HAL
open science

Induction à rebours ou rétro-déduction ?

Léo Gerville-Réache

To cite this version:

Léo Gerville-Réache. Induction à rebours ou rétro-déduction ?. 2017. hal-01499865

HAL Id: hal-01499865

https://hal.science/hal-01499865v1

Preprint submitted on 1 Apr 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Induction à rebours ou rétro-déduction ?

Léo Gerville-Réache, IMS - UMR 5218 - Université de Bordeaux

L'induction à rebours (backward induction) est un principe de raisonnement par récurrence qui a la particularité de partir de la « fin » pour arriver au « début ». Contrairement au raisonnement par récurrence en mathématique, il est donc nécessaire qu'il y ait une fin.

En théorie des jeux, l'induction à rebours est par exemple invoquée dans le jeu du mille-pattes sous l'hypothèse de connaissance commune de la rationalité (CKR). La solution du jeu semble alors bien paradoxale. Mais c'est sûrement le problème philosophique de l'interrogation surprise qui est le plus perturbant [3].

Un professeur annonce à ses étudiants qu'un examen aura lieu la semaine suivante. Cependant, le professeur ajoute qu'il ne sera pas possible aux étudiants de connaître à l'avance la date de l'examen, car celui-ci aura lieu par surprise.

Un étudiant intelligent raisonne alors ainsi : l'examen ne peut se dérouler le dernier jour de la semaine – vendredi – car sinon je saurai, de manière certaine, que l'examen aura lieu le vendredi. Ainsi, le vendredi peut-il être éliminé. De même, poursuit l'étudiant, l'examen ne peut se dérouler l'avant-dernier jour de la semaine – jeudi – car sinon je saurai que l'examen aura lieu le jeudi. Ainsi, le jeudi est-il également éliminé. Par le même raisonnement l'étudiant conclut que l'examen ne peut avoir lieu ni le mercredi, ni le mardi, ni le lundi. Finalement, l'étudiant conclut que l'examen ne peut avoir lieu aucun jour de la semaine.

Pourtant, cela n'empêche pas l'examen d'avoir eu lieu le mercredi, à la grande surprise des étudiants.

Pourrait-il être nécessaire que l'interrogation surprise n'ait pas lieu mais que cela ne soit pas suffisant pour qu'elle n'ait effectivement pas lieu ?

En effet, philosophiquement, on distingue les vérités nécessaires (dont la logique peut rendre compte; a priori; universelles) des vérités contingentes (qui sont tirées de l'expérience; a posteriori; particulières). Il est clair que la vérité factuelle (ou contingente) de cette histoire est que l'interrogation a eu lieu le mercredi et qu'aucun élève ne pouvait en être rationnellement certain le mardi soir. En effet, du fait que le mardi soir, l'examen n'ait pas encore eu lieu, il était impossible d'induire que l'examen n'aurait pas lieu le mercredi. Réciproquement, du même fait, il était impossible d'en induire que l'examen aurait lieu précisément le lendemain.

En mathématique, la récurrence semble fonctionner par déduction. En effet, **si** une propriété est vraie pour t=0 et **si** l'hypothèse qu'elle soit vraie pour $t=n$ implique qu'elle soit vraie pour $t=n+1$, **alors** la proposition est vraie pour tout n (en particulier pour n=5 par exemple). Mais les mathématiciens le savent bien. Il est donc nécessaire que la propriété soit vraie pour t=0 pour que la propriété soit vraie pour tout n. Aussi, la véracité de la proposition pour t=0 doit être un fait mathématique.

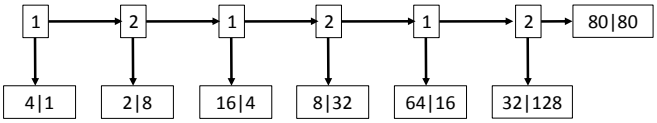
Cela signifie donc qu'un raisonnement par récurrence en mathématique n'est pas un raisonnement déductif mais bel et bien inductif. On part d'un fait mathématique et l'on raisonne pas à pas, de fait en fait.

Aussi, le terme d'induction à rebours est impropre. Nous devons parler de rétro-déduction (backward deduction).

La question est donc de savoir si un raisonnement par rétro-déduction peut produire une vérité nécessaire ?

Le problème du raisonnement de l'étudiant est qu'il part d'une hypothèse qu'il ne pourra valider que le jeudi soir. Sa rétro-déduction prouve seulement que si le jeudi soir l'interrogation n'a pas encore eu lieu c'est qu'elle n'aura pas non plus eu lieu les jours d'avant. Il lui manque la première marche factuelle de tout raisonnement par récurrence (à rebours ou pas).

Venons-en au jeu du mille-pattes [1], [2] : *Le joueur 1 a devant lui deux piles de pièces, l'une de 4 euros l'autre de 1 euro. Il a deux solutions : soit prendre le montant correspondant à la plus grosse pile, le joueur 2 recevant le montant de la plus petite pile, soit ne rien prendre et laisser le jeu se poursuivre. Dans ce dernier cas, le montant de chaque pile double : la première pile contient 8 euros, la seconde, 2 euros. Le joueur 2 se voit alors offrir le même choix que précédemment : prendre la plus grosse pile ou ne rien prendre et laisser le montant des piles doubler… tout en laissant au tour suivant la possibilité au joueur 1 de prendre la grosse pile. Le jeu comporte 6 tours, si le jeu va au bout, les joueurs se partagent le "pactole" qui est de 160 euros (80 euros pour chacun). Lors du dernier tour, le joueur 2 a deux solutions : ou bien terminer le jeu en coopérant (chacun perçoit 80 euros), ou bien terminer le jeu en prenant la grosse pile (128 euros).*



Rationnellement, il choisira cette deuxième option. Prévoyant cela, le joueur 1 va anticiper au tour précédent. Il est donc dans son intérêt d'arrêter le jeu et de prendre la grosse pile, soit 64 euros. Le joueur 2 sait cela et choisit donc d'arrêter le jeu au tour précédent, etc. Finalement, au premier tour, le joueur 1 a intérêt à arrêter le jeu et à empocher 4 euros.

On raisonne ici à partir du dernier tour et l'on rétro-déduit, sous connaissance commune de la rationalité, que le jeu ne peut pas atteindre (80;80), et ainsi de suite… Le raisonnement, très proche de celui de l'interrogation surprise, ne démontre pas qu'un joueur rationnel doive s'arrêter dès qu'il aura la main. Au contraire, CKR oblige que l'issue de ce jeu soit (80;80). Et sans CKR, l'issue dépendra de l'évolution des croyances au cours du jeu…

En aucun cas, l'induction à rebours ou, à plus proprement parler la rétro-déduction n'est en mesure d'établir des vérités nécessaires et/ou contingentes.

Bibliographie

[1] R. Aumann (1995) *Backward Induction and Common Knowledge of Rationality*, Games and Economic Behavior, vol. 8, no 1,p. 6–19.

[2] K. Binmore (1997) *Rationality and backward induction*, Journal of Economic Methodology 4 (1) p. 23-41.

[3] J. Y. Halpern and Y. Moses (1986) *Taken by Surprise: The Paradox of the Surprise Test Revisited*, Journal of Philosophical Logic Vol. 15, No. 3, pp. 281-304