



**HAL**  
open science

# Une stratégie multi-échelle non-linéaire pour le calcul de grandes structures

Philippe Cresta, Olivier Allix, Christian Rey, Stéphane Guinard

## ► To cite this version:

Philippe Cresta, Olivier Allix, Christian Rey, Stéphane Guinard. Une stratégie multi-échelle non-linéaire pour le calcul de grandes structures : Application au post-flambage de structures de plaques et coques. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495828

**HAL Id: hal-01495828**

**<https://hal.science/hal-01495828>**

Submitted on 26 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Une stratégie multi-échelle non-linéaire pour le calcul de grandes structures

## Application au post-flambage de structures de plaques et coques

**Philippe Cresta\*** — **Olivier Allix\*\*** — **Christian Rey\*\*** — **Stéphane Guinard\***

\* *EADS Innovation Works, Equipe « Méthodes d'Analyses Structurales »*  
18 rue Marius Terce, F-31300 Toulouse

philippe.cresta@eads.net

\*\* *Laboratoire de Mécanique et Technologie, ENS de Cachan / CNRS / Université Pierre et Marie Curie*  
61 avenue du Président Wilson, F-94235 Cachan cedex  
{allix, rey}@lmt.ens-cachan.fr

---

*RÉSUMÉ. Nous présentons les possibilités offertes par de nouvelles stratégies multi-échelles avec décomposition de domaine pour l'analyse non-linéaire de structures, et en particulier pour le calcul au post-flambage de grandes structures aéronautiques. Ces approches s'appuient sur une gestion multi-niveau des non-linéarités ainsi qu'une séparation micro-macro des champs aux interfaces.*

*ABSTRACT. We present the possibilities offered by some multiscale strategies with domain decomposition for nonlinear analysis of structures, and more precisely for post-buckling simulation of large aeronautical structures. These approaches rely on a multilevel nonlinear solver as well as a micro-macro separation of interface fields.*

*MOTS-CLÉS: Méthode de Décomposition de Domaine, Post-Flambage, Analyse Multiéchelle.*

*KEYWORDS: Domain Decomposition Methods, Post-buckling, Multiscale Analysis.*

---

## 1. Introduction

Le calcul non-linéaire de grandes structures élancées (plusieurs dizaines de mètres, plusieurs dizaines de millions de degrés de liberté) requiert des capacités de calcul importantes ainsi que des stratégies adaptées à la fois au problème mécanique à résoudre et à l'architecture des calculateurs modernes. Nous proposons ici quelques pistes intéressantes pour l'amélioration des performances des stratégies actuelles.

## 2. Stratégie de relocalisation non-linéaire pour les structures de plaques et coques

La stratégie de relocalisation non-linéaire initialement introduite dans (Cresta *et al.*, 2007) pour les treillis de poutres a été mise en oeuvre au sein d'une plateforme numérique pour les structures de plaques et coques. Cette stratégie est basée sur les méthodes classiques de décomposition de domaine, comme BDD ou FETI, qui ont été largement étudiées dans le passé pour la résolution de grands systèmes linéaires (Le Tallec *et al.*, 1998; Gosselet *et al.*, 2007). Ces dernières ont été utilisées au sein de schémas de Newton-Raphson pour la résolution non-linéaire (Farhat *et al.*, 2000), sous le nom de méthodes Newton-Krylov-Schur (NKS), mais ont montré des performances décevantes dans le cas de non-linéarités localisées ou ayant une importante variation spatiale (Cai *et al.*, 2002), comme c'est le cas pour les phénomènes de flambage locaux de structures aéronautiques.

Dans les approches NKS classiques, pour chaque itération de l'algorithme de Newton, le problème linéarisé est résolu en trois étapes :

(a)-pour chaque sous-structure ( $s$ ), condensation sur les degrés de liberté d'interface, repérés par l'indice  $b$ , de l'opérateur tangent  $K_T$  et du résidu  $r$ :

$$\begin{aligned} S_T^{(s)} &= K_{Tbb}^{(s)} - K_{Tbi}^{(s)} K_{Tii}^{(s)-1} K_{Tib}^{(s)} \\ b^{(s)} &= r_b^{(s)} - K_{Tbi}^{(s)} K_{Tii}^{(s)-1} r_i^{(s)} \end{aligned} \quad [1]$$

(b)-Résolution par une méthode itérative du problème tangent condensé :

$$S_T \Delta u_b = b \quad [2]$$

(c)-Relocalisation des déplacements internes  $u_i$  pour chaque sous-structure :

$$\Delta u_i^{(s)} = K_{Tii}^{(s)-1} (r_i^{(s)} - K_{Tib}^{(s)} \Delta u_b^{(s)}) \quad [3]$$

La stratégie mise en oeuvre propose, en suivant des idées introduites dans (Ladevèze *et al.*, 1999), de remplacer l'équation [3], qui est linéaire, par un calcul

non-linéaire au moyen d'une procédure de Newton locale par sous-structure. Cette approche permet un découplage des phénomènes locaux et un pilotage de la résolution non-linéaire à l'échelle la plus pertinente, celle de la sous-structure. Par ce moyen, nous concentrons les efforts numériques sur les zones de la structure les nécessitant le plus, sans pénaliser les autres, tout en réduisant les échanges de données entre domaines et le nombre de calculs globaux.

Deux approches ont été implémentées et comparées :

- une première version où les calculs non-linéaires locaux sont réalisés en prenant des conditions aux limites de type Dirichlet, en imposant les déplacements aux interfaces obtenus après résolution du problème condensé,
- une seconde version avec des conditions aux limites mixtes, de type Robin, utilisant à la fois les efforts et déplacements obtenus par la résolution du problème condensé, ainsi qu'une direction de recherche  $k$ , analogue à une raideur d'interface et dont nous avons proposé plusieurs techniques de détermination.



**Figure 1.** Caisson raidi en flexion (configuration initiale et déformée)

	Nombre d'incrément de chargement minimum	Nombre d'itérations globales	Nombre d'itérations locales
Méthode NKS	4	18	144
Stratégie de relocalisation NL avec CL de type Dirichlet	2	10	155
Stratégie de relocalisation NL avec CL de type Robin	1	5	154

**Tableau 1.** Comparaison des performances des différentes méthodes pour le caisson raidi en flexion (déplacement imposé de l'extrémité).

Les résultats obtenus par les différentes approches pour une structure de caisson avec raidisseurs internes, décomposée en 8 sous-domaines et soumise à un chargement de flexion (Figure 1) sont rassemblés dans le Tableau 1. On observe en particulier une réduction importante du nombre d'itérations globales par rapport aux approches classiques NKS, ainsi qu'une meilleure robustesse vis-à-vis des incréments de chargement globaux, généralisant les résultats précédemment obtenus en 2D pour les treillis de poutres.

### 3. Solveur multi-échelle pour le problème condensé aux interfaces

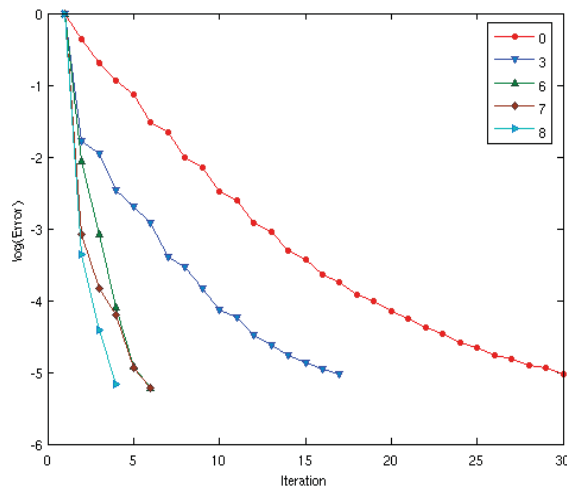
Dans les approches classiques de décomposition de domaine, la résolution du problème condensé aux interfaces [2] est réalisée au moyen d'un solveur de type Krylov, c'est-à-dire le plus souvent une méthode de gradient conjugué projeté et préconditionné. Le problème global choisi pour assurer l'extensibilité de la méthode est posé en termes de mouvements de corps rigides des sous-structures.

Nous proposons ici, pour la résolution du problème aux interfaces, une adaptation de l'approche micro-macro introduite dans (Ladevèze *et al.*, 2003) aux structures de plaques et coques. Cette stratégie se caractérise par une séparation d'échelle des champs d'interface en effort et déplacement, et la définition d'un nouveau problème global obtenu par *homogénéisation numérique* des opérateurs des sous-structures. Le choix de la séparation micro/macro est primordial, et s'appuie sur le principe de Saint Venant. Le but est de séparer les composantes des champs d'effort et de déplacement ayant une influence sur la solution globale et les composantes ayant une influence localisée uniquement au voisinage de l'interface. Cette séparation est réalisée de telle sorte que les composantes micro et macro soient orthogonales entre elles au sens de l'énergie.

La résolution du problème condensé [2] est alors réalisée au moyen d'un processus itératif en deux étapes :

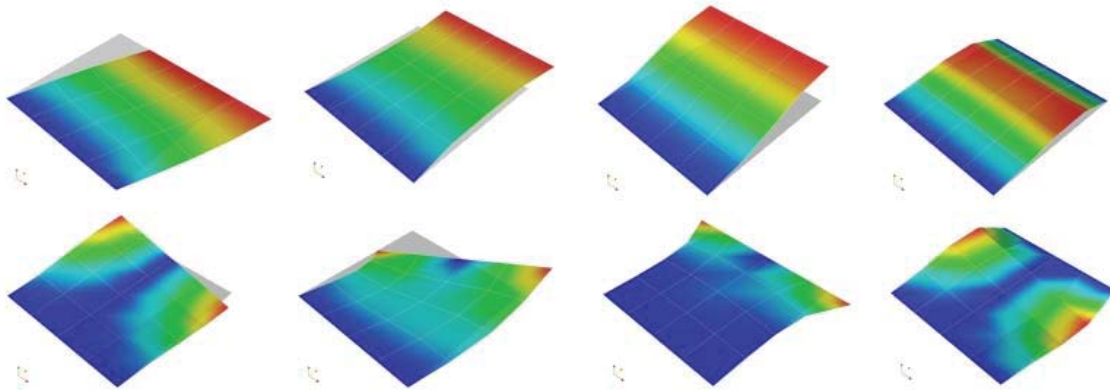
- Au cours de la première étape, on cherche des champs d'interface admissibles, vérifiant la continuité des déplacements et l'équilibre des efforts. La partie macro de ces champs est déterminée en résolvant un problème global obtenu par assemblage des opérateurs homogénéisés tangents des sous-structures. La partie micro est déterminée au moyen des calculs locaux par interface, tous indépendants entre eux. On obtient finalement les champs complets en combinant les solutions micro et macro.

- Durant la deuxième étape, on réalise des calculs locaux par sous-structure afin de vérifier le comportement tangent et l'équilibre des sous-structures, en utilisant des conditions aux limites mixtes et les champs en effort et déplacement déterminés précédemment.



**Figure 2.** Evolution de l'erreur relative en fonction des itérations, pour différents choix du nombre de vecteurs de base macro par interface. 0 : pas de problème macro; 3 : déplacements de corps rigides; 6 : déplacements et rotations de corps rigides; 7 : 6 + extension d'interface; 8 : 7 + vrillage d'interface.

A convergence, la solution obtenue vérifie à la fois le comportement des sous-structures et l'admissibilité des champs d'interface. Le seul problème global résolu porte sur les quantités macros par interfaces, dont le nombre reste réduit. Les autres problèmes sont locaux, soit par interface, soit par sous-structures. La figure 2 illustre l'évolution de l'erreur relative sur les quantités d'interface pour plusieurs choix de bases macro, pour une plaque décomposée en 5 sous-structures et sollicitée selon un chargement complexe activant tous les modes de déformation.



**Figure 3.** Déformées d'une sous-structure de plaque pour les différents modes macros d'un de ses côtés (interface rectiligne). De gauche à droite et de haut en bas : translations suivant  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , rotations suivant  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , extension suivant  $x$ , vrillage suivant  $x$ .

En pratique, on observe qu'il est nécessaire de choisir comme vecteurs de base de l'espace macro au minimum les trois translations et les trois rotations rigidifiantes de chaque interface. Un choix d'espace macro plus grand peut cependant améliorer les résultats de convergence. Des modes d'extension ou de vrillage d'interface se sont ainsi avérés intéressants pour les structures de plaques et coques. Avec ces choix, la méthode converge très rapidement, en quelques itérations. Pour les

éléments de plaques couramment utilisés, de type Kirchhoff ou Mindlin, une expression de ces modes macro sur les degrés de liberté nodaux en déplacement et en rotation a été explicitée. Les principaux modes macro pour une interface rectiligne sont illustrés sur la figure 3. Il est à noter qu'une attention toute particulière doit être portée, pour ce type d'éléments, à la prise en compte du degré de rotation normal aux éléments, qui n'a pas de sens mécanique et peut venir perturber le problème global s'il est traité sans distinction.

#### 4. Conclusion

Les stratégies présentées ici ont démontré les possibilités d'amélioration des méthodes actuelles pour la résolution des problèmes non-linéaires de grande taille. Elles ont été présentées ici dans le cadre du post-flambage de structures élancées, mais peuvent être mises en oeuvre pour une large classe de problèmes non-linéaires, ou bien dans le cadre de couplage de modèles ou de solveurs.

#### 5. Bibliographie

- X.-C. Cai, D. E. Keyes. « Nonlinearly preconditioned inexact Newton algorithms », *SIAM J. Sci. Comput.*, vol. 24, 2002, p. 183-200.
- P. Cresta, O. Allix, Ch. Rey, S. Guinard, « Nonlinear localization strategies for domain decomposition methods: application to post-buckling analyses ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n° 8, 2007, p. 1436-1446.
- C. Farhat, K. Pierson, M. Lesoinne, « The second generation FETI methods and their application to the parallel solution of large-scale linear and geometrically non-linear structural analysis problems », *Comput. Meth. In Appl. Mech. and Engrg.*, vol. 18, 2000, p. 333-374.
- P. Gosselet, Ch. Rey, « Non-overlapping Domain Decomposition Methods in Structural Mechanics », to appear in *Archives of Computational Methods in Engineering*.
- P. Ladevèze, *Nonlinear Computational Structural Mechanics - New Approaches and Non-Incremental Methods of Calculation*, Berlin, Springer Verlag, 1999.
- P. Ladevèze and A. Nouy. « On a multiscale computational strategy with time and space homogenization for structural mechanics ». *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, 2003, p. 3061-3087.
- P. Le Tallec, J. Mandel, M. Vidrascu, « A Neumann-Neumann Domain Decomposition Algorithm for Solving Plate and Shell Problems », *J. Numer. Anal.*, vol. 35, n° 2, 1998, p. 836-867.