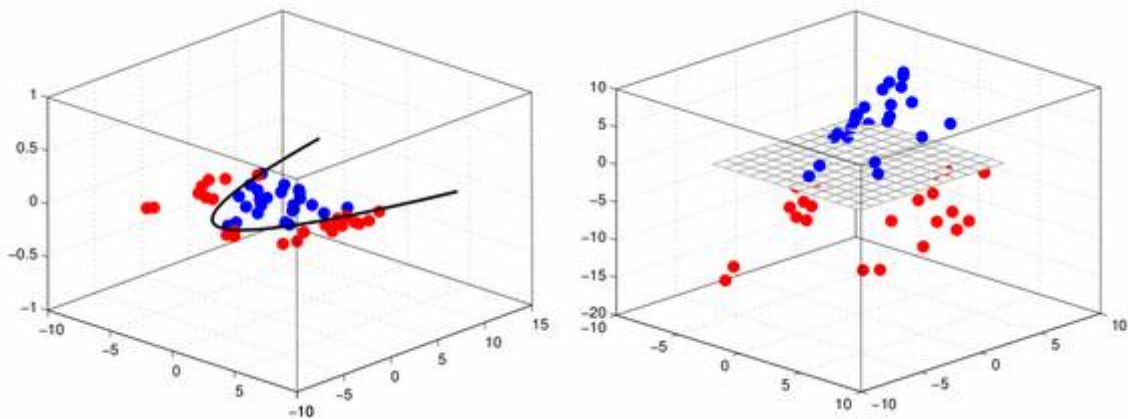


Figure 2. Illustration de transformation de l'espace de départ vers le *feature space*. Le *Kernel Trick* permet de faire le lien entre un séparateur non linéaire dans l'espace de départ et un séparateur linéaire dans l'espace support par l'intermédiaire d'une fonction noyau.

2.3 SVM, fiabilité et Monte carlo

L'approche en classification par maximisation de la marge est utilisée pour construire une formulation analytique de la frontière entre les domaines de sûreté et de défaillance ($G > 0$ et $G \leq 0$). Une critique constructive de l'algorithme d'apprentissage de J.E. Hurtado [7] nous a

permis d'aboutir tout d'abord à un algorithme performant étudié spécifiquement pour la fiabilité et pour l'obtention de la probabilité de défaillance : la méthode SMART (*Support vector Margin Algorithm for Reliability esTimation*), méthode détaillée dans [6]. Une sélection judicieuse de nouveaux points dans la marge du séparateur à l'étape i permet d'améliorer le séparateur de l'étape $i + 1$. Cet enrichissement progressif de la zone de séparation entre sûreté et défaillance permet d'obtenir une frontière analytique précise.

Cette méthode baptisée SMART (*Support vector Margin Algorithm for reliability esTimation*) est basée sur une propriété intéressante des SVM : pour améliorer le séparateur défini, il faut ajouter à la base d'apprentissage des points situés dans la marge. Ainsi à chaque itération, soit à chaque amélioration du séparateur, « quelques » points de la marge sont ajoutés à la base de données des points d'apprentissage. Cette propriété permet d'affiner le séparateur. Le gain en temps de calcul est obtenu par le fait qu'un nombre restreint de réalisations permet de définir le séparateur SVM, qui permet ensuite de séparer l'ensemble des points d'une simulation de Monte-carlo et d'aboutir ainsi à la probabilité de défaillance.

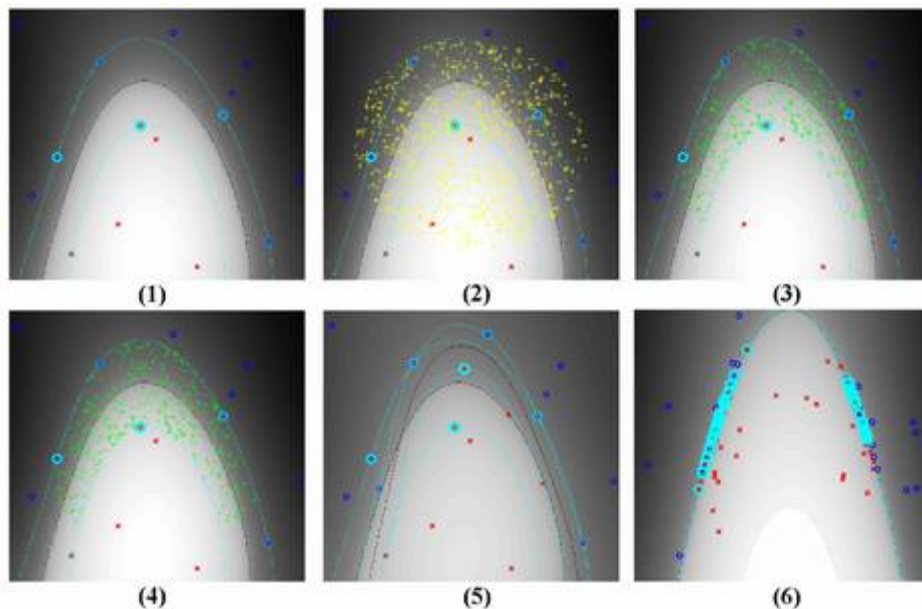


Figure 3. Illustration sur un exemple en 2 dimensions des étapes de la construction itérative de l'état-limite à partir de la méthode d'apprentissage SMART

Le schéma itératif de la méthode d'apprentissage (illustré par la figure 3) est le suivant :

1. transformation des variables aléatoires dans l'espace standard (espace de variables gaussiennes centrées réduites et décorrélées) ;
2. réalisation d'un premier plan d'expérience aléatoire et évaluation des points par la fonction de performance ;
3. calcul d'un premier séparateur par rapport aux classes obtenues sur les premiers points ;
4. définition d'une population de travail par une simulation : zone de l'espace dans laquelle le séparateur doit être affiné ;
5. sélection des points de la marge parmi la population de travail ;
6. sélection de k points de la marge ;
7. évaluation de la fonction de performance sur les k points et évaluation d'un nouveau séparateur ;
8. retour à l'étape 4 jusqu'à convergence.

L'arrêt du processus de l'approximation est piloté par la convergence de l'évaluation de la probabilité de défaillance et la qualité de l'approximation est mesuré par différents indicateurs construits sur des critères de la marge : largeur, nombre de points...

À partir de ce schéma itératif de principe, la réflexion a aboutit à différentes étapes clés représentant le coeur de la méthode SMART.

- **Le plan d'expériences initial**

Un compromis est nécessaire entre le nombre de points initiaux et l'exploration de l'espace. Dans cette optique, le plan aléatoire de type hypercube latin a été retenu.

- **Approche multi-échelles des phases d'apprentissage**

3 phases définissent le processus d'apprentissage :

- *position* : la population de travail est uniforme et dispersée ;
- *stabilisation* : population de travail toujours uniforme mais plus dense ;
- *précision* : la population de travail est la simulation de Monte-Carlo.

Ces phases permettent d'améliorer la vitesse de convergence de la méthode.

- **Sélection de nouveaux points d'apprentissage**

Les points d'apprentissage sont sélectionnés parmi les points de la population de travail appartenant à la marge :

- *clusters* : pour une dispersion le long de la marge ;
- *instables* : points dont la classe change entre 2 itérations ;
- *proches* : points les plus proches du séparateur analytique.

Cette méthode d'apprentissage est assez efficace, mais l'évaluation d'une probabilité de défaillance faible reste cependant une limite. En effet, ce cas de figure influence le choix des paramètres à utiliser : la taille du plan initial et le nombre de simulations nécessaires à l'évaluation de la probabilité de défaillance. La section suivante montre comment la *subset simulation* peut améliorer le concept dans ce cas de figure.

2.4 SVM, fiabilité et *Subset Simulation*

La *subset simulation*, méthode décrite par Au et Beck dans [1], est basée sur la définition des probabilités conditionnelles pour écrire la grandeur recherchée :

$$P_f = P(F) = P(F / F_{m-1})P(F_{m-1}) = \dots = P(F_1) \prod P(F_i / F_{i-1}) \quad (1)$$

où F est le domaine de défaillance, et $F_1 \supset F_2 \supset \dots \supset F_m = F$ est une séquence de domaines de taille décroissante, inclus les uns dans les autres. Cette séquence peut être définie de la manière suivante : $F_i = \{G(x) < y_i\}$, où les y_i sont des valeurs décroissantes de la fonction de performance et $y_m = 0$.

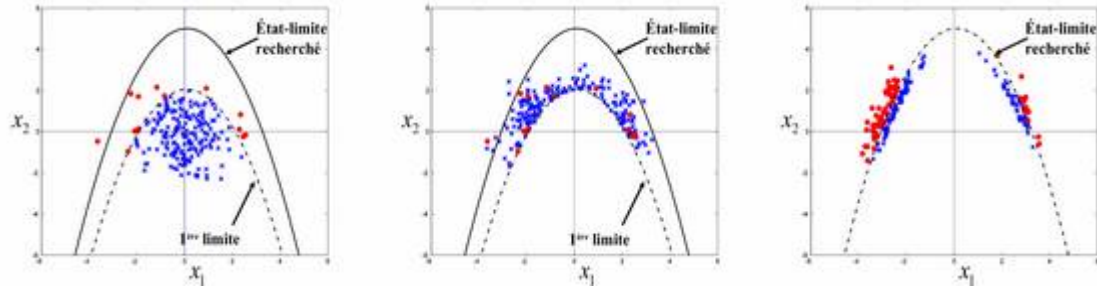


Figure 4. Illustration de la simulation par *subset*. L'idée est de s'approcher de la fonction d'état-limite par étapes successives

L'idée des *subset simulations* est d'évaluer P_f par l'estimation des m différents facteurs. De cette façon, même si P_f est très faible, en choisissant judicieusement la valeur des seuils intermédiaires, les différents facteurs à évaluer peuvent être assez grands et ainsi être estimés de manière efficace par des simulations.

L'utilisation de l'apprentissage par classification pour la détermination des différents facteurs permet d'obtenir la probabilité de défaillance du système. Cette méthode originale est appelée ²SMART (*Subsets simulations by Support vector Margin Algorithm for Reliability esTimation*). Une description est disponible dans l'article [5].

Le couplage d'outils de l'apprentissage statistique, quasi-inexistants en fiabilité, avec ceux, récents, des simulations conditionnées aboutit à une méthode performante pour l'analyse de fiabilité. Cette dernière s'avère efficace pour obtenir une probabilité de défaillance, même très faible, d'un système complexe.

3 Problématique du flambement des coques résistantes de sous-marins

3.1 Généralités

La vérification de la tenue au flambement des coques résistantes de sous-marins reposait, avant l'apparition des méthodes par éléments finis, sur des méthodes analytiques adaptées à l'étude des modes globaux et locaux (cf. [11] par exemple). Ces méthodes, aujourd'hui reprises dans les codes de dimensionnement tels que celui du BV [3], devaient prendre en compte, au moins de façon approchée, les non-linéarités géométriques et matériaux, ainsi que les défauts de forme réglementaires. Une de leurs principales limitations réside dans le fait qu'outre un domaine de validité limité, elles ne permettent pas de prendre en compte l'interaction de différents modes de flambement.

Les méthodes par éléments finis permettent quant à elles de traiter le problème d'instabilité de façon plus globale. Il faut pour cela traduire le critère de Trefftz, basé sur le minimum de l'énergie potentielle totale : « une structure est en configuration d'équilibre stable si et seulement si la variation de l'énergie totale pour un déplacement cinématiquement admissible est positive ». Dans le cas du flambement élastique, cela revient à résoudre le problème aux valeurs propres [4] :

$$(\mathbf{K}_0 + \lambda_i \mathbf{K}(\sigma)) \vec{u}_i = 0 \quad (2)$$

Avec : \mathbf{K}_0 la matrice de rigidité initiale
 $\mathbf{K}(\sigma)$ la matrice des contraintes initiales
 λ_i les valeurs propres du problème (facteur à appliquer au chargement initial conduisant au $i^{\text{ème}}$ mode de flambement)
 \vec{u}_i les vecteurs propres du problème (forme du $i^{\text{ème}}$ mode de flambement)

La problématique de la tenue au flambement des coques de sous-marins nécessite de prendre également en compte les non-linéarités géométriques, en terme de grands déplacements et de forces suiveuses. Il convient alors, à la suite d'un calcul incrémental (avec pilotage par longueur d'arc par la méthode de Riks par exemple), de tester les différents états d'équilibre de la structure, en résolvant de nouveau un problème aux valeurs propres :

$$\mathbf{K}_T . \Delta \vec{u} = \Delta \vec{F} \quad (3)$$

$$(\mathbf{K}_0 + \mathbf{K}_T(u_k) + \lambda_i (\mathbf{K}_T(\pi_k) - \mathbf{K}_T(p))) \vec{u}_i = 0 \quad (4)$$

Avec : $\mathbf{K}_T(u_k)$ la matrice associée aux grands déplacements
 $\mathbf{K}_T(\pi_k)$ la matrice associée à l'incrément de contraintes
 $\mathbf{K}_T(p)$ la matrice associée aux forces suiveuses

La charge critique est alors obtenue à l'incrément de chargement pour lequel $\lambda_i = 1$.

Du fait des épaisseurs considérées (quelques dizaines de millimètres), le flambement des coques résistantes de sous-marins est souvent précédé de la plastification du matériau, provoquant une accélération du phénomène de flambage. Sa prise en compte est effectuée de manière conservatrice sous STANLAX ([8]) en adoptant la théorie du module tangent. Elle est de plus modulée en fonction d'un paramètre α introduit dans le calcul de la contrainte équivalente de Von Mises, exprimée en coordonnées cylindriques sous STANLAX par :

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\left(\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \cdot \sigma_\theta + 3\sigma_{z\theta} \right)_{membrane} + \alpha^2 \cdot \left(\sigma_z^2 + \sigma_\theta^2 - \sigma_z \cdot \sigma_\theta + 3\sigma_{z\theta} \right)_{flexion}} \quad (5)$$

Avec $\alpha \in \left[\frac{2}{3}; 1 \right]$

$\alpha = \frac{2}{3}$: la coque est plastique dès que toute l'épaisseur est plastifiée

$\alpha = 1$: la coque est plastique dès que sa peau est plastifiée

Par souci de conservatisme, nous nous placerons dans le cas unitaire pour la présente étude.

3.2 Cas d'étude

La problématique du flambement des coques de sous-marins est prise en compte dès la phase de pré-dimensionnement. La première étape de ce pré-dimensionnement réside dans l'étude de la maille courante. Du fait des conditions aux limites appliquées à celle-ci, cette étude est équivalente à celle d'un cylindre raidi infiniment long (figure 5).

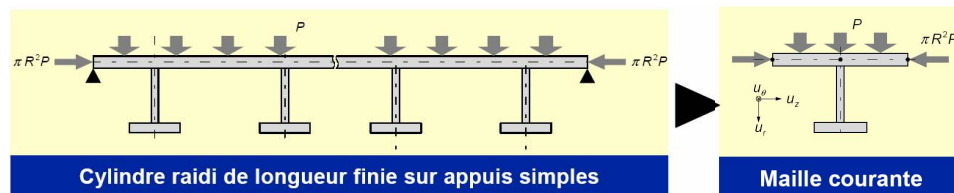


Figure 5 - Principe d'équivalence entre cylindre raidi de longueur infinie et maille courante

Une telle structure est particulièrement sensible à la présence de défauts, qui vont orienter son comportement vers un mode de flambement particulier. Sont donc pris en compte à cette

étape :

- les défauts de circularité favorisant les modes de flambement d'ensemble (fig. 6) ;
- les défauts de flèche en maille favorisant les modes de gondolement de bordé (fig. 7) ;
- les défauts d'équerrage âme / bordé favorisant les modes de flambement par déversement de raidisseur (non traités dans ce papier).

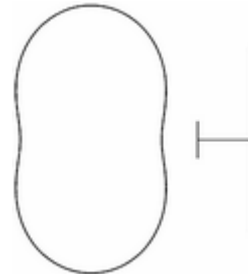
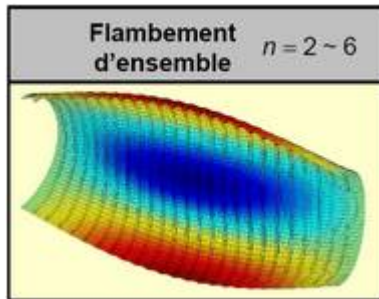


Figure 6 – Mode de flambement d'ensemble sur l'harmonique 2

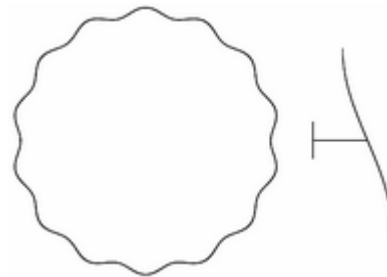
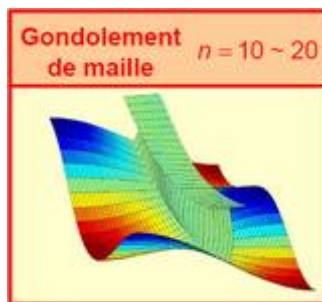


Figure 7 – Mode de gondolement de bordé sur l'harmonique 14

Afin de pouvoir comparer les résultats de cette étude avec celle présentée dans [2], les mêmes dimensions de maille élémentaire sont reprises (figure 8). La contribution des joints soudés au comportement de la structure est ici considérée comme négligeable. Ils ne seront par conséquent pas pris en compte dans les calculs.

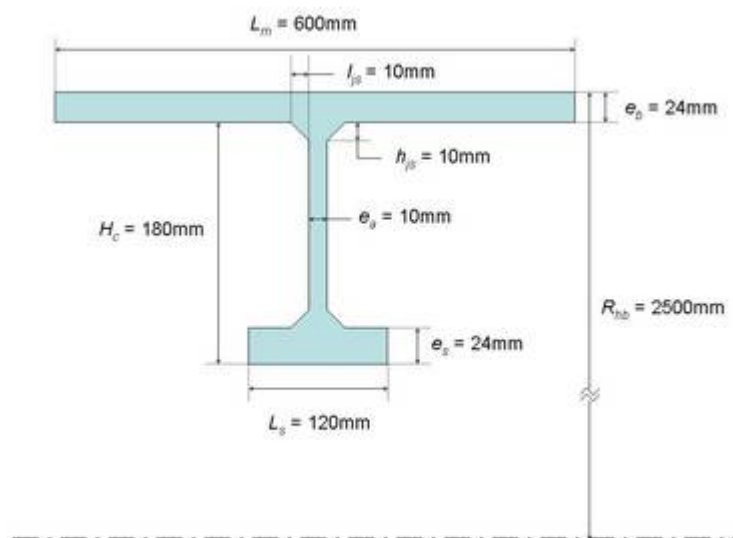


Figure 8 – Dimensions de la maille élémentaire étudiée

Ce papier se focalise sur l'influence du point de vue fiabiliste des deux défauts prépondérants déterminés de façon déterministe. En notant z , θ , def_i respectivement les positions axiale et circonférentielle d'un point de la maille et l'amplitude du défaut sur l'harmonique i , le défaut de circularité sur l'harmonique 2 et le défaut de flèche en maille sur l'harmonique 14 peuvent être exprimés respectivement par les équations (6) et (7).

$$f(z, \theta) = def_2 \cos(2\theta) \quad (6)$$

$$f(z, \theta) = def_{14} \cos\left(\frac{\pi \cdot z}{L_m}\right) \cos(14\theta) \quad (7)$$

L'influence de ces défauts est étudiée dans un premier temps de façon indépendante, puis en considérant une superposition possible de ceux-ci. Les calculs numériques étant effectués par éléments finis pseudo-axisymétrique COMU (déformées décomposées en séries de Fourier) sous STANLAX V2006, la qualité de la réponse du modèle est fonction de la base de décomposition utilisée. Les bases suivantes sont adoptées :

- Défaut de circularité sur harmonique 2 : base 2, 4, 6
- Défaut de flèche en maille sur harmonique 14 : base 14, 28, 42
- Défauts sur harmoniques 2 et 14 cumulés : base 2, 4, 6, 12, 14, 16, 26, 28, 30, 40, 42, 44

Le matériau considéré est un acier 60HLES(c) (acier à Haute Limite d'Elasticité Soudable) pour lequel la courbe de traction est donnée en figure 9.

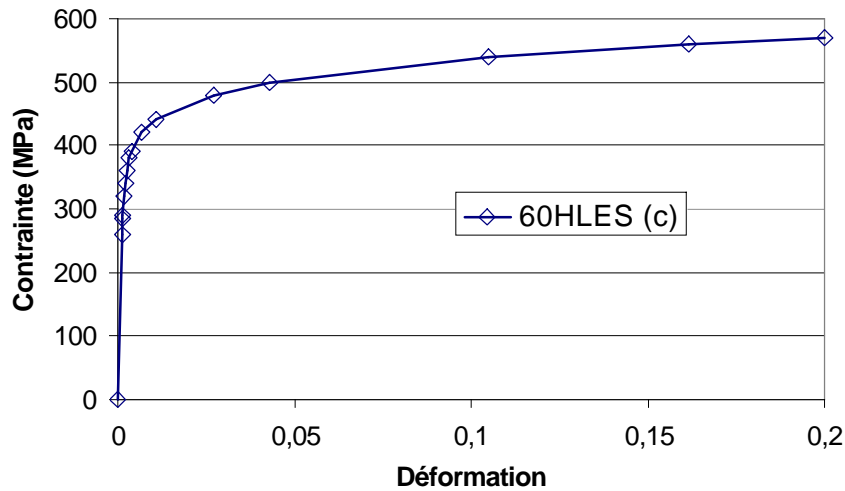


Figure 9 – Courbe de traction déterministe de l'acier 60HLES(c)

4 Couplage mécano-fiabiliste

4.1 Modélisation fiabiliste

La modélisation probabiliste est issue de [2]. Elle est récapitulée dans le tableau 1.

Variable	Loi	Moyenne	Ecart-type
Epaisseur du bordé e_b	Normale	24 mm	0.72 mm
Longueur de maille L_m	Normale	600 mm	18.0 mm
Hauteur d'âme H_a	Normale	156 mm	4.68 mm
Amplitude du défaut de circularité def_2	Lognormale	$0.0025 R_{hb}$	$0.00125 R_{hb}$
Amplitude du défaut de gondolement def_{14}	Lognormale	Loi 1	$0.005 L_m$
		Loi 2	$0.009 L_m$
Module de Young E	Normale	200 GPa	4 GPa
Limite d'élasticité s_y	Lognormale	390 MPa	18 MPa

Tableau 1 – Paramètres des variables aléatoires

La variabilité du module de Young et de la limite d'élasticité implique une variabilité de la loi de comportement du 60HLES, prise en compte en première hypothèse comme suit :

$$\sigma_{nouveau}^{(i)} = \frac{\sigma_y}{\sigma_y^{(0)}} \sigma_0^{(i)}$$

$$\varepsilon_{nouveau}^{(i)} = \varepsilon_0^{(i)} - \frac{\sigma_0^{(i)}}{E^{(0)}} + \frac{\sigma_{nouveau}^{(i)}}{E}$$
(8)

Avec :

- $\sigma_{nouveau}^{(i)}$: nouvelle contrainte au point indicé i
- $\varepsilon_{nouveau}^{(i)}$: nouvelle déformation au point indicé i associée à $\sigma_{nouveau}^{(i)}$
- $\sigma_0^{(i)}$: contrainte de référence au point indicé i
- $\varepsilon_0^{(i)}$: déformation de référence au point indicé i associée à $\sigma_0^{(i)}$
- $E^{(0)}, \sigma_y^{(0)}$: module de Young et limite d'élasticité de référence (valeurs moyennes)
- E, σ_y : nouvelles valeurs du module de Young et de la limite d'élasticité (évoluant au cours de l'étude fiabiliste)

Dans le cas de la structure étudiée, la pression de service (P_0) est supposée égale à 2,5 MPa. La sûreté de la structure est définie par une pression de ruine en flambage (P_1) supérieure à la pression de service. La fonction de performance G est ainsi définie par (9).

$$G = P_1 - P_0$$
(9)

4.2 Principe du couplage

La figure 10 montre le schéma d'implémentation du couplage direct entre les analyses fiabilistes et éléments finis. Les variables aléatoires et la fonction de performance sont définis dans PHIMECA [10]. Lors de l'analyse fiabiliste, la réponse du modèle mécanique pour chaque appel à l'état-limite est obtenue par le code éléments finis STANLAX. Des routines Fortran permettent l'écriture et le traitement des jeux de données en fonction des réalisations des variables aléatoires.

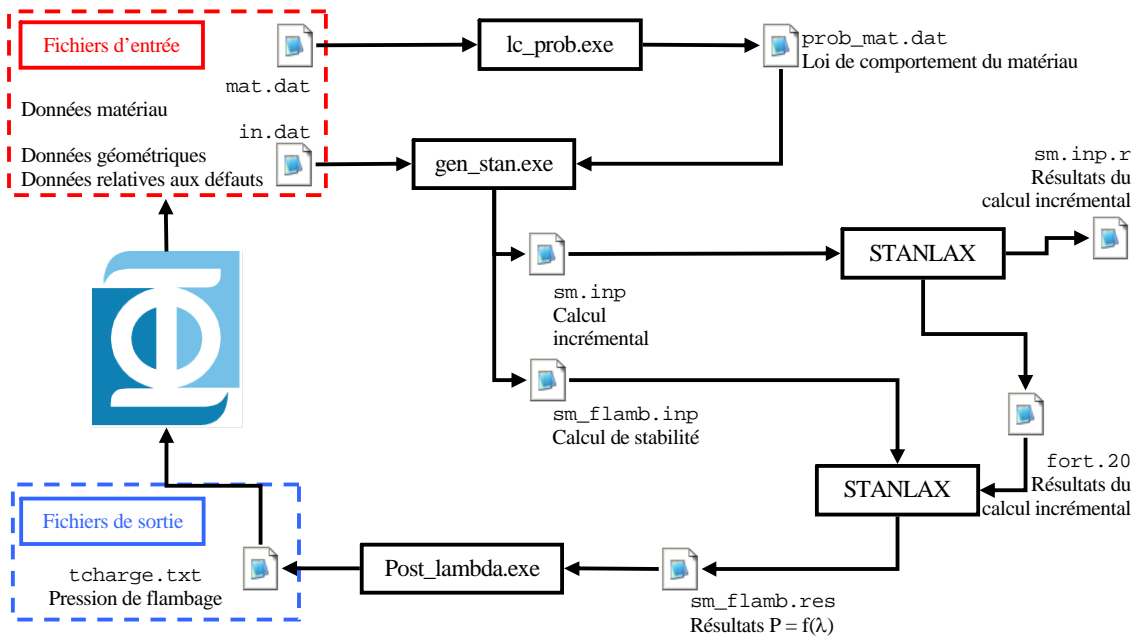


Figure 10 – Principe du couplage entre Phimeca Soft V2.7 et STANLAX V2006

Afin d'évaluer la pertinence de la méthode ²SMART, les résultats obtenus avec cette dernière sont comparés aux méthodes plus classiques que sont FORM et les subsets simulations. Les paramètres de calculs utilisés pour chacune d'elles sont :

- FORM :
 - o Algorithme : HLRF ;
 - o Pas fixe = 0,4 ;
 - o Différence finie avant avec un pas de différence finie variable égal à 0,05 fois la valeur de la variable à l'itération courante ;
 - o Critère de convergence sur beta = 10^{-2} ;
 - o Critère de convergence sur G = 10^{-3} ;
 - o Point de départ médian.
- Subsets simulations : 400 simulations par pas.
- ²SMART : lancement avec les options par défaut de Phimeca Soft (paramétrage ayant pour objectif la robustesse de la méthode, sans validation croisée pour l'optimisation des paramètres des SVM).

5 Résultats

5.1 Comparaison FORM / ²SMART / Subsets simulations

Le tableau 2 synthétise les indices de fiabilité obtenus pour les cinq cas de calculs testés. Notons que cet indice de fiabilité est obtenu à partir de la probabilité de défaillance pour les méthodes ²SMART et subsets simulations.

Défauts considérés	Mode 2	Mode 14 loi 1	Mode 14 loi 2	Modes 2 + 14 loi 1	Modes 2 + 14 loi 2
Surfaces de réponse [2]	2.79	3.17	2.14	2.75	1.99
FORM	2.81	3.02	1.94	2.75	1.85
² SMART	2.83	3.35	2.06	2.52	1.77
Subsets simulations	2.79	3.04	1.97	2.54	1.72

Tableau 2 – Indices de fiabilité obtenus pour les différents cas de calculs et méthodes utilisées

Les origines des différences observées entre les résultats de calculs effectués pour cette étude et ceux fournis dans [2] sont les suivantes :

- les méthodes fiabilistes diffèrent, mais les indices de fiabilité obtenus laissent supposer une linéarité (au moins locale) de l'état-limite ;
- du point de vue du calcul déterministe, les méthodes de résolution implémentées dans STANLAX ont évoluées ;
- les précédents calculs se focalisaient sur le point limite (valeur maximale de la pression atteinte lors du calcul incrémental), alors que les présents calculs prennent en compte l'instant de flambement plastique.

Le tableau 3 permet de statuer quant à la qualité des résultats obtenus par subsets simulations. Les coefficients de variation obtenus montrent que le nombre de points par pas de subsets était trop limité pour un problème dans un espace à 7 dimensions. Ces calculs sont néanmoins suffisants pour valider le niveau de fiabilité trouvé par les méthodes FORM et ²SMART dans les cas à un seul défaut, et par la méthode ²SMART dans le cas des défauts couplés. Notons que dans les cas à un seul défaut, les coordonnées du point de défaillance le plus probable sont sensiblement identiques quels que soient les méthodes utilisées

	Coeff. de variation sur P_f	Intervalle de confiance à 90% sur β
Mode 2 seul	37%	[2,671 ; 3,115]
Mode 14 seul loi 1	35%	[3,226 ; 3,588]
Mode 14 seul loi 1	18%	[1,958 ; 2,200]
Modes 2+14 couplés loi 1	24%	[2,404 ; 2,699]
Modes 2+14 couplés loi 2	10%	[1,698 ; 1,848]

Tableau 3 – Critères de qualité des subsets simulations

Comme attendu, la méthode FORM montre ses limites dans les cas de calculs avec défauts couplés. La différence entre les résultats FORM et ²SMART est néanmoins relativement faible (environ 8%), ce qui peut paraître négligeable vis-à-vis des autres approximations effectuées dans les calculs. Remarquons toutefois que l'approximation FORM est dans ce cas non conservative. L'avantage principal de la méthode ²SMART, outre une précision similaire aux subsets simulations pour un nombre d'appels à l'état-limite moindre (figure 11), réside dans le fait qu'elle ne nécessite pas de vérification a posteriori, contrairement à FORM.



Figure 11 – Ordre de grandeur du nombre d'appels à l'état limite en fonction des méthodes utilisées

5.2 Méthodologie ²SMART appliquée à un cas 2D

Afin d'illustrer graphiquement les conclusions de la section précédente, nous nous ramenons ici à un cas en 2 dimensions. Nous retenons ainsi comme variables aléatoires les défauts de forme, identifiées comme prépondérantes. En fonction des réalisations de ces variables aléatoires, la maille élémentaire pourra ainsi flamber par mode d'ensemble sur l'harmonique 2 ou par gondolement de bordé sur l'harmonique 14. Le modèle probabiliste en 2 dimensions est donné dans le tableau 4.

Variable	Loi		Moyenne	Ecart-type
Amplitude du défaut de circularité def_2	Lognormale		0.0025 R_{hb}	0.00125 R_{hb}
Amplitude du défaut de gondolement def_{14}	Lognormale	Loi 1	0.005 L_m	0.0025 L_m

Tableau 4 – Paramètres des variables aléatoires

Dans le cas où l'on souhaiterait utiliser FORM, la connaissance a priori du problème mécanique déterministe permet d'orienter l'algorithme fiabiliste vers la recherche du point de défaillance associé au mode de flambement d'ensemble ou de gondolement de bordé (tableau 5). En combinant les résultats FORM par une approche système, on obtient un indice de fiabilité de 2.88 (soit une probabilité de défaillance de 1.98^E-3).

Point de départ de l'algorithme HLRF	Def_{14}	moyenne	Moyenne + 3 écart-types
	Def_2	moyenne	Moyenne
Mode de flambement activé		Ensemble	Gondolement de bordé
Indice de fiabilité β		2.94	3.31
Probabilité de défaillance P_f		1.61^E-3	4.67^E-4
Nombre d'appels à l'état limite		88	163
Coordonnées du point de conception U^*	Def_{14}	0.14	3.24
	Def_2	2.94	0.68

Tableau 5 – Résultats FORM pour le cas à 2 dimensions, fonction du point de départ

La méthode ²SMART fournit des résultats (tableau 6) proches de l'approche système consécutive à 2 analyses FORM. Ceci s'explique par la quasi-linéarité par morceaux de l'état-limite (figure 12). La méthode ²SMART présente l'avantage de ne pas nécessiter de connaissances a priori du comportement mécanique de la structure étudiée. Elle permet de plus de gérer de façon transparente pour l'utilisateur la transition entre 2 modes de flambement. Notons que le nombre relativement élevé d'appels à l'état-limite pour le cas d'étude est dû au paramétrage par défaut de la méthode ²SMART sous PHIMECA, visant une robustesse maximum. Ce cas a également été traité de manière non automatique par la méthode SMART pour uniquement 135 appels à l'état-limite. Le coût de calcul est dans ce cas directement comparable à FORM.

Indice de fiabilité β	2.81
Probabilité de défaillance P_f	2.40^E-3
Nombre d'appels à l'état limite	1030

Tableau 6 – Résultats obtenus par la méthode ²SMART

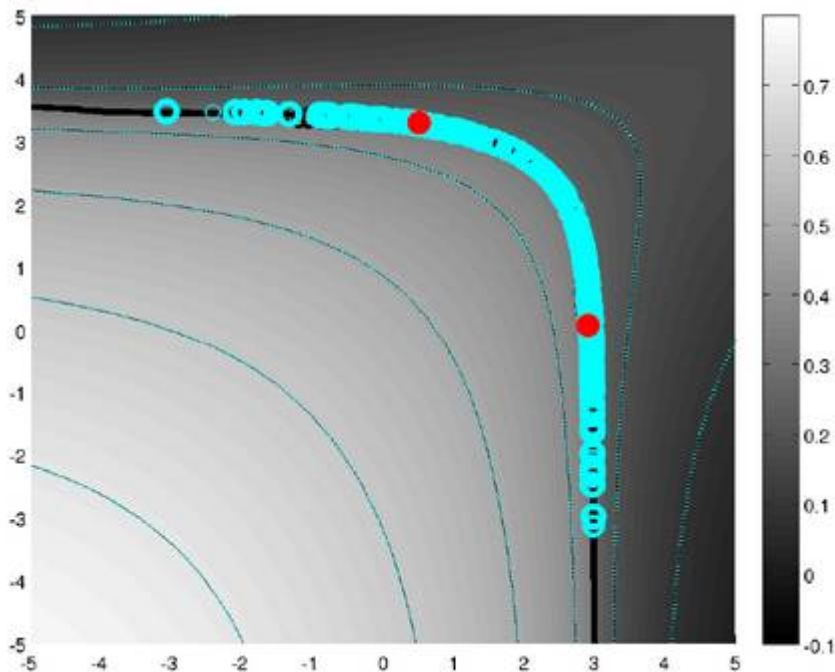


Figure 12 – Illustration de l'état-limite final déterminé par la méthode ²SMART (en rouge : point de défaillance le plus probable et point secondaire obtenus par la méthode FORM)

6 Conclusion

La problématique du flambement des coques résistantes de sous-marins s'avère délicate à traiter d'un point de vue fiabiliste avec des méthodes d'approximation classiques, du fait notamment de l'interaction possible entre les différents modes de flambement. Le cas d'une maille élémentaire présenté ici montre que FORM peut être facilement prise en défaut, même en ne considérant que la possibilité d'activer 2 modes de flambement. Les faibles non-linéarités de l'état-limite du cas considéré rendent cependant acceptables les résultats obtenus par FORM. Au vu de ceux-ci, FORM reste ainsi la méthode présentant le meilleur compromis coût de calcul / précision des résultats.

Les subsets simulations ont l'atout indéniable d'être une méthode sans biais ni approximation. Cependant, pour obtenir une confiance raisonnable dans le résultat (coefficient de variation sur la probabilité de défaillance inférieur à 10%), il est nécessaire d'effectuer un nombre conséquent de simulations par pas, nombre inconnu avant l'obtention d'un résultat. Cependant le coût de calcul en est directement impacté.

La méthode ²SMART se révèle alors une alternative efficace malgré l'approximation. Pour marquer l'apport de la méthode ²SMART sur ces problématiques de flambement, il serait intéressant d'obtenir un réel résultat de validation par subsets avec un coefficient de variation non discutable.

Rappelons que les coûts de calcul présentés correspondent aux implémentations Phimeca Soft. Cependant, la performance des outils SVM et des méthodes associées sont également liés aux paramètres de ces méthodes. Sur une gamme d'applications similaires, il peut être intéressant d'optimiser ces jeux de paramètres pour une efficacité optimale.

L'étape suivante consistera alors à utiliser ces méthodes dans le cadre de la détermination de coefficients de sécurité basés sur la fiabilité. Ceci nécessitera, en sus de méthodes adaptées, une connaissance plus précise de la variabilité des différents paramètres de conceptions. Des études statistiques sur des mesures in situ sont en cours afin de répondre à cette problématique

Références

- [1] S.K. Au et J.L. Beck, *Estimation of small failure probabilities in high dimensions by subset simulation*, Probabilistic Engineering Mechanics 16, 2001.
- [2] J.M. Bourinet, N. Gayton, M. Lemaire & A. Combescure. Plastic collapse of imperfect submarine pressure hulls : a probabilistic approach. *Proceedings of ICOSSAR 2001 conference*.
- [3] Bureau Veritas. *Rules for the Classification of Naval Submarines, Part C, Pressure Hull and Structures*.
- [4] A. Combescure. *Etude de la stabilité non linéaire géométrique et non linéaire matériau des coques minces – application aux coques de révolution avec imperfections soumises à des chargements complexes*, Habilitation à diriger des recherches, INSA Lyon, 1995
- [5] F. Deheeger & M. Lemaire. Support vector machine for efficient subsets simulation: ²SMART method. *Applications of Statistics and Probability in civil Engineering, 10th ICASP*, Kanda J., Takada T. and Furuta H. eds, 2007.
- [6] F. Deheeger et M. Lemaire. *Reliability analysis by support vector machine classification, Integrating Structural Analysis, Risk and Reliability*, 3rd ASRANet colloquium, Glasgow, 2006.
- [7] J.E. Hurtado, *Structural reliability, Statistical Learning Perspectives*, Lecture Notes in Applied and Computational Mechanics Vol.17, Springer, 2004.
- [8] J.F. Jullien, A. Combescure & C. Baillis. STANLAX, logiciel 2D d'analyse 3D de stabilité non-linéaire des coques de révolution. *Proc. 4^{ème} Colloque National en Calcul de Structures*, 1999.
- [9] M. Lemaire, *Structural Reliability*, ISTE - to appear, 2008
- [10] PHIMECA Engineering S.A. *User Manual of Phimeca Soft v2.7*.
- [11] C.T.F. Ross. *Pressure vessels under external pressure – statics and dynamics*. Elsevier science publishers ltd., 1990.
- [12] V. Vapnik, *Statistical Learning Theory*. Wiley-Interscience, 1998