



**HAL**  
open science

# Régularisation de problèmes inverses par l'utilisation de maillages adaptatifs

Guillaume Puel, Denis Aubry

► **To cite this version:**

Guillaume Puel, Denis Aubry. Régularisation de problèmes inverses par l'utilisation de maillages adaptatifs. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495803

**HAL Id: hal-01495803**

**<https://hal.science/hal-01495803>**

Submitted on 26 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Régularisation de problèmes inverses par l'utilisation de maillages adaptatifs

**Guillaume Puel — Denis Aubry**

Laboratoire MSSMat (École Centrale Paris - CNRS UMR 8579)  
Grande Voie des Vignes  
F-92295 Châtenay-Malabry cedex  
{guillaume.puel,denis.aubry}@ecp.fr

---

*RÉSUMÉ. La résolution d'un problème inverse repose généralement sur la construction d'une norme caractéristique de l'écart entre les prédictions du modèle et les données expérimentales, à laquelle on ajoute un terme « régularisant » qui, à défaut de permettre de trouver « la » solution théorique du problème inverse, permet d'en déterminer une solution proche sans trop de difficultés numériques (régularisation de Tikhonov). Cependant, l'emploi de ce terme régularisant est souvent insuffisant, surtout lorsqu'il s'agit d'identifier un champ spatial de propriétés matériaux d'un domaine mécanique à partir d'informations sur le contour de ce domaine. Nous proposons ici une méthode qui utilise un maillage de discrétisation du champ de propriétés recherché différent du maillage de résolution des problèmes mécaniques : à l'aide d'estimateurs d'erreur locaux adaptés, nous pouvons mettre en place une démarche générale d'identification itérative, où le maillage de discrétisation du champ recherché est progressivement raffiné, régularisant ainsi progressivement le problème. Cette démarche est ici mise en application sur un exemple de détection de cavités souterraines à partir de mesures de déplacements en surface.*

*ABSTRACT. In order to solve an inverse problem, a norm quantifying the discrepancy between the model's predictions and experimental data is often used, with the support of an additional term making avoidable many numerical difficulties (Tikhonov's regularization). However, this latter term is often insufficient to deal with the identification of a whole spatial field of material properties. Here is discussed an iterative identification method using adaptive meshes as a regularization process: the spatial field is not sought on the same mesh as the other mechanical quantities, but on a rough mesh, which is progressively refined according to local error estimators. This general strategy is then applied to a practical case of study.*

*MOTS-CLÉS : problème inverse, identification de champ, régularisation, maillage adaptatif*

*KEYWORDS: inverse problem, field identification, regularization, adaptive mesh*

---

## 1. Introduction

La résolution de problèmes d'identification de champs de propriétés d'un domaine matériel est encore aujourd'hui une tâche délicate du fait du caractère mal posé de cette classe de problèmes ; le recours à divers moyens de régularisation est généralement indispensable pour parvenir à mener à bien la résolution du problème inverse étudié.

Le problème que nous cherchons plus particulièrement à résoudre ici concerne la détection de cavités souterraines à l'aide de mesures de déplacements de la surface du sol par interférométrie radar : le satellite fait l'acquisition de deux images de la surface lors de deux passages successifs, et la figure d'interférence obtenue en confrontant les deux images permet de déduire le déplacement vertical de chaque point de la surface avec une très bonne précision (inférieure au centimètre).

Nous voulons à partir de ces données expérimentales être en mesure de détecter et de localiser la création éventuelle d'une cavité souterraine, qui serait la cause d'un tassement du sol en surface. La démarche envisagée est d'identifier un champ spatial de module de Young sur le domaine d'étude en utilisant une régularisation liée à l'utilisation de maillages adaptatifs.

## 2. Description du problème

### 2.1. *Modèle de référence*

Pour constituer le modèle de référence qui sera confronté aux mesures expérimentales, nous faisons l'hypothèse que le sol (avant l'apparition de la cavité) est constitué de couches homogènes et isotropes dont les caractéristiques (modules de Young  $E_k$ , coefficients de Poisson  $\nu_k$ , masses volumiques  $\rho_k$ ) sont bien connues. Ce domaine, noté  $\Omega$ , vérifie les conditions limites suivantes sur sa frontière  $\partial\Omega$  : tandis que la surface du sol, notée  $\Sigma_{\text{exp}}$ , est libre d'efforts, on suppose que les autres frontières du domaine sont bloquées en déplacement, traduisant le fait que le domaine de sol est encadré d'éléments rocheux supposés indéformables.

### 2.2. *Données expérimentales*

Les données expérimentales utilisées dans ce travail sont en fait simulées à l'aide d'un modèle Eléments Finis fin issu du modèle de référence dans lequel la présence de la cavité se traduit par l'existence d'un domaine  $\Omega_c$  supposé homogène, de caractéristiques ( $E_c = 0,6GPa$ ,  $\nu_c = 0,25$ ,  $\rho_c = 2600kg/m^3$ ). Pour simplifier, on suppose ici que le domaine n'est constitué que d'une seule couche homogène, de caractéristiques

( $E_0 = 60GPa$ ,  $\nu_0 = 0,25$ ,  $\rho_0 = 2600kg/m^3$ ). Les déplacements « expérimentaux »  $\underline{u}_{\text{exp}}$  sont donc obtenus en résolvant le problème suivant :

$$\underline{\text{div}} E_c \mathbb{C}_0 \underline{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{exp}}) - \rho_c g \underline{e}_y = \underline{0} \text{ dans } \Omega_c \quad [1a]$$

$$\underline{\text{div}} E_0 \mathbb{C}_0 \underline{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{exp}}) - \rho_0 g \underline{e}_y = \underline{0} \text{ dans } \Omega - \Omega_c \quad [1b]$$

$$\underline{u}_{\text{exp}} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma_{\text{exp}} \quad [1c]$$

$$E \mathbb{C}_0 \underline{\varepsilon}(\underline{u}_{\text{exp}}) \underline{e}_y = \underline{0} \text{ sur } \Sigma_{\text{exp}} \quad [1d]$$

### 3. Traitement du problème inverse

#### 3.1. Problème direct

Nous cherchons à déterminer le champ spatial de module de Young  $E$  qui permette d'obtenir un champ de déplacements en surface le plus proche des déplacements expérimentaux  $\underline{u}_{\text{exp}}$ . Pour pouvoir faire cette comparaison, nous définissons le problème direct suivant, qui permet de calculer le déplacement  $\underline{u}(E)$  en tout point de  $\Omega$  :

$$\underline{\text{div}} E \mathbb{C}_0 \underline{\varepsilon}(\underline{u}) - \rho_0 g \underline{e}_y = \underline{0} \text{ dans } \Omega - \Omega_c \quad [2a]$$

$$\underline{u} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma_{\text{exp}} \quad [2b]$$

$$E \mathbb{C}_0 \underline{\varepsilon}(\underline{u}) \underline{e}_y = \underline{0} \text{ sur } \Sigma_{\text{exp}} \quad [2c]$$

#### 3.2. Définition du problème inverse

La résolution du problème inverse passe par la minimisation d'une norme caractéristique de l'écart entre le déplacement  $\underline{u}(E)$  associé au problème direct et le déplacement expérimental  $\underline{u}_{\text{exp}}$ , au niveau de la surface  $\Sigma_{\text{exp}}$  :

$$J(E) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{\text{exp}}} \|\underline{u}(E) - \underline{u}_{\text{exp}}\|^2 d\Sigma_{\text{exp}} \quad [3]$$

Comme tout problème inverse, ce problème est mal posé, d'autant plus que la recherche du champ spatial  $E$  se traduit en pratique par la détermination d'un grand nombre d'inconnues scalaires correspondant aux valeurs nodales du champ discrétisé par Éléments Finis. Il est donc nécessaire d'ajouter à la norme précédente un ou plusieurs termes dits de régularisation selon Tikhonov : classiquement, on cherche à limiter la norme du champ recherché ; même si cela semble légitime ici (on sait que, excepté pour la cavité, le module de Young identifié sera le module  $E_0$  du sol modélisé comme un milieu homogène), le choix du poids associé à ce terme supplémentaire est souvent extrêmement délicat. Face à ce constat, nous avons proposé dans (Puel *et al.*, 2006) un autre terme régularisant basé sur le gradient du module de Young recherché :

$$J_\beta(E) = \frac{1}{2} \int_{\Sigma_{\text{exp}}} \|\underline{u} - \underline{u}_{\text{exp}}\|^2 d\Sigma_{\text{exp}} + \frac{\beta}{2} \int_{\Omega} \|\underline{\text{grad}} E\|^2 d\Omega \quad [4]$$

Un choix raisonnable de  $\beta$  consiste à donner un poids équivalent aux deux termes de  $J_\beta(E)$ , en estimant l'ordre de grandeur de la variation spatiale maximale de module de Young admissible ; on évite par contre d'imposer une valeur « idéale » pour  $E$ .

### 3.3. Problème adjoint et résolution numérique du problème inverse

Pour limiter les difficultés numériques lors de la détermination du minimum de la fonction  $J_\beta(E)$ , on évalue analytiquement la différentielle de cette dernière en introduisant le problème adjoint suivant :

$$\underline{\text{div}} E\mathbb{C}_0\varepsilon(\underline{z}) = \underline{0} \text{ dans } \Omega \quad [5a]$$

$$\underline{z} = \underline{0} \text{ sur } \partial\Omega - \Sigma_{\text{exp}} \quad [5b]$$

$$E\mathbb{C}_0\varepsilon(\underline{z})\underline{n} = \underline{u} - \underline{u}_{\text{exp}} \text{ sur } \Sigma_{\text{exp}} \quad [5c]$$

Ce problème, très proche du problème direct décrit précédemment, fait intervenir en condition limite sur  $\Sigma_{\text{exp}}$  la différence entre le champ de déplacement du problème direct et le champ expérimental ; la solution de ce problème est un champ  $\underline{z}(E)$ .

Grâce à ce problème adjoint, on peut exprimer simplement la différentielle :

$$\delta J_\beta = \int_{\Omega} \left( -\text{tr } \mathbb{C}_0\varepsilon(\underline{u}(E))\varepsilon(\underline{z}(E))\delta E + \beta(\underline{\text{grad}}E, \underline{\text{grad}}\delta E) \right) d\Omega \quad [6]$$

et le minimum recherché est tel que  $\delta J_\beta = 0 \forall \delta E$ . Au final, le problème de minimisation revient à résoudre un système de trois équations aux dérivées partielles, couplées et d'inconnues  $(\underline{u}(E), \underline{z}(E), E)$ .

### 3.4. Observations pratiques

Dans (Puel *et al.*, 2006), nous avons montré qu'il était possible de localiser assez précisément la position et l'étendue de la cavité recherchée, à condition toutefois de réduire l'étendue du « domaine de recherche », c'est-à-dire de ne permettre la variation de  $E$  au cours de la résolution que dans un sous-domaine de  $\Omega$  (grâce à une estimation grossière de la profondeur de la cavité recherchée par exemple), mais aussi d'estimer correctement la variation maximale de module de Young admissible, afin de fixer une valeur judicieuse du paramètre de régularisation  $\beta$ .

En fait, la principale difficulté associée à l'identification d'un champ spatial de propriétés matériaux est liée au fait qu'il faut identifier un grand nombre de paramètres scalaires ; nos deux conditions précédentes vont dans ce sens. De même, si on fait l'hypothèse que la forme de la cavité recherchée est connue (elliptique par exemple), le processus d'identification est beaucoup plus efficace car on a considérablement réduit le nombre de paramètres à identifier (quatre dans le cas de l'ellipse). Par contre, l'identification est moins robuste, car mise en échec si la cavité n'est pas de la forme recherchée, ou s'il y a en fait plusieurs cavités présentes dans le sol.

## 4. Régularisation par l'utilisation de maillages adaptatifs

### 4.1. Principe

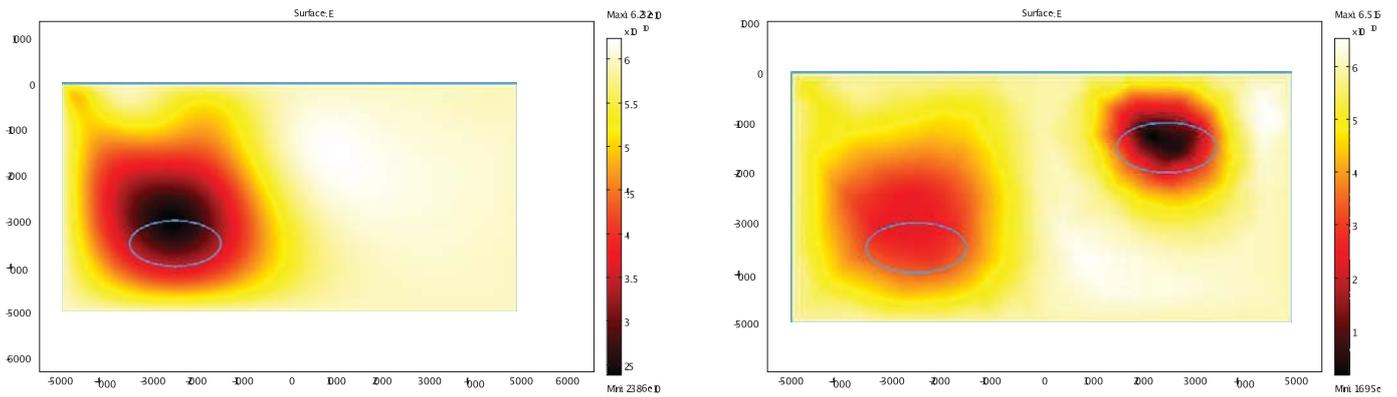
Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, la recherche du champ de module de Young se traduit en pratique par la détermination des inconnues nodales correspondant à la discrétisation Éléments Finis de ce champ spatial. Plus le maillage utilisé est grossier, moins il y a d'inconnues nodales à déterminer. Par contre, on ne peut pas utiliser ce maillage grossier pour la résolution des problèmes direct et adjoint sous peine d'être confronté à des imprécisions dans la détermination du minimum.

Nous choisissons donc d'utiliser deux maillages différents : un maillage de finesse « suffisante » pour résoudre les problèmes direct et adjoint, et un maillage grossier pour discrétiser le champ  $E$  recherché. Les équations « mécaniques » (2) et (5) sont résolues sur le maillage fin, qui n'évolue pas, tandis que l'équation de compatibilité (6) est résolue sur le maillage grossier choisi. La résolution de ces trois équations a ainsi l'avantage de ne pas nécessiter un réglage trop « fin » du paramètre  $\beta$  de régularisation, mais par contre, elle donne un résultat très approximatif pour l'identification du module de Young vu que celui-ci est décrit par une discrétisation très grossière.

C'est pourquoi nous proposons une procédure itérative basée sur (Bangerth *et al.*, 2005), qui permet de raffiner le maillage de discrétisation du module recherché, basée sur les techniques classiques d'adaptation de maillage. Celles-ci reposent sur l'utilisation d'un estimateur *a posteriori* de la qualité du maillage, qui, selon le choix de ce dernier, permet de chiffrer la contribution de chaque élément à l'erreur commise par rapport au problème continu de référence. Pour des raisons d'implémentation dans le logiciel COMSOL, nous avons choisi un estimateur par résidu d'équilibre (Verfürth, 1996) ; chaque élément qui contribue au-delà d'un certain seuil d'erreur est raffiné une ou plusieurs fois, ainsi que les éléments voisins pour conserver un maillage conforme.

### 4.2. Exemples

Cette procédure itérative a été mise en œuvre dans le cadre d'exemples de domaines bidimensionnels de sols. La figure 1(a) montre l'identification d'une cavité (de forme elliptique, « en bas à gauche » du domaine étudié) après 10 étapes de raffinement qui nous ont fait passer d'un maillage initial à 12 éléments (triangles linéaires) à plus de 20 000 éléments au final ; il est important de souligner que l'identification directe du module en une seule étape à partir de ce dernier maillage est impossible (non convergence de l'algorithme non-linéaire). La figure 4.2 montre quant à elle la robustesse de la procédure vu qu'on est en mesure de mettre en évidence deux cavités simultanément présentes, en 5 itérations seulement (passage de 12 à 600 éléments linéaires). Dans les deux cas, la confrontation entre les déplacements expérimentaux et les déplacements obtenus par le problème direct montre une excellente corrélation.



(a) Après 10 étapes de raffinement (une cavité)

(b) Après 5 étapes de raffinement (deux cavités)

**Figure 1.** *Module de Young identifié dans le cas de cavités elliptiques*

## 5. Conclusion

Nous avons montré sur quelques exemples particuliers autour de la détection de cavités souterraines à l'aide de mesures de déplacements en surface comment on pouvait régulariser un problème inverse d'identification de champs de propriétés en utilisant des maillages adaptatifs pour discrétiser le champ recherché. Maintenant que la faisabilité de la méthode a été mise en évidence, il faut encore se pencher plus précisément sur l'influence des techniques d'adaptabilité elles-mêmes en s'interrogeant plus précisément sur le choix des estimateurs d'erreur *a posteriori* et des types de raffinement. Dans un second temps, il sera important de traiter des problèmes plus proches de la réalité en utilisant de véritables mesures expérimentales et en traitant un cas d'étude réel (géométrie tridimensionnelle existante de sol dans le cas de la détection de cavités par exemple).

## 6. Bibliographie

- Bangerth W., Joshi A., Sevick-Muraca E., « Adaptive finite element methods for increased resolution in fluorescence optical tomography », *Progress in Biomedical Optics and Imaging*, vol. 6, p. 318-329, 2005.
- Puel G., Aubry D., « Detection of cavities using interferometric data : adjoint state formulations and adaptive meshing », *WCCM7 - 7th World Conference on Computational Mechanics*, Los Angeles, California, 2006.
- Verfürth R., *A review of a posteriori error estimation and adaptive mesh-refinement techniques*, Wiley, 1996.