

Formulation quasi-symétrique du contact entre corps déformables

Lionel Fourment

▶ **To cite this version:**

Lionel Fourment. Formulation quasi-symétrique du contact entre corps déformables. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495638

HAL Id: hal-01495638
https://hal.science/hal-01495638

Submitted on 25 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Formulation Quasi-Symétrique du contact entre corps déformables

Lionel Fourment

**CEMEF, Ecole des Mines de Paris,*
BP 207, 06 904 Sophia Antipolis Cedex, France
lionel.fourment@ensmp.fr

RÉSUMÉ. *Dans le cadre du contact entre corps déformables 3D ayant des discrétisations éléments finis incompatibles avec des tailles de mailles fort différentes, nous étudions une formulation quasi-symétrique de traitement du contact dans le but d'obtenir des résultats satisfaisants quelque soit le choix du corps* esclave *et du corps* maître. *Cette approche ne repose pas sur l'utilisation d'éléments de mortier, mais sur une formulation symétrique des conditions de contact, cette dernière étant rendue compatible en remplaçant les multiplicateurs de Lagrange du corps* maître *par la projection des multiplicateurs du corps* esclave. *Les résultats numériques obtenus sur de nombreux cas tests 3D, dans le cadre du contact nodal résolu par pénalisation au sein du logiciel FORGE3®, montrent que cette approche résout avec simplicité les principales difficultés du contact entre corps déformables.*

ABSTRACT. *In the frame of contact between deformable bodies with non compatible finite element discretisations and with very different mesh sizes, a quasi-symmetric contact treatment is proposed in order to obtain satisfactory results whichever body is selected as* master *or* slave. *This approach is not based on mortar elements, but on a symmetric formulation of the contact conditions. It is made compatible by replacing the Lagrange multipliers of the master body by the projection of the slave body multipliers. Numerical results obtained with numerous 3D test cases, in the frame of a nodal contact formulation solved by a penalty method within the FORGE3® finite element software, show that this approach actually solves the main difficulties of contact between deformable bodies, in a rather simple way.*

MOTS-CLÉS : *Contact, Maillages Non Compatibles, Mise en Forme, Corps Déformables*

KEYWORDS: *Contact, Non Compatible Meshes, Metal Forming, Deformable Bodies*

1. Introduction

Au moment de la discrétisation par éléments finis de corps déformables en contact, il s'avère en général impossible d'imposer symétriquement les conditions de non pénétration, dans le cas où les maillages antagonistes ne sont pas compatibles. Une formulation parfaitement symétrique s'avère surcontrainte (Chenot et al., 2002). Un corps doit être considéré comme "maître", celui qui impose la condition de contact, et l'autre corps comme "esclave", celui qui la subit. Dans la pratique, il

est nécessaire que le corps esclave soit discrétisé plus finement, ce qu'il n'est pas toujours possible de réaliser, par exemple pour un assemblage de nombreux corps en contact ou lorsque les interfaces de contact varient continûment au cours des calculs. Lorsque le corps maître est discrétisé beaucoup plus finement que le corps esclave, la formulation éléments finis diverge (El-Abbasi et al., 2001b, Hild, 1998). La plupart des formulations proposées pour résoudre cette question reposent sur l'utilisation d'éléments de mortier (Baillet et al., 2003, El-Abbasi et al., 2001a, Hild, 2000, Puso et al., 2004a, Puso et al., 2004b), qui s'intègrent bien à un logiciel en 2D, mais beaucoup plus difficilement en 3D (Fernandez, 2004, Puso et al., 2004a, Puso et al., 2004b), et tout particulièrement dans les cas les plus généraux où cette interface, fractionnée en de nombreuses parties non connexes, évolue constamment au cours du temps. Nous étudions une formulation alternative proposée dans (Fourment et al., 2003) qui repose sur une approximation du contact symétrique (Habraken et al., 1998) où le caractère surcontraint est évité en utilisant seulement les multiplicateurs de Lagrange du corps esclave.

2. Equations du problème

Deux corps élastiques *A* et *B* sont en contact sur la surface de contact Γ^C. Pour $i = a,b$, u_i est le champ des déplacements sur Ω_i, n_i est la normale sortante à $\partial\Omega_i$ et $\delta(x)$ est la fonction distance entre *A* et *B*, négative s'il y a pénétration. Cette fonction se linéarise en $-h(u_a,u_b)$ [1] à partir de la valeur de la distance initiale δ_{ab}^0. La condition de contact entre les deux corps est donnée par [1], et sa forme faible par [2], où λ est le multiplicateur de Lagrange du problème mixte (la contrainte normale de contact).

$$0 \le \delta(x) \text{, linéarisé en : } h(u_a,u_b) = (u_a.n_a + u_b.n_b) - \delta_{ab}^0 \le 0, \quad \text{sur } \Gamma^C \qquad [1]$$

$$\forall \lambda^* \le 0, \quad \int_{\Gamma^C} \lambda^* h(u_a,u_b)\, ds \le 0 \qquad [2]$$

Le point clé du traitement du contact repose sur une intégration précise, après discrétisation éléments finis [4], du terme de lagrangien du problème mixte :

$$b(\lambda,u) = \int_{\Gamma^C} \lambda\, h(u_a,u_b)\, ds \qquad [3]$$

$$\begin{cases} \forall x \in \Omega_i, \quad x_i^h(x) = \sum_k x_i^k N_i^k(x); \quad u_i^h(x) = \sum_k u_i^k N_i^k(x) \\ \forall x \in \Gamma^C, \quad \lambda^h(x) = \sum_k \lambda^k N^k(x) \end{cases} \qquad [4]$$

3. Formulation Quasi-Symétrique

Après discrétisation, les deux surfaces Γ_a^C et Γ_b^C ne sont pas équivalentes ; il est donc nécessaire de définir sur quelle surface intégrer $b\left(\lambda^h,u^h\right)$. Contrairement aux approches avec éléments de mortiers (Baillet et al., 2003, El-Abbasi et al., 2001a, Hild, 2000, Puso et al., 2004a), nous souhaitons éviter l'introduction d'une troisième surface d'intégration, souvent fort délicate à construire en 3D (Fernandez, 2004, Puso et al., 2004a, Puso et al., 2004b), en utilisant les surfaces Γ_a^C et Γ_b^C.

Dans la formulation maître / esclave habituelle, $b\left(\lambda^h,u^h\right)$ est intégré sur une seule des surfaces, Γ_a^C, la surface du corps « esclave », et λ est interpolé uniquement sur Γ_a^C [5]. Dans la pratique, on choisit pour corps esclave celui qui est discrétisé le plus finement, c'est-à-dire celui qui fournira l'intégration la plus précise de $b\left(\lambda^h,u^h\right)$.

$$b_1\left(\lambda_a^h,u^h\right)=\int_{\Gamma_a^C}\lambda_a^h\ h\left(u_a^h,u_b^h\right)ds\quad ;\quad \forall x\in\Gamma_a^C,\quad \lambda_a^h\left(x\right)=\sum_k\lambda_a^k N_a^k\left(x\right) \qquad [5]$$

Lorsque le corps esclave est discrétisé de manière beaucoup plus grossière que le corps maître, l'intégration de $b\left(\lambda^h,u^h\right)$ n'est pas satisfaisante et la condition de contact est très imparfaitement prise en compte. Il peut s'avérer judicieux d'intégrer $b\left(\lambda^h,u^h\right)$ symétriquement sur les deux surfaces en contact (Habraken et al., 1998):

$$\begin{cases} b_2\left(\lambda^h,u^h\right)=\frac{1}{2}\left(\displaystyle\int_{\Gamma_a^C}\lambda_a^h\ h\left(u_a^h,u_b^h\right)ds+\int_{\Gamma_b^C}\lambda_b^h\ h\left(u_b^h,u_a^h\right)ds\right) \\ \forall x\in\Gamma_b^C,\lambda_b^h\left(x\right)=\displaystyle\sum_k\lambda_b^k N_b^k\left(x\right)\quad ;\quad \forall x\in\Gamma_a^C,\lambda_a^h\left(x\right)=\sum_k\lambda_a^k N_a^k\left(x\right) \end{cases} \qquad [6]$$

λ est donc interpolé à la fois sur Γ_a^C et Γ_b^C. $b_2\left(\lambda^h,u^h\right)$ permet d'intégrer avec précision dans les zones de contact où l'un des corps est discrétisé beaucoup plus finement que l'autre. Toutefois, si les discrétisations de Γ_a^C et Γ_b^C sont semblables, $b_2\left(\lambda^h,u^h\right)$ introduit trop de conditions de contact, et la formulation s'avère sur contrainte (Chenot et al., 2002, El-Abbasi et al., 2001b).

Pour s'adapter à tout type de situation, il est possible de combiner ces deux approches [5] et [6]. La formulation maître / esclave est caractérisée par l'interpolation de λ seulement sur le corps esclave [5] ; la formulation symétrique par l'intégration de $b\left(\lambda^h,u^h\right)$ sur les deux surfaces Γ_a^C et Γ_b^C [6]. Leur combinaison conduit donc à remplacer dans [6] λ_b^h par une approximation $\tilde{\lambda}_b^h$ dépendant de λ_a^h seulement, par exemple la projection orthogonale $\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)$ de λ_a^h sur Γ_b^C. $b\left(\lambda^h,u^h\right)$ est alors calculé de la manière suivante :

$$b_3\left(\lambda_a^h,u^h\right)=\frac{1}{2}\left(\int_{\Gamma_a^C}\lambda_a^h\ h\left(u_a^h,u_b^h\right)ds+\int_{\Gamma_b^C}\underbrace{\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)}_{\tilde{\lambda}_b^h}\ h\left(u_b^h,u_a^h\right)ds\right) \quad [7]$$

Utilisant [4], on peut construire $\tilde{\lambda}_b^h=\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)$ par interpolation de $\tilde{\lambda}_b^h$ avec les fonctions λ_b^h et en utilisant les valeurs nodales de $\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)$ [8], celles-ci étant calculées à partir des valeurs de λ_a^h en $\pi_a^h\left(x_b^k\right)$, la projection de x_b^k sur Γ_a^C [9].

$$\forall x\in\Gamma_b^C,\quad \tilde{\lambda}_b^h\left(x\right)=\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)\left(x\right)=\sum_k\left(\pi_b^h\left(\lambda_a^h\right)\left(x_b^k\right)\right)N_b^k\left(x\right) \quad [8]$$

$$\forall k\in\Gamma_b^C,\quad \pi_a^h\left(x_b^k\right)=\sum_{l\in f_a^k}x_a^l N_a^l\left(\xi_a^k\right)\ ;\ \forall x\in\Gamma_b^C,\quad \tilde{\lambda}_b^h\left(x\right)=\sum_k\lambda_a^h\left(\pi_a^h\left(x_b^k\right)\right)N_b^k\left(x\right) \quad [9]$$

où f_a^k est la face de Γ_a^C contenant le nœud x_b^k et ξ_a^k est la coordonnée barycentrique de x_b^k sur f_a^k donnée par interpolation inverse de [4]. Ainsi,

$$\forall x\in\Gamma_b^C,\quad \tilde{\lambda}_b^h\left(x\right)=\sum_k\left(\sum_{l\in f_a^k}\lambda_a^l N_a^l\left(\xi_a^k\right)\right)N_b^k\left(x\right) \quad [10]$$

$$\text{et :}\quad b_3\left(\lambda_a^h,u^h\right)=\frac{1}{2}\left(\begin{array}{l}\displaystyle\int_{\Gamma_a^C}\left(\sum_{k'}\lambda_a^{k'}N_a^{k'}\left(x\right)\right)h\left(u_a^h,u_b^h\right)ds+\\ \displaystyle\int_{\Gamma_b^C}\left(\sum_{l'}\left(\sum_{k'\in f_a^{l'}}\lambda_a^{k'}N_a^{k'}\left(\xi_a^{l'}\right)\right)N_b^{l'}\left(x\right)\right)h\left(u_b^h,u_a^h\right)ds\end{array}\right) \quad [11]$$

La forme discrète de l'équation de contact est alors obtenue par différentiation de $b_3\left(\lambda_a^h,u^h\right)$ vis-à-vis de λ_a^k [12], où l'on remarque que la première partie de l'équation donne la contribution maître / esclave habituelle alors que la seconde partie permet de prendre en compte l'analyse du contact de *B* avec *A*. D'un point de vue pratique, cette formulation nécessite deux analyses de contact et se traduit par une augmentation de la largeur de bande des équations de contact, proportionnellement à l'ajout des contributions du corps maître.

$$\forall k'\in\Gamma_a^C,\quad \int_{\Gamma_a^C}N_a^{k'}\left(x\right)h\left(u_a^h,u_b^h\right)ds+\sum_{l'\ \text{t.q.}\ f_a^{l'}\ni k'}\int_{\Gamma_b^C}N_a^{k'}\left(\xi_a^{l'}\right)N_b^{l'}\left(x\right)h\left(u_b^h,u_a^h\right)ds\le 0 \quad [12]$$

4. Résultats numériques

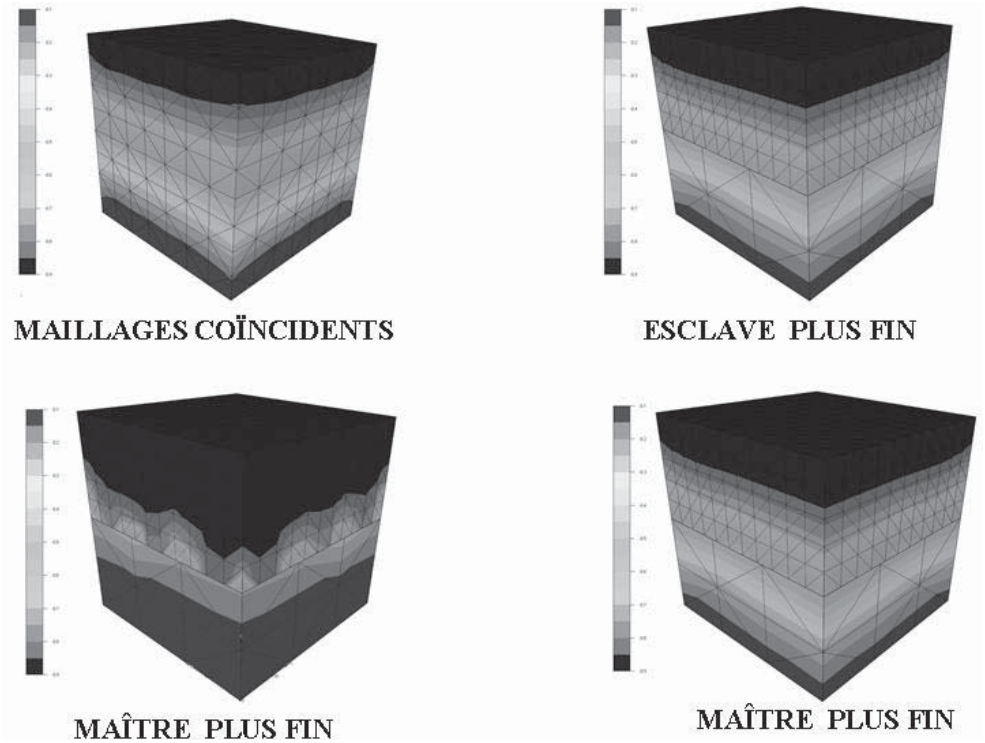


Figure 1: Ecrasement entre tas plats : isovaleurs du champ des vitesses verticales : 1) maillages coïncidents, 2) corps esclave plus fin, 3) corps maître plus fin, 4) corps maître plus fin et formulation quasi-symétrique.

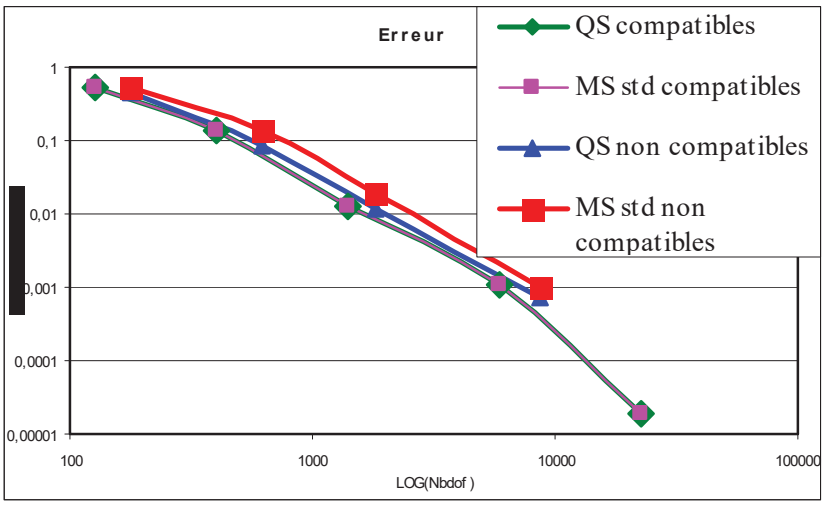


Figure 2: Cas test d'écrasement entre deux cubes identiques, exemple de maillages incompatibles, et erreur en fonction du nombre de degrés de liberté

Cette formulation quasi-symétrique est introduite dans le logiciel FORGE3®, dans le cadre d'un contact imposé au nœuds (formulation nœud à segment) et d'équations imposées par pénalisation. L'exemple de la Figure 1 montre les

isovaleurs du champ des vitesses dans la direction verticale pour l'écrasement de deux cubes identiques entre tas plats, avec des maillages compatibles 1), le corps esclave maillé plus finement 2), et le corps maître maillé plus finement 3-4) pour la formulation maître / esclave habituelle 3) ou quasi-symétrique 4). Les résultats obtenus dans les cas 2) et 4) sont parfaitement comparables, justifiant l'appellation quasi-symétrique. La Figure 2 montre la courbe de convergence obtenue pour des maillages compatibles et incompatibles en comparant la formulation habituelle à la formulation quasi-symétrique. Pour les maillages compatibles, les deux formulations donnent les mêmes résultats, alors que pour ceux incompatibles, la formulation quasi-symétrique donne systématiquement des résultats plus proches de ceux obtenus avec les maillages compatibles.

5. Références

Baillet L., Sassi T., "Mixed finite element formulation in large deformation frictional contact problem",Barcelonna CIMNE, 2003, p.789-779.

Chenot J.L., Fourment L., Mocellin K., "Numerical treatment of contact and friction in FE simulation of forming processes",*J. Mater. Process. Technol.,* 125-126, 2002, p. 45-52.

El-Abbasi N., Bathe K. J., On a New Segment-to-Segment Contact Algorithm, *Computational Fluid and Solid Mechanics,* K.J. Bathe. Eds. 2001a

El-Abbasi N., "Stability and patch test performance of contact discretizations and a new solution algorithm",*Comput. Struct.,* 79 2001b, p. 1473-1486.

Fernandez J. R., "Numerical analysis of a contact problem between two elastic-viscoplastic bodies with hardening and nonmatching meshes",*Finite Elements Anal. Des.,* 40 n°7 2004, p. 771-791.

Fourment L., Barboza J., Popa S., "Master / slave algorithm for contact between deformable bodies and axial symmetries - Application to 3D metal forging", Second M.I.T. Conference on Computational Fluid and Solid Mechanics, June 17-20, 2003

Habraken A. M., Cescotto S., "Contact between deformable solids: the fully coupled approach",28 n°4-8 1998, p. 153-169.

Hild P., "Numerical implementation of two nonconforming finite element methods for unilateral contact",*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* 184 n°1 2000, p. 99-123.

Hild P., Problèmes de contact unilatéral et maillages éléments finis incompatibles, Paul SabatierEditor, Toulouse, 1998

Puso M. A., Laursen T. A., "A mortar segment-to-segment frictional contact method for large deformations",*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* 193 n°45-47 2004a, p. 4891-4913.

Puso M. A., Laursen T. A., "A mortar segment-to-segment contact method for large deformation solid mechanics",*Comput. Methods Appl. Mech. Eng.,* 193 n°6-8 2004b, p. 601-629.