



**HAL**  
open science

# Commande prédictive à base de modèle (MPC) pour le trafic urbain bi-modal

Neila Bhourri, Djilali Touazi

► **To cite this version:**

Neila Bhourri, Djilali Touazi. Commande prédictive à base de modèle (MPC) pour le trafic urbain bi-modal. CIFA : Conférence Internationale Francophone d'Automatique, Sep 2008, Bucarest, Roumanie. 8p. hal-01497156

**HAL Id: hal-01497156**

**<https://hal.science/hal-01497156>**

Submitted on 28 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

# Commande prédictive à base de modèle (MPC) pour le trafic urbain bi-modal

Neïla BHOURI<sup>1</sup>, Djilali TOUAZI<sup>2</sup>

INRETS / GRECIA

2 Avenue du Général Malleret-Joinville, 94114 Arcueil Cedex, France

<sup>1</sup> neila.bhouri@inrets.fr,

<sup>2</sup> touazi\_djilali@yahoo.fr

*Résumé*— Cet article propose une stratégie de régulation du trafic urbain bi-modal. L'objectif de cette stratégie est d'agir sur les durées des feux de la circulation pour réguler le trafic pour les modes de transport de la voiture particulière (VP) et du transport en commun de surface (TC) tout en accordant une priorité active à ce dernier. Cette stratégie consiste en une commande prédictive à base de modèle (MPC) qui sera appliquée en horizon glissant. L'originalité du travail proposé consiste en sa manière de tenir compte des contraintes d'égalités et d'inégalités auxquels sont soumis les variables d'état et les variables de commande. En effet, grâce à des changements de variables les contraintes sont considérées d'une manière intrinsèque au problème d'optimisation. La résolution numérique est réalisée grâce à un algorithme d'activation des contraintes. Des simulations ont été effectuées pour tester la stratégie sur un réseau urbain et les résultats sont donnés.

*Mots-clés*— Commande prédictive à base de modèle, MPC, horizon glissant, contraintes linéaires, activation des contraintes, trafic urbain bimodal, régulation, transport en commun, voiture particulière

## I. INTRODUCTION

L'un des piliers de l'intermodalité et du transfert modal, de la voiture particulière (VP) vers les transports en commun (TC), est d'assurer une qualité compétitive des TC par rapport à la VP. Ceci nécessite de garantir l'offre TC du point de vue de la sécurité, du confort, de l'information et du coût monétaire mais plus important encore d'assurer la régularité du service et la compétitivité des temps de parcours par rapport aux VP. Pour les transports en commun de surface, plus particulièrement les bus, la régularité et le temps de parcours sont tributaires de la charge de trafic sur la voirie et des temps d'attente aux carrefours à feux. On estime qu'entre 20 et 30% du temps est perdu en attente aux feux ou en ralentissement dans la circulation [1]. Plusieurs mesures visant à améliorer les temps de parcours des bus se sont répandues. Parmi celles-ci les sites propres ou les voies réservées aux TC, l'interdiction de stationner sur la voirie, le péage urbain visant à réduire la circulation routière, le guidage statique ou dynamique à l'aide des panneaux à messages variables pour diriger les VP vers des routes moins fréquentées ou moins gênantes pour les TC et la "priorité bus" aux carrefours à feux.

La priorité bus aux feux de signalisation peut s'opérer d'une manière **passive** ou **active**.

La priorité passive consiste à générer les plans des feux de signalisation de manière à favoriser les artères supportant les TC, sans détection individuelle de ces véhicules. Le système de régulation permettant la priorité passive le plus connu est le système TRANSYT [2].

La priorité active ou dynamique, consiste en une modification

de la signalisation du carrefour pour autoriser le passage du Véhicule TC qui a été détecté. Ce type de priorité est possible sur les systèmes de régulation temps réel du trafic. Plusieurs systèmes existent, nous pouvons citer par exemple les systèmes : CRONOS [3], PRODYN [4], UTOPIA [5], SCOOT [6], SCATS [7] et TUC [8].

Une majeure partie de ces systèmes n'est cependant pas capable de gérer la priorité de plus d'un véhicule de transport en commun par cycle de feux. C'est le cas par exemple des stratégies TUC, SCOOT, SCATS, etc. en effet, ces stratégies donnent la priorité sur la base de règles. Pour faire passer le véhicule de transport en commun et suivant l'instant d'arrivée de ce véhicule, ces stratégies procède soit par prolongation de la durée du feu vert, soit par raccourcissement de la durée du feu rouge soit en appliquant une phase spéciale à l'approche du véhicule et rétablissent l'ordre des phases par la suite. Tous ces types de procédures ne peuvent être répétées plusieurs fois au court d'un même cycle. Ceci limite donc l'usage de ce type de stratégies aux carrefours qui ne sont pas très fréquentés par les véhicules de transport en commun. Les systèmes qui gèrent la priorité par des algorithmes d'optimisation comme par exemple PRODYN, CRONOS, etc peuvent tenir compte de plusieurs critères avant d'accorder la priorité. Comme par exemple d'accorder la priorité au véhicule de transport en commun qui le mérite le plus et non à celui qui la demande en premier, etc. Cependant ces systèmes étant conçu en premier pour la régulation d'un carrefour isolé, nécessitent beaucoup de temps de calcul dès qu'il s'agit d'une région possédant un nombre important de carrefour et ne peuvent donc pas gérer le trajet de toute une ligne de TC par exemple.

Dans l'objectif de trouver une stratégie de régulation qui favorise d'une manière active la progression des véhicules de transport en commun sur tout un réseau tout en veillant à améliorer les conditions globale de la circulation, nous avons développé la stratégie NeTPrior [9]. NeTPrior consiste en une commande linéaire quadratique (LQ) du trafic bi-modal. Elle permet de réguler le trafic sur la totalité d'un réseau urbain en favorisant les arcs sur lesquels les véhicules de transport en commun sont présents aux instants où ils y sont. La résolution du problème de commande optimale par la méthode LQ ne permet cependant pas de tenir compte des contraintes. Pour pallier à ce problème nous avons procédé dans NeTPrior à une projection des valeurs des commandes, qui ne respectent pas les contraintes, sur les valeurs les plus proches. Ceci en résolvant le problème d'optimisation de distance minimale pour chaque

valeur de la commande en boucle fermée obtenue à la première étape. Les contraintes sur la variable d'état ne sont pas prises en compte dans cette stratégie. D'où l'idée d'avoir une autre démarche de recherche de la commande optimale qui permet cette fois-ci de considérer les contraintes sur les variables de commande et sur les variables d'état.

Nous présentons dans cet article cette nouvelle stratégie qui consiste en une commande prédictive. Pour cette première recherche, nous nous sommes basés sur le même fondement que la stratégie NeTPrior, à savoir un modèle linéaire du trafic urbain bi-modal et un critère quadratique. Un changement de variables a été effectué afin de pouvoir tenir compte des contraintes sur les variables d'état et sur les variables de commande. Dans la suite de cet article, après une brève présentation du principe de la commande prédictive à base de modèle, nous consacrerons une section à la présentation du modèle linéaire du trafic bi-modal, puis au critère de performance. Celui-ci consiste en un critère quadratique qui est une fonction du nombre des véhicules sur les arcs, du nombre de véhicule de transport en commun présent sur chaque arc et des durées des feux verts accordées aux différentes phases du réseau. Minimiser le critère revient à obtenir la commande qui permet de réguler le trafic sur la totalité du réseau tout en favorisant les arcs supportant les véhicules TC **aux instants où ils y sont**. Nous définissons par la suite les contraintes auxquelles sont soumises les variables d'état et les variables de commande. La quatrième section est consacrée à une brève présentation de la stratégie NeTPrior, développée dans un travail antérieure. Ceci dans l'objectif de discuter de ces inconvénients et de signaler l'apport que nous attendons de la nouvelle stratégie MPC. La cinquième section est enfin consacrée au modèle de la stratégie MPC, les transpositions du critère et des contraintes dans l'objectif d'en tenir compte à chaque étape d'optimisation. La sixième section contient la méthode de résolution numérique, à savoir l'algorithme d'activation de contraintes. Enfin avant de conclure, nous donnerons les résultats des tests en simulation de la stratégie sur un réseau de trafic urbain de petite taille.

## II. COMMANDE PRÉDICTIVE À BASE DE MODÈLE(MPC)

La stratégie appelée commande prédictive à base de modèle (model predictive control : MPC) optimise à partir des entrées le comportement futur et anticipé du système considéré. La prédiction est faite à partir d'un modèle du système sur un intervalle de temps fini appelé horizon de prédiction. Le principe de la commande consiste à optimiser à chaque période d'échantillonnage le critère de performance  $J$  soumis à des contraintes fonctionnelles, et à déterminer la meilleure séquence des  $K_c$  commandes sur l'horizon de prédiction  $K$ . La première commande de la séquence optimale est alors appliquée et la résolution recommence en prenant en compte les informations disponibles réactualisées (voir figure (1)). La répétition de cette procédure à chaque période permet de balayer le temps avec un horizon fini.

Vu la variabilité des conditions de la circulation il est important que la stratégie de régulation développée puisse s'appliquer en boucle fermée. Ceci est possible suivant le schéma donné sur la figure (2)

## III. LE MODÈLE DU TRAFIC URBAIN BI-MODAL

Le réseau est représenté par des intersections  $j \in J$  et des arcs  $a \in A$ . Le modèle consiste en une équation pour les arcs

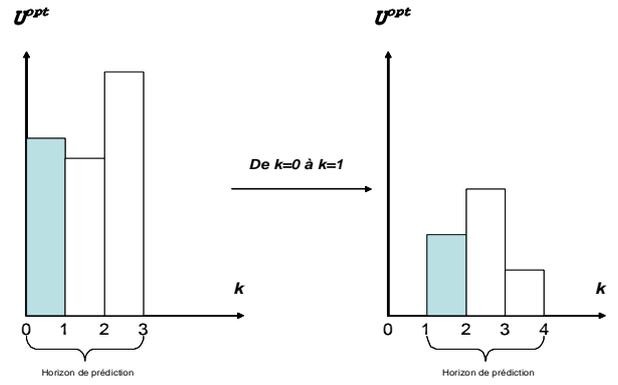


Fig. 1. Le principe de fonctionnement de MPC en horizon glissant

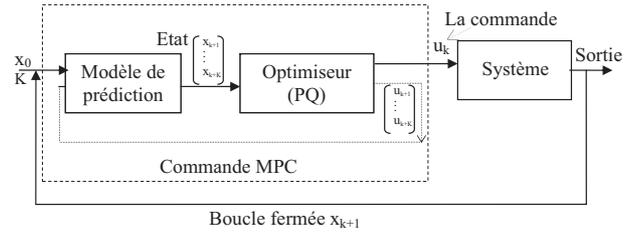


Fig. 2. Commande MPC en boucle fermée

sur les quels ne circulent pas les transports en commun et deux équations sur les itinéraires des de ces derniers.

### A. Le modèle du trafic sur l'arc

Le trafic sur chaque arc, est modélisé à l'aide de l'équation de conservation du nombre de véhicules.

$$x_a(k+1) = x_a(k) + T[q_a(k) - u_a(k)] \quad (1)$$

$x_a$  étant le nombre de tous les véhicules sur l'arc exprimé en unité de véhicules particuliers (UVP) (par exemple un bus est équivalent à 2,3 UVP, un deux-roues est équivalent à 0,3 UVP, etc.).  $q_a$  et  $u_a$  sont les débits respectivement d'entrée et de sortie de l'arc  $a$  sur la période  $[kT, (k+1)T]$  où  $k$  est un indice de pas de temps et  $T$  l'intervalle d'échantillonnage.  $d_a$  est la demande et  $s_a$  le débit de saturation de l'arc (c'est le débit maximal qui peut quitter l'arc à un instant) exprimés en UVP/seconde (voir la figure 3).

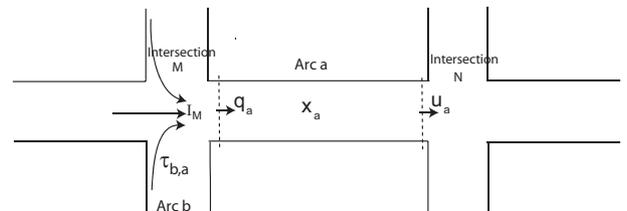


Fig. 3. Définition des variables

Le débit de sortie de l'arc  $u_a$  est modélisé suivant la méthode classique introduite par Gazis et Potts en 1963, appelé en anglais "store and forward" : stocke puis distribue, voir [8]. Cette méthode présume que tous les véhicules arrivant sur un arc, sont stockés à son extrémité de sortie et le quittent avec un débit

maximum  $s_a$  durant le feu vert :

$$u_a = \begin{cases} s_a & \text{si l'arc } a \text{ est à la phase verte} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (2)$$

Cette modélisation est possible sous certaines hypothèses ; principalement le fait que l'intervalle de temps d'échantillonnage  $T$  est au moins égal à la durée du cycle des feux  $C$ .

$$T = C$$

Compte tenu de l'équation (2), pour tout le cycle  $C$ , le débit de sortie de l'arc à l'instant  $kT$ , est donnée par :

$$u_a(k) = \frac{S_a \cdot G_a(k)}{C} \quad (3)$$

où  $G_a(k)$  est la variable de commande du système : le temps de feu vert accordée à l'arc  $a$  durant le cycle de feux  $C$  de l'intersection située à la sortie de l'arc. Si la sortie de l'arc se fait durant plusieurs phases de verts différentes,  $G_a(k)$  sera égale à la somme des durées des feux verts pour l'ensemble de ces phases :

$$G_a(k) = \sum_{i \in P_j^a} G_{j,i}(k) \quad (4)$$

où  $P_j^a$  est l'ensemble des phases du carrefour  $j$  durant lesquelles l'arc  $a$  a le feu vert.

Le débit d'entrée à l'arc  $a$  peut s'écrire comme la somme des débits sortants de toutes les branches du carrefour  $M$  et qui ont comme destination l'arc  $a$  :  $\sum_{\omega \in I_M} \tau_{\omega,a} u_{\omega}(k)$ , où  $\tau_{\omega,a}$  est le pourcentage des mouvements des véhicules partant de l'arc  $\omega \in I_M$  vers l'arc  $a$ .

En utilisant cette nouvelle formulation des débits d'entrée et de sortie dans l'équation (1), nous obtenons le modèle suivant :

$$x_a^V(k+1) = x_a^V(k) + \left[ \sum_{\omega \in I_M} \tau_{\omega,a} S_{\omega} G_{M,\omega}(k) - S_a \sum_{i \in O_N} G_{M,i}(k) \right] \quad (5)$$

où sous forme matricielle :

$$X^V(k+1) = I \cdot X^V(k) + B \cdot G(k) \quad (6)$$

$I$  étant la matrice identité et  $B$  une matrice de dimension  $N \times M$ .  $M$  est le nombre de phases du réseau  $M \ll N$ .

### B. Le modèle TC

Connaissant la succession d'arcs qui sont empruntés par chaque ligne TC, on modélise la progression des véhicules par une équation de retard :

$$x_a^{b_i}(k) = x_{a'}^{b_i}(k - \zeta_i) \quad (7)$$

où  $x_a^{b_i}$  est le nombre de véhicule de la ligne TC numéro  $b_i$  sur l'arc  $a$ .  $\zeta_i$  est un paramètre qui exprime le temps de parcours moyen que mettent les véhicules de la ligne  $b_i$  pour voyager de l'arc  $a'$  à l'arc  $a$ .  $\zeta_i$  prend normalement des valeurs réelles. Cependant, pour des raisons évidentes de commande,  $\zeta_i$  doit être un multiple de l'intervalle d'échantillonnage  $T$ . Nous considérons donc que  $\zeta_i$  est égal à un cycle si la ligne de bus n'a pas d'arrêt sur l'arc  $a$ , sinon  $\zeta_i$  est égal à deux durées de cycle.

En substituant ces valeurs  $\zeta_i$  dans l'équation (7), le modèle des TC devient le suivant :

$$x_a^{b_i}(k+1) = \begin{cases} x_{a'}^{b_i}(k-1), & \text{si la ligne TC a un arrêt} \\ x_{a'}^{b_i}(k), & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (8)$$

Cette simplification est en accord avec la modélisation de la commande des VP, puisqu'elle consiste à supposer, qu'aussi bien les VP que les TC sont "stockés" durant la période de feu rouge puis sont "distribués" durant la période de vert, ils passent donc un cycle de feu sur l'arc. Il faudra cependant, faire attention au choix de la durée du cycle.

L'écriture sous forme matricielle de l'équation (8) donne :

$$X^b(k+1) = A_0^b X^b(k) + A_1^b X^b(k-1) \quad (9)$$

ou sous forme canonique

$$X^B(k+1) = A^b \cdot X^B(k) \quad (10)$$

où  $X^B$  est le vecteur contenant les états aux instants  $k$  de tous les arcs traversés par les TC et des instants  $k-1$  des arcs possédants en plus un arrêt TC. La matrice  $A^b$  est donnée par :

$$A^b = \left( \begin{array}{c|c} A_0^b & A_1^b \\ \hline I_{(N_b, N_b)} & 0 \end{array} \right)$$

où  $I_{(N_b, N_b)}$  est la matrice identité de dimension  $[N_b, N_b]$ ,  $N_b$  étant le nombre d'arc traversés par les véhicules TC.

### C. Le modèle global

Les équations (6) et (10) donnent la dynamique du système bimodal :

$$X(k+1) = AX(k) + BG(k) \quad (11)$$

Avec le le vecteur d'état  ${}^tX = [{}^tX^V(k), {}^tX^B(k)]$ ; et  $A$  la matrice de dimension  $(N + 2N_b) \times (N + 2N_b)$  donnée par :

$$A = \left( \begin{array}{c|c} I & 0 \\ \hline 0 & A^b \end{array} \right)$$

La matrice  $B$  de dimension  $[N + 2N_b, M]$  contient en première partie la matrice  $B$  de l'équation (6) complétée par des zéros de la une matrice de dimension  $[2N_b, M]$  puisque les véhicules des transport en commun ne sont pas commandable.

### D. Critère d'optimisation

Notre objectif du point de vue régulation du trafic, est de favoriser la progression des TC dans le réseau sans dégrader les conditions globales de circulation. Cet objectif peut être atteint grâce au critère d'optimisation quadratique suivant :

$$\min_G J(G) = \sum_{k=0}^K (\alpha ({}^tX(k) X^b(k)) + \beta \|X(k)\|^2 + \gamma \|G(k)\|^2) \quad (12)$$

où  $\alpha$ ,  $\beta$  and  $\gamma$  sont des paramètres de pondération non-négatifs et les  $X$  sont données par les équations dynamiques (5) et (8).

Le premier terme du critère ( $X(k) X^b(k)$ ) met en évidence les conditions du trafic sur les arcs traversés par les TC précisément

au moment où ces véhicules TC s'y trouvent. Le second membre vise à réduire le nombre de véhicule sur chaque arc du réseau, et donc à égaliser la congestion sur tous les arcs. Le rôle de ce second terme est principalement de ne pas améliorer la circulation sur les arcs traversés par les TC au détriment de celle des autres arcs du réseau. Enfin, le dernier terme est utilisé afin d'éviter les grandes variations des variables de commande. Le critère (refcritere1) peut être écrit sous la forme matricielle classique :

$$J(G) = \sum_{k=0}^K ({}^t X(k) Q X(k) + {}^t G(k) R G(k)) \quad (13)$$

où :

$$Q = \left( \begin{array}{c|c} \beta I_{(N,N)} & \frac{\alpha}{2} I_{(N,2N_b)} \\ \hline \frac{\alpha}{2} I_{(2N_b,N)} & \beta I_{(2N_b,2N_b)} \end{array} \right) \quad R = ( \gamma I )$$

#### E. Les contraintes

La résolution du problème de commande optimale par la méthode LQ ne permet pas de tenir compte des contraintes. Cependant, compte tenu du fonctionnement d'un carrefour, pour chaque carrefour  $j$ , les durées des feux verts doivent respecter un certain nombre de contraintes :

- la durée du cycle ( $C$ )
  - le diagramme de phase : toutes les phases ( $P_j$ ) doivent avoir leur feu vert à l'intérieur du cycle
  - les temps de dégagements entre les phases  $R_j$
- ce qui implique :

$$\sum_{i \in P_j} G_{j,i} + R_j = C \quad (14)$$

D'autre part, la durée de chaque feu vert est limitée par un maximum et un minimum. En effet, une durée de feu rouge trop longue sur un courant peut être interprétée par les usagers comme un dysfonctionnement des feux du carrefour et impliquer leur non-respect :

$$G_{j,i,min} \leq G_{j,i} \leq G_{j,i,max} \quad (15)$$

De même le nombre de véhicules sur un arc ne peut dépasser la capacité de la route et ne peut prendre des valeurs négatives :

$$X_{min}^v \leq X^v \leq X_{max}^v \quad (16)$$

#### IV. NETPRIOR : STRATÉGIE DE COMMANDE LINÉAIRE QUADRATIQUE

le problème de commande optimale résolu par NeTPrior [10] consiste à minimiser le critère donné par l'équation (13) mais pour un horizon de temps infini, en respectant la dynamique donnée par le système d'équations (6). Utilisant la méthode d'optimisation LQ [11], la loi de commande appliquée est donnée par l'équation suivante :

$$G(k) = G^N - R.X(k) \quad (17)$$

où  $G^N$  est le vecteur de commande nominale et  $R$  la matrice de Riccati qui dépend des coefficients du critère :  $\alpha$ ,  $\beta$  et  $\gamma$ .

Notons que le choix d'un horizon de temps infini dans l'équation (13) nous permet d'avoir une matrice de Riccati  $R$  indépendante du temps. Ce choix se justifie par la volonté d'une commande temps réel des feux des carrefours et donc la simplification des calculs pour chaque commande. Il présente néanmoins l'inconvénient de considérer une moyenne temporelle du critère, ce qui réduit l'importance de notre principal objectif qui est de réduire le nombre de véhicule sur les arcs **aux instants** où les véhicules TC y sont sur ces arcs. C'est pour cette raison que nous ne considérons pas un horizon infini dans la stratégie MPC.

Comme nous l'avons signalé à l'introduction, la méthode LQ ne permet pas de tenir compte des contraintes. Nous avons donc résolu ce problème en procédant à une projection des valeurs des commandes qui ne respectent pas les contraintes sur les valeurs les plus proches. Ceci en résolvant le problème d'optimisation donné par l'équation (18) en respectant les contraintes des équations (14) et (15) pour chaque valeur de la commande obtenue.

$$\min_{G_{j,i}} = \sum_{i \in P_j} (G_{j,i} - \bar{G}_{j,i})^2 \quad (18)$$

Les contraintes sur la variable d'état n'ont donc pas été considérées dans NeTPrior d'où la nécessité de la nouvelle démarche qui va nous permettre de tenir compte également de ces contraintes.

#### V. LE MODÈLE MPC

Nous résolvons donc ici le problème de commande optimale du système modélisé par l'équation linéaire (11), en minimisant le critère quadratique donné par l'équation (13) sous les contraintes linéaires appliquées à la commande (14 et 15) et à la variable d'état (16). Afin de pouvoir inclure les contraintes au moment de résolution du problème d'optimisation, nous adoptons la méthode qui a été présentée dans [12].

Pour simplifier les notations, re-écrivons les contraintes sous la forme suivante :

$$\begin{cases} U_k = \{u_k : Lu_k \leq v^u\} \\ X_k = \{x_k : Dx_k \leq v^x\} \end{cases} \quad (19)$$

L'idée consiste à éliminer la variable d'état  $X$  de ce problème. Ceci peut se faire en développant en premier la dynamique :  $x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$  sur le temps  $k$  allant de 0 à  $K$ .

$$\begin{cases} x(1) = A.x(0) + Bu(0) \\ x(2) = A.x(1) + B.u(1) \\ \quad = A^2.x(0) + A.B.u(0) + B.u(1) \\ x(3) = A.x(2) + B.u(2) \\ \quad = A^3.x(0) + A^2.B.u(0) + A.B.U(1) + B.u(2) \\ \vdots \\ x(K) = A^K.x(0) + A^{K-1}.B.u(0) + A^{K-2}.B.u(1) + \dots \\ \quad \dots + A^1.B.u(K-2) + B.u(K-1) \end{cases}$$

Ce qui se traduit en notation matricielle par le système :

$$\text{le système (V)} \iff X = S.U + \mathbf{A}.x$$

où :

$${}^t U = ({}^t u_0, u_1, \dots, {}^t u_{K-1}); \quad {}^t X = ({}^t x_1, {}^t x_2, \dots, {}^t x_K)$$

$${}^t \mathbf{A} = ({}^t A, {}^t A^2, \dots, {}^t A^K)$$

et  $S$  est une matrice de dimensions :  $[K.(N + 2N_b), K.M]$

$$S = \begin{pmatrix} B & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ AB & B & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ A^{K-1}B & A^{K-2}B & \cdots & AB & B \end{pmatrix}$$

#### A. Transposition du critère

Avec les notations ci-dessus, nous allons ré-écrire le critère (Equation 13) en fonction de la variable de commande  $U$  seulement.

$$J = \underbrace{\frac{1}{2} {}^t x_0 Q x_0 + \frac{1}{2} ({}^t A x) Q (A x)}_{\text{constante}} + \frac{1}{2} {}^t U \underbrace{({}^t S Q S)}_{H_1} U + \underbrace{{}^t U ({}^t S Q A x)}_F + \frac{1}{2} ({}^t U R U) \quad (20)$$

Finalement le critère s'écrit :

$$J = \frac{1}{2} {}^t U \underbrace{({}^t S Q S + R)}_H U + \underbrace{{}^t U ({}^t S Q A x)}_F \quad (21)$$

$$\text{Avec } Q = \begin{pmatrix} Q & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & Q & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & P \end{pmatrix} \text{ et } R = \begin{pmatrix} R & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & R \end{pmatrix}$$

Il est facile de vérifier que si les matrices  $R$  et  $Q$  sont définies positives alors la matrice  $H$  le sera aussi et ne dépend donc pas de la nature des matrices constituant la dynamique.

On peut remarquer aussi que dû au fait que les véhicules de transport en commun ne sont pas commandable (matrice  $B$  nulle pour toute la partie correspondant à  $X^b$ ), la matrice  $H$  est indépendante du paramètre  $\alpha$ , seul la matrice  $F$  y dépend. Il faudra donc prendre de très grandes valeurs du paramètre  $\alpha$  ( $\alpha \gg \beta$ ) pour accorder de l'importance aux arcs supportant les TC puisque la matrice  $F$  exerce un effet moindre sur le critère que la matrice  $H$ .

#### B. Transposition des contraintes

Si nous posons :  ${}^t V^x = \underbrace{({}^t v^x, {}^t v^x, \dots, {}^t v^x)}_{K \text{ fois}}$  et  $D = D * I_{(K,K)}$

alors  $\{x_k : D x_k \leq v^x ; \forall k = 1, \dots, K\}$  peut être transformé en un ensemble ne dépendant que de  $U$  ; ce qui s'écrit en notation matricielle comme suit :

$$D X \leq V^x \Leftrightarrow D S . U \leq V^x - D A x \quad (22)$$

Nous ferons de même pour l'ensemble  $\{u_k : L u_k \leq v^u ; \forall k = 0, \dots, K - 1\}$  et nous obtenons

$$L U \leq V^u \quad (23)$$

Où  $L = L . I_{(K,K)}$  et  ${}^t V^u = \underbrace{({}^t v^u, {}^t v^u, \dots, {}^t v^u)}_{K \text{ fois}}$  Le problème

(QP) qui se dégage est :

$$(QP) \begin{cases} J = \frac{1}{2} {}^t U H U + {}^t U F \\ SC \\ D S . U \leq V^x - D A x \\ L U \leq V^u \end{cases} \quad (24)$$

Le modèle MPC décrit ci-dessus d'horizon de prédiction  $K$ , répond à nos objectifs puisque la commande sera appliquée en boucle fermée (voir Figure 2) tout en respectant les contraintes intrinsèquement à l'étape d'optimisation, que ce soient les contraintes sur la variable de commande ou sur la variable d'état. D'autre part, la structure du problème le place dans un cadre de l'optimisation quadratique linéaire pour lequel de nombreux outils de résolution numérique existent. En effet, plusieurs algorithmes de complexité polynomiale sont mis au point et peuvent être facilement implémentés pour sa résolution. Nous avons utilisé dans ce travail un algorithme d'activation de contraintes.

## VI. ALGORITHME D'ACTIVATION DE CONTRAINTES

La méthode d'activation de contraintes procède en considérant à chaque étape un certain nombre des contraintes d'inégalités comme des contraintes égalités actives, appelées "ensemble de contraintes actives", les autres contraintes sont dans un premier temps ignorées. La méthode consiste à résoudre d'une manière séquentielle un problème de programmation quadratique sous des contraintes d'égalités. A chaque étape, on réajuste l'ensemble des contraintes actives afin d'identifier les contraintes qui interviennent pour la solution optimale [13].

#### A. Présentation de l'algorithme

Écrivons le problème (QP) (équations 24) sous la forme suivante :

$$(QP) : \begin{cases} \text{Min}_u \frac{1}{2} u' H u + u' b \\ \text{sous les contraintes :} \\ A_i' u = b_i \quad \forall i \in E \\ A_i' u \leq b_i \quad \forall i \in I \end{cases} \quad (25)$$

$H$  étant définie positive,  $E$  est l'ensemble des indices des contraintes égalité et  $I$  l'ensemble des indices des contraintes inégalité. Soit  $I_k = i \in I : A_i u_k = b_i$  l'ensemble des indices des contraintes inégalité qui sont saturées au point réalisable  $u_k$ .

La méthode d'activation de contraintes trouve l'optimum de (25) par le procédé décrit ci-dessous :

A la  $k$ me itération nous supposons l'existence de la solution réalisable  $u_k$ . Définissons l'ensemble des indices des contraintes actives :

$$W_k = E \cup I_k \quad (26)$$

avec la supposition que le gradient des contraintes actives dont l'indice appartient à  $w_k$  sont linéairement indépendantes. Maintenant la méthode va résoudre le problème (QP) en omettant les contraintes non actives. le problème est donc transformé en :

$$(QPr) : \begin{cases} \text{Min}_u \frac{1}{2} u' H u + u' b \\ \text{sous :} \\ A_i' u = b_i \quad \forall i \in w_k \end{cases} \quad (27)$$

Si nous posons  $u = u_k + d$  alors

$$\frac{1}{2} u' H u + u' b = \frac{1}{2} u_k' H u_k + u_k' b + d' (c + H u_k) + \frac{1}{2} d' H d$$

avec toujours  $A_i' u_k = b_i \quad \forall i \in w_k$ . Il est facile de voir que résoudre (27) revient à résoudre le problème équivalent donnée par (28)

$$(QPre) : \begin{cases} \text{Min}_d \frac{1}{2} d' H d + d' (c + H u_k) \\ \text{sous :} \\ A_i' d = 0 \quad \forall i \in w_k \end{cases} \quad (28)$$

Soit  $d_k$  la solution optimale de (28) et  $v^*_i, \forall i \in w_k$  les coefficients optimaux de Lagrange, les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) relativement au problème (28) s'écrivent :

$$Hd_k + c + Hu_k + \sum_{i \in w_k} v^*_i A_i = 0 \quad (29)$$

$$A'_k d_k = 0 \quad \forall i \in w_k$$

A ce niveau nous pouvons distinguer deux cas :

### 1. Cas $d_k = 0$

(a) si  $v^*_i \geq 0, \forall i \in I_k$  alors  $u_k$  est une solution optimale (25), l'algorithme s'arrête ;

(b) supposons l'existence de  $p \in I_k$  tel que  $v^*_p < 0$  alors nous pouvons encore améliorer la valeur du critère de (25) en rendant la  $p^{me}$  contrainte inactive. Donc on pose  $w_{k+1} = E \cup I_{k+1}$  avec  $I_{k+1} = I_k - p$  et  $u_{k+1} = u_k$  ; puis résoudre à nouveau (28)

### 2. Cas $d_k \neq 0$

(a) si  $u_k + d_k$  est une direction admissible pour le problème (25) alors on pose :

$w_{k+1} = w_k, u_{k+1} = u_k + d_k$  ; puis résoudre (28)

(b) si  $u_k + d_k$  n'est pas admissible pour (25) alors une recherche linéaire sera effectuée dans la direction de  $d_k$ . Notons que  $u_k + d_k$  est admissible pour toutes les contraintes actives puisque  $A'_i d_k = 0 \quad \forall i \in w_k$ , par conséquent l'inadmissibilité se trouve parmi les contraintes inactives. Afin de Maintenir l'admissibilité, nous devons choisir un pas  $\alpha_k \in [0, 1[$  tel que

$$A'_i(u_k + \alpha_k d_k) \leq b_i \quad \forall i \notin I_k \text{ avec } A'_i d_k > 0$$

ce qui nous ramène à choisir  $\alpha_k = \text{Min}_{i \notin I_k: A'_i d_k > 0} \frac{b_i - A'_i u_k}{A'_i d_k} = \frac{b_p - A'_p u_k}{A'_p d_k}$  alors  $I_{k+1} = I_k \cup \{p\}$ ,  $w_{k+1} = E \cup I_{k+1}$  et  $u_{k+1} = u_k + \alpha_k d_k$ , ce qui rend la contrainte p active ; enfin résoudre le (28)

## VII. TESTS EN SIMULATION

Dans l'objectif de tester la stratégie MPC, nous avons effectué des tests en simulation sur un petit réseau.

### A. Description du réseau utilisé

Le réseau (Figure 4) possède deux entrées (E1) et (E2), et deux sorties (S1) et (S2). Il possède sept intersections  $J = \{1, 2, \dots, 7\}$  et quatorze arcs  $A = \{1, 2, \dots, 14\}$ . Les arcs liés directement à une sortie ne sont pas considérés dans la simulation. Le réseau comprend une ligne de transport en commun qui passe par les arcs (1), (4) et (6) (voir les arcs couleurs verts sur le réseau de la figure 4). Les véhicules de transport en commun ont un arrêt commercial sur l'arc N2.

Le cycle de feux est considéré  $C = 60$  secondes. Le débit sur chacune des deux entrées du réseau (E1) et (E2) est égal à 15 véhicules par cycle de feux. Ce qui, compte tenu du fait que le débit maximum pour quitter un arc est  $S = 0,4 \text{vh/sec}$ , représente un trafic très chargé. Nous considérons de même un trafic initial dense sur tous les arcs du réseau : le nombre de véhicules initial est  $x_0 = 10$  véhicules sur chaque arc. Les véhicules de transport en commun arrivent avec une fréquence d'un bus tous les deux

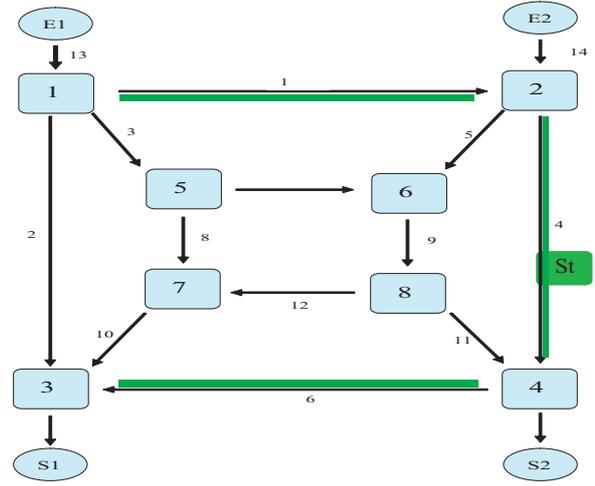


Fig. 4. Le réseau de simulation

C1	Phase 1	E1 → C2 : 80%	Phase 2	E1 → C5 : 10%
C2	Phase 1	E2 → C4 : 80%	Phase 2	E1 → C3 : 10%
C3	Phase 1	C1 → C4 : 50%	Phase 2	E2 → C6 : 20%
C4	Phase 1	C4 → S1 : 100%	Phase 2	C1 → C6 : 50%
C5	Phase 1	C2 → C3 : 50%	Phase 2	C1 → S1 : 100%
C6	Phase 1	C8 → C3 : 50%	Phase 2	C7 → S1 : 100%
C7	Phase 1	C1 → C6 : 50%	Phase 2	C8 → S2 : 50%
C8	Phase 1	C2 → C8 : 100%	Phase 2	C2 → S8 : 50%
C9	Phase 1	C5 → C3 : 100%	Phase 2	C1 → C7 : 50%
C10	Phase 1	C6 → C4 : 50%	Phase 2	C5 → C8 : 100%
C11	Phase 1	C8 → C3 : 100%	Phase 2	C8 → C3 : 100%
C12	Phase 1	C6 → C7 : 50%	Phase 2	C6 → C7 : 50%

TABLE I

LE PHASAGE ET LES POURCENTAGES DES MOUVEMENTS TOURNANTS DU RÉSEAU

cycles de feux. Les arcs traversés par les bus sont considérés des axes principaux du réseau. La majeure partie du trafic est donc orienté sur ces arcs ; par exemple 80% du trafic entrant en E1 se dirige à l'arc N1 qui est traversé par un bus. 50% de ce trafic plus 80% de celui entrant par l'entrée E2 se trouve sur l'arc N4 et 100% du trafic de l'arc N4 traversera l'arc N6 avant de sortir par S1 (voir tableau I).

### B. Analyse des résultats

Nous nous sommes intéressés en premier à l'influence de l'horizon de prédiction  $K$  sur la qualité de la commande optimale obtenue. Les résultats ont montré qu'un seul pas  $K = 1$  était suffisant. En effet, nous trouvons les mêmes résultats quelque soit l'horizon de prédiction. Ceci s'explique par le fait que le modèle est évolutif, il ne tend pas vers une valeur finale connue qui améliore la prédiction.

Nous nous sommes intéressés par la suite à l'influence de la variable  $\alpha$  du critère (équation 12) sur l'état du trafic. L'objectif étant de fluidifier le trafic sur les arcs sur lesquels circulent les véhicules de transports en commun au moment de leur présence. Les figures 5, 6 et 7 donnent l'état du trafic sur les arcs respectivement 1, 4 et 6 sur lesquelles circulent des véhicules de transport en commun. La première partie de la figure donne l'état du trafic optimisé sans faveur pour les transports en commun ( $\alpha = 0$ ). Dans la deuxième partie, les courbes en bleu donnent l'état du trafic sur l'arc dans le cas où les transports en commun sont favorisés ( $\alpha = 10^4$ ) et les courbes de couleur vert

donnent les instants de présence des véhicules de transport en commun sur l'arc.

Comme nous pouvons le voir sur les secondes courbes : quand la valeur de  $\alpha$  est très grande, la stratégie parvient à annuler la file d'attente au moment de la présence du véhicule des transports en commun. Nous pouvons remarquer que pour l'arc 4 sur lequel existe un arrêt commercial et donc, dans notre cas, un véhicule TC est toujours présent, la file d'attente reste nulle tout au long de la simulation. Alors qu'elle augmente beaucoup dans le cas où  $\alpha = 0$ . Ceci a évidemment l'inconvénient d'augmenter la file d'attente sur les autres arcs (voir tableau N°1)

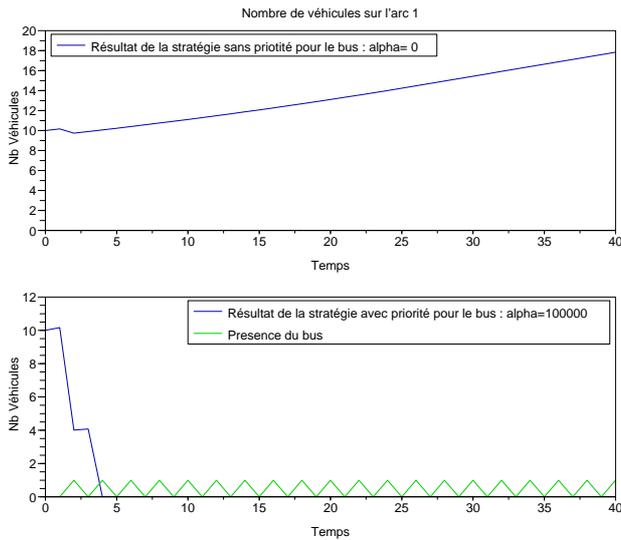


Fig. 5. Etat du trafic sur l'arc 2

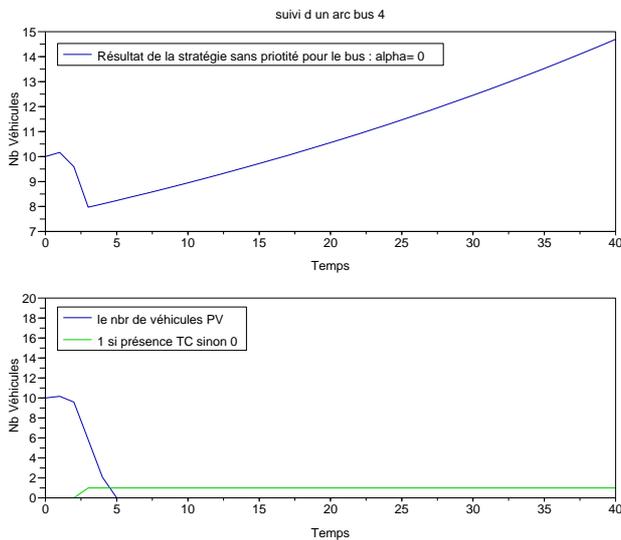


Fig. 6. Etat du trafic sur l'arc 2

En effet, sur le tableau (II), nous pouvons remarquer que la congestion globale est plus importante quand le paramètre  $\alpha$  est important. Une analyse plus fine des résultats montre que l'amélioration des arcs supportant les transports en commun se fait en retenant le trafic sur les entrées du réseau et non sur sa totalité. C'est le prix à payer pour améliorer la trajectoire des transports en commun.

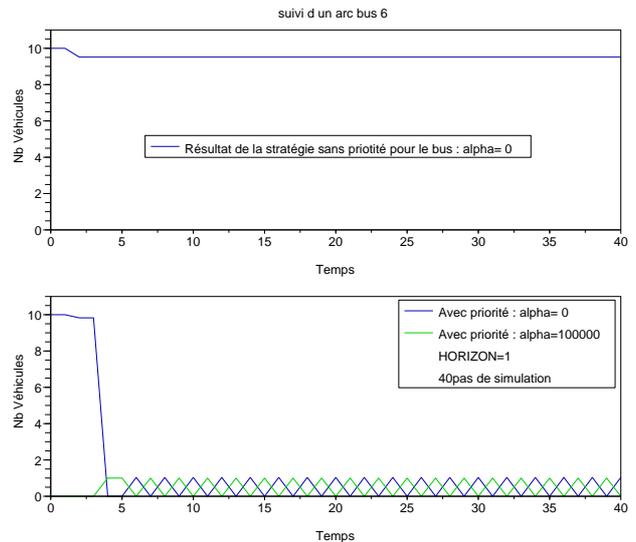


Fig. 7. Etat du trafic sur l'arc 2

Type de l'arc	Sans priorité ( $\alpha = 0$ )	Avec priorité ( $\alpha = 10^4$ )	Gain
Arc 1 TC	536	18	97%
Arc 4 TC + arrêt	437	27	94%
Arc 6 TC	214	28	87%
Arc 13 entrée	579	1977	-241%
Arc 14 entrée	891	2783	-212%
Réseau total	3830	6006	-56%
Réseau sans les entrée	2360	1246	0,47%

TABLE II  
ÉTAT DE LA CONGESTION SUR LE RÉSEAU

## VIII. CONCLUSION

Nous avons présenté dans cet article une stratégie de régulation du trafic bi-modal de la voiture particulière et des transports en commun de surface. Cette stratégie consiste en une commande en boucle fermée en horizon glissant. Elle se base sur un modèle linéaire du trafic et un critère quadratique. L'originalité de la commande réside dans le fait de considérer les contraintes intrinsèquement au problème d'optimisation. La solution numérique a été obtenue grâce à un algorithme d'activation de contraintes. Du point de vue circulation du trafic routier bi-modal cette stratégie présente l'avantage de réguler le trafic sur tout un réseau en favorisant les arcs sur lesquels les véhicules de transport en commun sont présents aux instants où ils y sont. Les résultats de simulation montrent que la stratégie apporte une bonne amélioration aux arcs sur lesquels circulent les transports en commun en retenant le trafic sur les entrées du réseau. Des travaux futures devraient inclure un modèle de trafic non-linéaires pour mieux tenir compte de la progression des véhicules de transport en commun dans le réseau.

## RÉFÉRENCES

- [1] CERTU Collection. *La priorité aux feux pour les véhicules de Transport en Commun*. Aménagement et Exploitation de la voirie, 2001.
- [2] R.A. Vincent, A.I. Mitchell, et D.I. Robertson. User guide to transyt version 8. TRRL Laboratory Report 888, TRRL, 1980.
- [3] F. Boillot, S. Midenet, et J.C. Pierrelée. Real-life cronos evaluation. *Tenth International Conference on Road Traffic Information and Control*, number 472, pages 182-186. IEE London, April 2000.

- [4] J.J. Henry et J.L. Farges. Pt. priority and prodyn. *Proceeding of the first World Congress On Applications of Transport Telematics and Intelligent Vehicle Highway Systems*, pages 3086–3093, Paris-France, 1994.
- [5] V. Mauro et C. Di Tranto. Utopia. *Proceedings in the 6th IFAC/IFIP/IFORS symposium on control, computers, communications on Transportation*, pages 245–252, Paris-France, 1989.
- [6] P.B. Hunt, D.L. Roberston, R.D. Bretherton, et M.C.Royle. The scoot on-line traffic signal optimization technique. *Traffic Engineering & Control*, 23 :190–199, 1982.
- [7] W. Chen, G. Jarjees, et C.R. Drane. A new approach for bus priority at signalised intesections. *ARRB Transport Research LTD Conference, 19th*, Sydney-Australia, 1998.
- [8] C. Diakaki, M. Papageorgiou, et K. Aboudolas. A multivariable regulator approach to traffic-responsive network-wide signal control. *Control Engieneering Practice*, 10 :183–195, 2002.
- [9] N. Bhouiri et P. Lotito. An intermodal traffic control strategy for private vehicle and public transport. *10th Euro Working Group on Transportation*, pages 423–428, Poznan-Poland, September 2005.
- [10] N. Bhouiri et P. Lotito. Régulation du trafic urbain multimodal avec priorité pour les transports en commun. *Conférence Francophone de MOdélisation et SIMulation - MOSIM 06*, Rabat - Maroc, 3-5 avril 2006.
- [11] J-C. Culioli. *Introduction à l'optimisation*. Ellipses, 1994.
- [12] G.C. Goodwin, M.M. Seron, et J.A. De Dona. *Constrained Control and Estimation, an optimisation Approach*. 2005.
- [13] J.F. Bonnans, J. C. Gilbert, C. Lemaréchal, et C.A. Sagastizabal. *Numerical Optimization, theoretical and practical aspects*, volume 2nd Edition. 2006.