



HAL
open science

Dans la frontière du simulable et au-delà: quand la dimension des modèles devient inimaginable

Francisco Chinesta, Amine Ammar

► To cite this version:

Francisco Chinesta, Amine Ammar. Dans la frontière du simulable et au-delà: quand la dimension des modèles devient inimaginable. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495822

HAL Id: hal-01495822

<https://hal.science/hal-01495822>

Submitted on 26 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Dans la frontière du simulable et au-delà : Quand la dimension des modèles devient inimaginable

Francisco Chinesta¹ et Amine Ammar²

¹ LMSP UMR 8106 CNRS-ENSAM-ESEM
151 Boulevard de l'Hôpital, F-75013 Paris, France
francisco.chinesta@paris.ensam.fr

² Laboratoire de Rhéologie, UMR 5520 CNRS – INPG – UJF
1301 rue de la piscine, BP 53 Domaine universitaire
38041 Grenoble Cedex 9, France
Amine.Ammar@ujf-grenoble.fr

RÉSUMÉ. Dans les dernières années nous avons pu assister à une progression sans précédent des performances de la simulation numérique suite à la croissance de la puissance informatique et au développement des méthodes numériques. De nouvelles échelles ont pu être analysées, permettant une modélisation fine et précise de la matière. Dans ce travail nous allons considérer certains modèles définis dans des espaces multidimensionnels dont le traitement numérique était, encore jusqu'à aujourd'hui, considéré comme inimaginable.

ABSTRACT. In the last years, we have assisted to an impressive progression in the numerical modeling capabilities because of the progression in computer science but also in the numerical analysis. Thus, new scales have been explored, allowing modeling of richer and finer physical models. In this work we focus on some models which result defined in multi-dimensional spaces, which have been until now assumed intractable.

MOTS-CLÉS : Simulation numérique, Modèles Multidimensionnels, Réduction de modèles, Séparation de variables.

KEYWORDS: Numerical modeling, Multi-dimensional models, Model reduction, Separated representations.

1. Introduction

La taille des modèles issus de la physique, chimie et ingénierie a eu une croissance parallèle au progrès de la puissance informatique. Ainsi, nous avons été témoins d'une évolution qui nous a amené de quelques milliers de degrés de liberté caractéristiques des simulations il y a quelques décades, à quelques milliards aujourd'hui. Mais comme les rêves des scientifiques croissent à un rythme encore

supérieur aux capacités informatiques, un effort supplémentaire devra être fait du côté de l'analyse numérique pour accélérer les calculs lourds ainsi que pour résoudre d'autres problèmes nécessitant, dans le cadre des techniques habituelles, une puissance inimaginable. Nous reviendrons sur ce point dans la suite.

Pour résoudre de plus en plus vite les modèles comportant des millions de degrés de liberté différentes possibilités ont été proposées. Voici quelques unes, sans avoir l'intention d'être exhaustives : la décomposition du domaine dans le cadre des approches parallèles¹ (Ladevèze et al., 2006 ; Vereecke et al., 2003 ; Gosselet et Rey, 2007) ; les techniques de préconditionnement (Gosselet et Rey, 2002), les méthodes multi-grille (Briggs, 1987) ou encore les stratégies de directions alternées (Ciarlet et Lions, 1990); les méthodes asymptotiques numériques (Abichou et al., 2002) et à grands incréments de temps (Ladevèze, 1996) ; les méthodes adaptatives en cherchant l'adéquation entre maillage et la solution à représenter grâce à l'utilisation des estimateurs d'erreur, tant a priori qu'a posteriori (Ladevèze, 2001) ; les techniques d'ordre élevé, habituellement associées à des maillages structurés de type volumes finis (Corre et al., 2005) ou les techniques spectrales (Boyd, 1989) ; les méthodes visant une réduction de l'effort du côté maillage (techniques ALE, les méthodes sans maillage (voir les différents chapitres de l'ouvrage éditée par P. Breitkopf en 2006), « *sparse grids* » (Bungartz et Griebel, 2004) ou encore celles basées sur la partition de l'unité (voir encore Breitkopf, 2007)) ; les stratégies alternatives aux stratégies habituelles pour la résolution des équations aux dérivées partielles (EDP) comme les techniques stochastiques (Ottinger, 1996) ou encore le « Lattice-Boltzmann » ; ...

Une autre approche avec le même objectif est celle de la réduction « a posteriori » des modèles basés sur l'application de la décomposition de Karhunen-Loève. Elle consiste à résoudre un modèle dans tout l'intervalle de temps ou dans une petite partie de celui-ci pour extraire les fonctions caractéristiques présentes dans la solution. Cette extraction se fait à partir de la résolution d'un problème aux valeurs propres, en considérant que la solution dans tout l'intervalle de temps peut être décrite à partir d'une combinaison linéaire de fonctions propres associées aux valeurs propres les plus significatifs. Pour de nombreux modèles de la physique comportant une certaine régularité de l'évolution temporelle de la solution, on trouve qu'une dizaine de fonctions suffisent pour la décrire avec précision. Maintenant, ces fonctions, qu'on appelle base réduite, sont des bonnes candidates pour représenter la solution d'un problème « similaire » à celui qui a servi pour extraire la base réduite ou permet encore d'aller plus loin dans le temps avec une base réduite calculée sur un intervalle de temps plus court. Il existe de nombreux exemples d'application de cette technique dont nous citerons quelques unes (Park et Cho, 1996 ; Allery et al., 2004).

1. Le mot domaine doit s'entendre dans un sens général qui comprend tant l'espace que le temps.

La technique précédente, en dépit de sa simplicité admet deux points faibles : (i) comment quantifier la qualité de la solution associée à un modèle qui est en train d'être décrit avec une base réduite issue d'un autre modèle ? et (ii) si nous franchissons cette première difficulté, comment procéder afin d'enrichir la base réduite pour améliorer la précision de l'approximation ? Une réponse à ces deux questions a été donnée par Rykelynck (2005) qui propose de quantifier la qualité à partir du résidu et enrichir la base avec quelques sous-espaces de Krylov associés au résidu. Cette technique a été appliquée à la résolution de différents modèles de grande taille à l'issue de la description dans le cadre de la théorie cinétique des fluides nanostructurés, permettant une réduction de l'ordre d'un million du nombre de degrés de liberté et en ayant un gain sur les temps de calcul dont le facteur atteint les milliers (Ammar et al., 2006 ; Rykelynck et al. 2006).

2. Nouveaux défis : une promenade dans le monde multidimensionnel

Bien que les techniques citées dans la section précédente aient donné leurs fruits, elles ont été incapables de permettre la résolution des modèles multidimensionnels que l'on retrouve dans la science, la finance, l'analyse de risques, ... Nous verrons par la suite, que certains modèles sont définis dans des espaces à grand nombre de dimensions, que nous notons par D . Nous allons également imaginer que le modèle multidimensionnel est défini dans un hyper-cube $\Omega =]-L, L[^D$. Maintenant si l'on définit une grille imaginaire où N nœuds sont distribués dans chaque direction, le nombre de nœuds dans l'hyper-cube résulte N^D . Supposons pour un moment que $D = 80$ (qui est bien inférieur au nombre de dimensions souhaitables) et un maillage bien grossier tel que $N = 10$. Le nombre de nœuds serait dans ce cas de 10^{80} , chiffre qui correspond au nombre estimé de particules élémentaires de notre univers !, prouvant pourtant que les besoins et les attentes ne peuvent pas être mises intégralement du côté de la puissance informatique, mais plutôt du côté de la modélisation physique et de l'analyse numérique.

2.1. De l'échelle quantique à la dynamique moléculaire

En dessous de l'échelle nanométrique les effets quantiques gouvernent l'état de la matière et donc la description plus fine des matériaux. A cette échelle nous avons à faire dans un monde constitué de particules élémentaires qui, dans le contexte de la mécanique quantique, doivent être aussi considérées comme des ondes (dualité onde-corpuscule). L'équation fondamentale à cette échelle est celle de Schrödinger

qui, pour un système constitué de N_e électrons et N_n noyaux atomiques², s'écrit (Weiner, 2002) :

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m_e} \sum_{e=1}^{e=N_e} \nabla_e^2 \Psi + V_{ee} + V_{en} \quad [1]$$

où $\Psi = \Psi(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_{N_e}, t; \mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots, \mathbf{X}_{N_n})$ est la distribution complexe conjointe des N_e électrons, dont chacun est défini dans l'espace³ $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^3, i = \sqrt{-1}$ et \hbar représente la constante de Planck divisée par 2π . L'opérateur différentiel ∇_i^2 est défini dans l'espace de configuration de chaque électron, c'est-à-dire : $\nabla_i^2 = \partial^2/\partial x_i^2 + \partial^2/\partial y_i^2 + \partial^2/\partial z_i^2$. Les potentiels électron-électron V_{ee} et électron-noyaux V_{en} résultent :

$$V_{ee} = \sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=i+1}^{N_e} \frac{e^2}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|} \quad [2]$$

$$V_{en} = -\sum_{i=1}^{N_e} \sum_{j=1}^{N_n} \frac{e \times q}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_j|} \quad [3]$$

Le caractère hautement multi-dimensionnel de l'équation de Fokker-Planck justifie l'absence de solutions tant analytiques que numériques dans des configurations représentatives. Si l'on suppose que cette équation peut être résolue (chose que nous verrons dans la suite), la distribution de l'électron e peut être calculée pour n'importe quelle distribution des électrons restants, à partir de⁴ :

$$\rho_e(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^{3(N_e-1)}} \Psi \Psi^* d\mathbf{x}_1 \cdots d\mathbf{x}_{e-1} d\mathbf{x}_{e+1} \cdots d\mathbf{x}_{N_e} \quad [4]$$

qui nous permet calculer la densité électronique en tout point de l'espace à partir de la contribution de tous les électrons :

$$\rho(\mathbf{x}) = \sum_{e=1}^{e=N_e} \rho_e(\mathbf{x}) \quad [5]$$

-
2. La masse des noyaux étant très supérieure à celle des électrons, ils peuvent être considérés localisés dans les positions \mathbf{X}_j .
 3. Le caractère ondulatoire des électrons oblige à les considérer distribués dans \mathbb{R}^3 .
 4. La probabilité se calcule avec la norme au carré de la distribution complexe.

Maintenant, le théorème de Hellmann-Feynman (voir Weiner, 2002) permet d'interpréter les effets des électrons sur les noyaux atomiques en termes de l'électrostatique classique. Ainsi, la force appliquée sur le noyau k résulte :

$$\mathbf{f}_k = -\nabla_k (V_{nn} + V_{ed}) \quad [6]$$

où V_{nn} est la contribution électrostatique noyau-noyau :

$$V_{nn} = \sum_{i=1}^{N_n} \sum_{j=i+1}^{N_n} \frac{q^2}{|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|} \quad [7]$$

et V_{ed} celle associée à la distribution électronique

$$-\nabla_k V_{ed} = e \times q \times \nabla_k \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{X}_k|} d\mathbf{x} \right) \quad [8]$$

Ainsi, il est clair que la connaissance de la fonction de distribution, solution de l'équation de Schrödinger, nous permet d'évaluer la densité électronique [5], et par ailleurs le vrai potentiel inter-atomique. Jusqu'à présent, cette résolution n'a pas été possible et les scientifiques se sont contentés d'utiliser d'autres potentiels inter-atomiques, empiriques ou simplifiés⁵, dans le cadre des simulations de type dynamique moléculaire.

Les simulations de type dynamique moléculaire considèrent un nombre élevé de noyaux atomiques, afin de définir une configuration assez représentative de la matière analysée, dont les positions et vitesses initiales sont connues. A partir du potentiel empirique considéré (il y en a beaucoup) on peut calculer les forces appliquées sur chaque noyaux, donc leurs accélérations, qui permettent l'actualisation des vitesses et donc des positions. Comme l'on peut voir, la procédure est simple, cependant le grand nombre de noyaux à considérer, le tout petit pas de temps que la stabilité de la discrétisation impose et le caractère empirique ou approximé des potentiels inter-atomiques font que ces simulations soient généralement gourmandes en temps de calcul et à résultats parfois incertains. Malgré ces critiques, ces simulations ont permis une description fine de la structure et de la mécanique des matériaux à l'échelle nanométrique, sans précédents.

2.2. De la dynamique moléculaire aux models à l'issue de la théorie cinétique

5. Dérivés de la mécanique quantique dans de situations simples ou via l'introduction de hypothèses simplificatrices.

Par les raisons données dans le dernier paragraphe de la section précédente, et par la difficulté d'application des techniques d'accélération habituelles (dont nous avons citées certaines tout au début de ce papier), des descriptions plus grossières ont été privilégiées dans de nombreux domaines. Nous allons introduire celle des fluides nanostructurés associées à une solution de polymère⁶.

Dans la description des polymères en solution, la macromolécule est décrite à partir d'un ensemble de multi-haltères, comme illustré dans la figure 1. Ainsi nous pouvons écrire l'équilibre de chaque nœud j (Bird et al., 1987)

$$-\zeta(\dot{\mathbf{r}}_j - \mathbf{v}_0 - (\text{grad } \mathbf{v})\mathbf{r}_j) - \mathbf{F}_j^B + \mathbf{F}_j^c - \mathbf{F}_{j-1}^c = 0 \quad [9]$$

qui traduit les effets hydrodynamiques, les effets Browniennes (à caractère aléatoire) et les effets des ressorts connectés aux nœuds. Les simulations qui opèrent directement sur l'équation [9] sont dites de type Browniennes, et elles sont très voisines des simulations de type Monte-Carlo.

Nous pouvons également décrire la dynamique des molécules à partir de la configuration de celles-ci décrite par les connecteurs $\dot{\mathbf{q}}_j$. La différence des expressions [9] pour chaque deux nœuds consécutifs résulte :

$$\dot{\mathbf{q}}_j = (\text{grad } \mathbf{v}) \mathbf{q}_j - \frac{1}{\zeta} \sum_{k=1}^N \mathbf{A}_{jk} \left(k_b T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_k} \ln(\Psi) + \mathbf{F}_k^c \right) \quad [10]$$

où les effets Browniennes ont été mis sous la forme⁷ $\mathbf{F}_j^B = -k_b T \frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} \ln(\Psi)$ et

où $\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ traduit la probabilité de trouver dans un point de l'espace physique \mathbf{x} au temps t une molécule dont la conformation est définie par les vecteurs $\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N$.

L'évolution de la fonction de distribution de probabilité est définie dans un espace multi-dimensionnel, est gouvernée par l'équation de Fokker-Planck, l'un des piliers de la mécanique statistique :

6. D'autres descriptions à l'issue de la théorie cinétique peuvent être dérivées pour des systèmes composés par de particules chargées en mouvement où les effets d'inertie, au contraire que dans les modèles macromoléculaires habituels, ne sont plus négligés. Ces modèles conduisent à une équation définie dans un espace multi-dimensionnel connue comme équation de Vlasov-Poisson-Boltzmann.

7. Forme habituelle des modèles de diffusion.

$$\frac{d\Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)}{dt} = - \sum_{j=1}^N \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{q}_j} (\dot{\mathbf{q}}_j \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)) \right) \quad [11]$$

avec $\dot{\mathbf{q}}_j$ donné par [10]. L'équation [11] est difficilement résoluble à cause de son caractère multi-dimensionnel, ce qui a motivé le développement de techniques stochastiques alternatives basées sur la résolution de l'équation stochastique d'Ito associée à [11] (Ottinger, 1996). Cependant ces dernières ne sont sans difficultés. La description précise de la solution nécessite un nombre extrêmement grand (parfois prohibitif) de réalisation du processus stochastique, et même si les moments⁸ de cette distribution peuvent être calculés avec un nombre raisonnable de réalisations, le bruit statistique est bien présent dans le résultat.

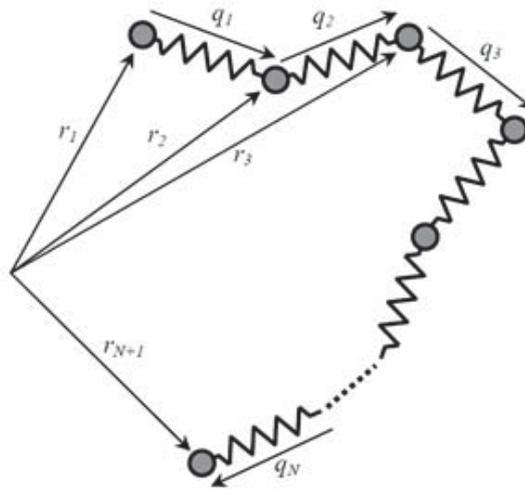


Figure 1. *Modèle multi-haltère d'un polymère en solution.*

2.3. Nous voici de retour à l'échelle macroscopique

Le passage entre les différentes échelles, ou parfois le couplage entre différentes descriptions dans des domaines connectés, est l'objet d'une grande activité scientifique dont la revue est au-delà de l'objet de ce travail. Nous dirons simplement que dans certains cas, comme ce que nous venons de décrire, la contrainte macroscopique résulte⁹ :

$$\boldsymbol{\tau}_p(\mathbf{x}, t) = \int_{\mathbf{Q}} \mathbf{g}(\mathbf{Q}) \Psi(\mathbf{x}, t, \mathbf{Q}) d\mathbf{Q} \quad [12]$$

8. Les contraintes macroscopiques résultent des moments de la distribution.

9. Dans l'obtention on utilise l'équivalent de la règle de Cauchy-Born. La procédure se simplifie endormement du fait que les accélérations sont négligées et donc la déformation de la microstructure est affine.

où $\mathbf{Q}^T = (\mathbf{q}_1, \dots, \mathbf{q}_N)$ et $\mathbf{g}(\mathbf{Q})$ dépendent du modèle considéré.

3. Une nouvelle technique numérique basée sur la séparation de variables

Récemment nous avons proposé une nouvelle technique numérique capable de résoudre des modèles jusqu'à présent jamais résolus, définis dans des espace de dimension élevée ou très élevée (nous montrerons des exemples dans des espaces de dimension 100). Pour l'illustrer nous allons considérer un modèle simple¹⁰ :

$$\nabla^2 T = f(\mathbf{x}), \mathbf{x}^T = (x_1, \dots, x_D) \in \Omega =]0, L[^D, T(\mathbf{x} \in \partial\Omega) = 0 \quad [13]$$

où de façon générale le second membre s'écrit :

$$f(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{i=m} a_i F_1^i(x_1) \times \dots \times F_D^i(x_D) = \sum_{i=1}^{i=m} a_i \prod_{k=1}^{k=D} F_k^i(x_k) \quad [14]$$

La solution recherchée est sous la forme

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i T_1^i(x_1) \times \dots \times T_D^i(x_D) = \sum_{i=1}^{i=\infty} \alpha_i \prod_{k=1}^{k=D} T_k^i(x_k) \quad [15]$$

dont sa construction se fait dans le cadre d'un schéma itératif, où chaque itération implique deux étapes (voir Ammar et al. (2006) pour plus de détails):

1. **Projection.** Si l'on suppose la base de fonctions connue à l'itération n :

$$T(\mathbf{x}) \approx \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i T_1^i(x_1) \times \dots \times T_D^i(x_D) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \prod_{k=1}^{k=D} T_k^i(x_k) \quad [16]$$

alors les coefficients $\alpha_i, \forall i \in [1, \dots, n]$ se calculent en introduisant l'approximation [16] dans la formulation variationnelle associée au modèle [13]. Le problème discret résultant (linéaire) admet une taille $n \times n$, avec $n \sim 10$.

2. **Enrichissement.** Ayant calculé les n coefficients alfa, les nouvelles fonctions $T_k^{n+1}(x_k), \forall k \in [1, \dots, D]$ sont calculées. Pour cela nous introduisons

10. Par ailleurs cette technique a été appliquée dans une large variété de modèles : linéaires et non-linéaires, stationnaires et transitoires, a conditions aux limites homogènes et non-homogènes, ... (Ammar et al., 2006 ; Ammar et al., 2007 ; Mokdad et al., 2007).

$$T(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i \prod_{k=1}^{k=D} T_k^i(x_k) + \prod_{k=1}^{k=D} R_k(x_k) \quad [17]$$

dans la formulation variationnelle associée à l'équation [13]. Après résolution du problème non-linéaire de taille $D \times N$ nous obtenons les fonctions $R_k(x_k)$ d'où :

$$T_k^{n+1}(x_k) = R_k(x_k) / \|R_k(x_k)\|, \quad \forall k \in [1, \dots, D] \quad [18]$$

La méthode converge très vite, elle n'entraîne que des interpolations et intégrations 1D¹¹, et les premiers tests ont révélé un ordre de convergence de 4 (dans la norme de Lebesgue). La résolution d'un modèle défini dans un espace de dimension $D = 100$, avec un millier de nœuds par direction ($N \sim 1000$) a nécessité de l'ordre de 1000 secondes de temps CPU, bien que la résolution ait été faite avec la méthode des différences finies (ou n'importe quel méthode basée sur un maillage de l'hyper-domaine) aurait nécessité de l'ordre de 10^{300} nœuds.

Nos travaux actuels portent sur la résolution de l'équation de Schrödinger, conduisant à la détermination de potentiels interatomiques qui nous permettront une compréhension plus fine de la structure et de la mécanique des matériaux à l'échelle nanométrique.

4. Bibliographie

- Abichou H., H. Zahrouni H., Potier-Ferry M., « Asymptotic numerical method for problems coupling several non-linearities », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 191, n. 51-52, 2002, 5795-5810.
- Allery C., Béghein C., Hamdouni A., Razafindralandy D. « Applying model reduction by POD to various complex flows », *Proceedings of the 7th Esaform Conference on Material Forming*, Trondheim, Norway, 2004, p. 53-57.
- Ammar A., Ryckelynck D., Chinesta F., Keunings R., « On the reduction of kinetic theory models related to finitely extensible dumbbells », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 134, 2006, p. 136-147.
- Ammar A., Mokdad B., Chinesta F., Keunings R., « A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling of complex fluids », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, vol. 139, 2006, p. 153-176.
- Ammar A., Mokdad B., Chinesta F., Keunings R., « A new family of solvers for some classes of multidimensional partial differential equations encountered in kinetic theory modeling

11. Ou dans des sous-espaces à faible dimension, que au pire résulte celle de l'espace physique.

- of complex fluids. Part II: transient simulation using space-time separated representation », *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, A paraître, 2007.
- Bird R.B., Curtiss, C.F., Armstrong, R.C., Hassager, O., *Dynamic of polymeric liquid, Volume 2: Kinetic Theory*, John Wiley & Sons, 1987.
- Boyd J.P. *Chebyshev and Fourier Spectral methods*, Springer Verlag, 1989.
- Breitkopf P. Editeur. *La méthode des éléments finis: extensions et alternatives*, Hermes, 2006.
- Briggs W., *A multigrid tutorial*, Ed. SIAM, 1987.
- Bungartz H.J., Griebel M., « Sparse grids », *Acta Numerica*, vol. 13, 2004, p. 1-123.
- Ciarlet P.G., Lions J.L., *Handbook of numerical analysis*, North-Holland, 1990.
- Corre C., Hanss G., Lerat A., « A residual-based compact scheme for the unsteady compressible Navier-Stokes equations », *Computer and Fluids*, vol. 34, 2005, p. 561-580.
- Gosselet P., Rey C., « On a selective reuse of Krylov subspaces in Newton-Krylov approaches for nonlinear elasticity », 14th. Conference on Domain Decomposition Methods, 2002, p. 419-426.
- Gosselet P., Rey C., « Non-overlapping domain decomposition methods in structural mechanics », *Archives of Computational Methods in Engineering, State of the Art Reviews* », A paraître, 2007.
- Ladevèze P. *Mécanique non linéaire des structures*, Hermes, 1996.
- Ladevèze P., Pelle J.P. *La maîtrise du calcul en mécanique linéaire et non linéaire*, Hermes, 2001.
- Ladevèze P., Neron D., Gosselet P., « On a mixed and multiscale domain decomposition method », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 196, n. 8, 2006, p. 1526-1540.
- Mokdad B., Pruliere E., Ammar A., Chinesta F., « On the simulation of kinetic theory models of complex fluids using the Fokker-Planck approach », *Applied Rheology*, A paraître, 2007.
- Ottinger H.C. *Stochastic processes in polymeric fluids*, Springer, 1996.
- Park H.M., Cho D.H., « The use of the Karhunen-Loève decomposition for the modelling of distributed parameter systems », *Chem. Engineer. Science*, vol. 51, 1996, p. 81-98.
- Ryckelynck D., « A priori hyperreduction method: an adaptive approach », *Journal of Computational Physics*, vol. 202, 2005, p. 346-366.
- Ryckelynck D., Chinesta F., Cueto E., Ammar A., « On the a priori model reduction: overview and recent developments », *Archives of Computational Methods in Engineering, State of the Art Reviews*, vol. 13, n. 1, 2006, p. 91-128.
- Vereecke B., Bavestrello H., Dureisseix D., « An extension of the FETI domain decomposition method for incompressible and nearly incompressible problems », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 192, n. 31-32, 2003, 3409-3429.
- Weiner J.H., *Statistical mechanics of elasticity*, Ed. Dover, 2002.