



HAL
open science

Couplage des méthodes X-FEM et de la base réduite pour la modélisation des fissures interfaciales

Elie Chahine, Patrick Laborde, Julien Pommier, Yves Renard

► **To cite this version:**

Elie Chahine, Patrick Laborde, Julien Pommier, Yves Renard. Couplage des méthodes X-FEM et de la base réduite pour la modélisation des fissures interfaciales. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495633

HAL Id: hal-01495633

<https://hal.science/hal-01495633>

Submitted on 25 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Couplage des méthodes XFEM et de la base réduite pour la modélisation des fissures interfaciales

Elie Chahine* — **Patrick Laborde****
— **Julien Pommier*** — **Yves Renard*****

**Institut de Mathématiques, INSA, Complexe scient. de Rangueil, F-31077 Toulouse
{elie.chahine, julien.pommier} @insa-toulouse.fr*

***Institut de Mathématiques, UPS, 118 rte de Narbonne, F-31062 Toulouse Cedex 6
laborde@math.ups-tlse.fr*

****Institut Camille Jordan, INSA Lyon, 20 rue Albert Einstein, F-69621 Villeurbanne
yves.renard@insa-lyon.fr*

RÉSUMÉ. Nous nous intéressons à l'utilisation d'une méthode d'éléments finis étendue XFEM lorsque la singularité du problème n'est pas connue ou bien encore est très compliquée (par exemple, dans le cas d'une fissure interfaciale). Dans ce cas, l'idée d'utiliser la singularité pour enrichir la base éléments finis est inexploitable ou au moins très coûteuse. On considère une variante de XFEM qui consiste à enrichir les éléments finis sur un maillage donné par des solutions pré-calculées sur un maillage raffiné. Un résultat mathématique de convergence est donné et illustré par quelques simulations numériques.

ABSTRACT. The extended finite element method XFEM is very efficient to solve problems where the nonsmooth behavior of the solution is known and numerically workable (e.g. a fracture in an isotropic material). In order to consider others situations (interfacial fractures, for instance), we study a variant of XFEM where the finite element basis is enriched with some pre-computed finite element solutions on a refined mesh. An optimal error estimate is given and corroborated by numerical tests.

MOTS-CLÉS : Méthode des éléments finis étendue, enrichissement pré-calculé

KEYWORDS: Extended finite element method, pre-computed enrichment functions

1. Introduction

La méthode *XFEM* s'est révélée efficace pour la modélisation des fissures, notamment quand la singularité est connue et relativement facile à implémenter. Ceci est le cas lorsque la fissuration se produit dans un matériau homogène isotrope. Depuis les travaux introductifs (Moës *et al.*, 1999), plusieurs auteurs ont développé diverses applications numériques en 2D ou en 3D. De plus, des variantes ont été présentées (Béchet *et al.*, 2005), (Laborde *et al.*, 2005). Récemment, on a démontré une estimation d'erreur optimale à propos d'une nouvelle approche *XFEM* en apportant une validation numérique (Chahine *et al.*, 2006) (Chahine *et al.*, 2007b). Cependant, dans des situations comme le cas d'une *fissure interfaciale* (fissure située à l'interface entre deux matériaux différents), la singularité peut être très compliquée et la méthode *XFEM* devient très coûteuse (Sukumar *et al.*, 2004).

Ces dernières années, des travaux menés dans des contextes différents ont consisté à adjoindre à la base éléments finis des fonctions obtenues par le calcul ; citons (Strouboulis *et al.*, 2003) dans le cadre de la méthode des *éléments finis généralisés GFEM*, ou bien (Maday *et al.*, 2002) pour la méthode de la *base réduite*. Dans le présent travail, on exploite l'idée en enrichissant les éléments finis sur un maillage donné par des *solutions pré-calculées* sur un maillage raffiné. Ces fonctions numériques d'enrichissement sont obtenues une fois pour toutes et sont utilisées dans l'enrichissement à la place de la singularité exacte. Le but de cette stratégie est de réduire le temps de calcul quand l'implémentation de la singularité est coûteuse, ou bien tout simplement de pouvoir être utilisée quand on ignore l'expression de la singularité exacte. On établit une propriété de convergence *optimale* sous une certaine condition impliquant le pas du maillage du pré-calcul et celui du problème éléments finis complet. Ce résultat théorique est illustré numériquement.

2. La méthode de la base réduite

Soit Ω un *domaine fissuré* du plan, la fissure Γ_C étant supposée rectiligne et débouchante pour simplifier ; x^* désignera la pointe de la fissure. On sait que la solution exacte u du problème de l'élasticité linéaire isotrope formulé sur un tel domaine fissuré s'exprime comme la somme d'un champ régulier dans Ω et d'un champ singulier u^* au voisinage de x^* de la forme :

$$u^* = K_I u_I + K_{II} u_{II}. \quad [1]$$

On a noté u_I et u_{II} les modes *I* et *II*, les constantes K_I et K_{II} désignant les facteurs d'intensité de contrainte du problème (Lemaitre *et al.*, 1985) (Grisvard, 1992).

On considère une méthode d'éléments finis indépendante de la fissure, c'est-à-dire définie à partir d'une triangulation régulière du domaine *non* fissuré $\bar{\Omega}$ (l'adhérence de Ω). On supposera le domaine polygonal pour simplifier. On note φ_i ($i = 1, \dots, N$)

la base des fonctions éléments finis (à valeurs) vectorielles de degré donné. Le déplacement approché est alors cherché sous la forme :

$$u_h = \sum_{1 \leq i \leq N} a_i \varphi_i + \sum_{j \in I_H} b_j H \varphi_j + \sum_{k \in K} c_k w_k \chi \quad [2]$$

où h est le paramètre de la triangulation et les a_i, b_j, c_k sont des scalaires.

Dans cette expression, la discontinuité du déplacement le long de la fissure est traitée selon la méthode *XFEM* classique, c'est-à-dire en utilisant une fonction de type Heaviside H et prenant pour partition de l'unité locale (au voisinage de la fissure) les fonctions de base éléments finis dont le support est entièrement coupé par la fissure. Pour approcher la singularité du déplacement solution en fond de fissure, on dispose d'un jeu de fonctions données vectorielles w_k ($k \in K$) et d'une fonction de localisation χ égale à 1 au voisinage du fond de fissure et nulle au loin.

La méthode *XFEM* avec zone d'enrichissement fixe consiste à enrichir toute une région autour du fond de fissure x^* indépendante du maillage, disons pour fixer les idées la boule $B(x^*, R)$ de rayon R indépendant du pas h (Béchet *et al.*, 2005) (Laborde *et al.*, 2005). L'ensemble $\{w_k : k \in K\}$ dans [2] est alors constitué des fonctions dont les composantes sont égales à

$$F_j \psi_i, j = 1, \dots, 4, i \in I_F(R). \quad [3]$$

On a noté F_1, \dots, F_4 les fonctions scalaires qui engendrent la singularité exacte u^* (Moës *et al.*, 1999). Les $\psi_i, i \in I_F(R)$, désignent les fonctions de base éléments finis linéaires (scalaires) associées aux noeuds dans $B(x^*, R)$. Pour obtenir la forme [2], la fonction χ peut être prise telle que $\chi = \sum_{i \in I_F(R)} \psi_i$, autrement dit elle est continue affine par morceaux, égale à 1 sur les triangles dans $B(x^*, R)$ et à zéro sur les triangles à l'extérieur.

Compte-tenu de la forme de la singularité exacte [1], on peut aussi envisager une solution de la forme [2] dans laquelle la partie singulière s'écrit

$$u_{h'}^* = (c_1 w_1 + c_2 w_2) \chi \quad [4]$$

avec deux fonctions d'enrichissement singulier w_1 et w_2 définies respectivement comme les solutions éléments finis du problème en mode *I* ou *II* pré-calculées sur un maillage raffiné de pas h' (Figure 2).

Considérons maintenant un milieu constitué de deux matériaux collés et présentant une fissure à l'interface entre ces deux matériaux (Dupeux, 2004). Le nombre de fonctions qui engendrent la singularité en fond de fissure pour le bi-matériau augmente significativement par rapport au cas homogène, voir (Grisvard, 1992) pour le cas où l'un des matériaux est rigide et l'autre élastique. Dans (Sukumar *et al.*, 2004), la méthode *XFEM* a été implémentée avec toutes les singularités de la fissure interfaciale et se révèle très coûteuse. Si l'on reprend l'idée précédente, on peut aussi considérer un enrichissement singulier de la forme [4] où cette fois-ci les fonctions w_1 et w_2 correspondent à un pré-calcul sur le bi-matériau. Cette stratégie que nous étudions dans

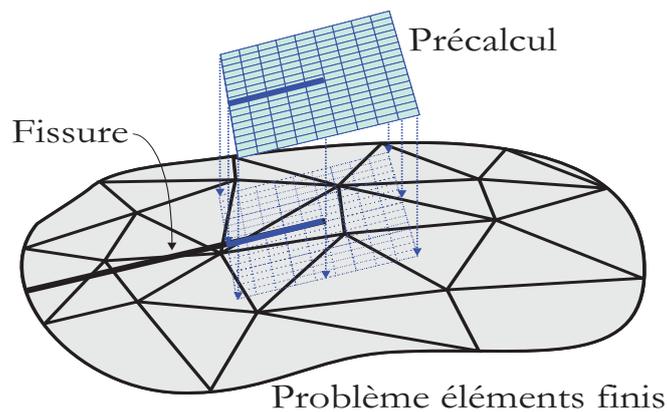


Figure 1. Enrichissement en fond de fissure par une solution éléments finis pré-calculée sur un maillage raffiné

la suite réduit significativement le nombre de fonctions d'enrichissement dans le cas de la fissure interfaciale. Naturellement, on pourrait envisager un jeu plus important de pré-calculs.

3. Une estimation d'erreur

Le problème de l'élasticité plane linéaire isotrope sur le *domaine fissuré* Ω s'écrit

$$u \in V, \quad a(u, v) = L(v) \quad \forall v \in V, \quad [5]$$

dans l'espace des déplacements admissibles :

$$V = \{v : v \in \mathbf{H}^1(\Omega), v = 0 \text{ on } \Gamma_D\}$$

où $a(u, v)$ et $L(v)$ désignent respectivement la forme bilinéaire de l'élasticité et la forme linéaire des efforts extérieurs. Les espaces fonctionnels pour les fonctions à valeurs vectorielles sont écrits en caractères gras : $\mathbf{H}^s(\Omega) = H^s(\Omega; \mathbf{R}^2)$.

On sait qu'il existe un unique déplacement u solution de [5] sous les hypothèses classiques de l'élasticité linéaire. Si les données vérifient des conditions supplémentaires de régularité, la solution u se décompose en la somme d'un champ u^* dans $\mathbf{H}^{3/2-\epsilon}(\Omega)$ ($\epsilon > 0$) de la forme [1] et d'une partie régulière (Grisvard, 1992) :

$$u - u^* \in \mathbf{H}^{2+\epsilon}(\Omega). \quad [6]$$

Avec les notations de la section précédente, le problème discret s'écrit

$$u_h \in V_h, \quad a(u_h, v_h) = L(v_h) \quad \forall v_h \in V_h, \quad [7]$$

où V_h est l'espace vectoriel des champs de déplacement de la forme [2] [4] :

$$v_h = \sum_{1 \leq i \leq N} a_i \varphi_i + \sum_{j \in I_H} b_j H \varphi_j + (c_1 w_1 + c_2 w_2) \chi. \quad [8]$$

La fonction cutoff χ est telle que $\chi(x) = \chi_0(|x - x^*|)$ où χ_0 est une fonction C^2 satisfaisant (les paramètres R_0 et R_1 étant donnés tels que $0 < R_0 < R_1$) :

$$\chi_0(r) = 1 \text{ si } r < R_0, 0 < \chi_0(r) < 1 \text{ si } R_0 < r < R_1, \chi_0(r) = 0 \text{ si } R_1 > r.$$

Les fonctions d'enrichissement pré-calculées w_1 et w_2 doivent vérifier une certaine condition d'indépendance entre elles exprimée dans l'espace engendré par les modes u_I et u_{II} exacts. Alors, sous l'hypothèse de régularité [6] et pour des éléments finis linéaires, on montre alors l'estimation d'erreur suivante :

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch + C' (h')^{1/2} \quad [9]$$

où C et C' sont des constantes indépendantes du pas h du maillage actuel et du paramètre de discrétisation h' du pré-calcul (Chahine *et al.*, 2007a).

En particulier, si $h' \leq C(h)^2$, alors $\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C h$, ce qui représente l'optimalité (à comparer avec la vitesse de convergence de $1/2$ pour une méthode d'éléments finis classique de degré un sur un milieu fissuré).

4. Résultats numériques

Pour une validation numérique de la méthode, on considère le cas-test suivant : on se propose de résoudre le problème d'élasticité linéaire sur un domaine carré fissuré $\Omega =]-0.5, 0.5[\times]-0.5, 0.5[\setminus \Gamma_C$, où Γ_C représente la fissure située tout au long du segment $[-0.5; 0]$. Le matériau considéré est homogène isotrope et l'on impose la solution exacte du mode I de fissuration comme condition de Dirichlet non homogène au bord.

On dispose d'un pré-calcul sur un maillage raffiné en fond de fissure. Il est utilisé pour enrichir la base éléments finis classique du problème actuel dans le cadre de la méthode XFEM avec base réduite . La singularité pour ce type de problème est connue, d'où le choix de ce cas-test pour pouvoir comparer les résultats avec ceux de quelques variantes en Figure 2.

D'autres tests numériques sont à l'étude (Chahine *et al.*, 2007a)

5. Bibliographie

Béchet E., Minnebo H., Moës N., Burgardt B., « Improved implementation and robustness study of the X-FEM for stress analysis around cracks. », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 64, p. 1033-1056, 2005.

Chahine E., Laborde P., Pommier J., Renard Y. *En préparation*, 2007a.

Chahine E., Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., « Study of some optimal XFEM type methods », *ECCOMAS Thematic Conference on Meshless and Meshfree Methods, in press*, 2007b.

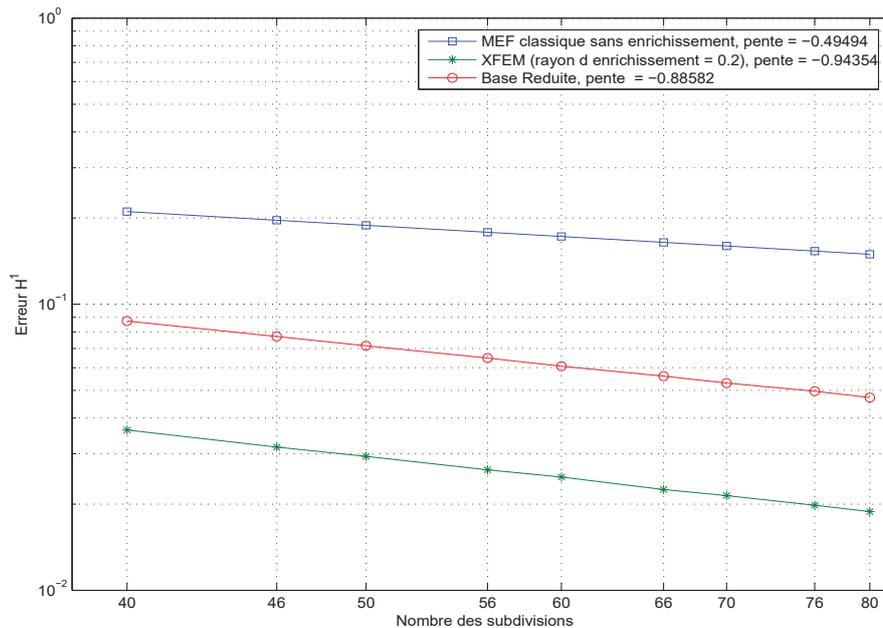


Figure 2. Comparaison en fonction de $1/h$ des erreurs en norme de l'énergie entre XFEM avec enrichissement pré-calculé, les éléments finis sans enrichissement singulier et XFEM avec enrichissement classique sur une zone fixe (échelles logarithmiques).

Chahine E., Laborde P., Renard Y., « A quasi-optimal convergence result for fracture mechanics with XFEM », *C. R. Math. Acad. Sci., Paris*, vol. 342, p. 527-532, 2006.

Dupeux M., « Mesure des énergies de rupture interfaciale : problématique et exemples de résultats d'essais de gonflement-décollement », *Mécanique et Industries*, vol. 5, p. 441-450, 2004.

Grisvard P., *Singularities in boundary value problems*, Editions Masson, Paris, 1992.

Laborde P., Pommier J., Renard Y., Salaün M., « High Order Extended Finite Element Method For Cracked Domains », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 64, p. 354-381, 2005.

Lemaitre J., Chaboche J.-L., *Mécanique des matériaux solides*, Dunod, Paris, 1985.

Maday Y., Ronquist E., « A reduced-basis element method. », *J. Sci. Comput.*, vol. 17, n° 1-4, p. 447-459, 2002.

Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing. », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 46, p. 131-150, 1999.

Strouboulis T., Zhang L., Babuka I., « Generalized finite element method using mesh-based handbooks : application to problems in domains with many voids », *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, n° 28-30, p. 3109-3161, 2003.

Sukumar N., Huang Z., Prévost J.-H., Suo. Z., « Partition of unity enrichment for bimaterial interface cracks », *Int. J. Numer. Meth. Engng.*, vol. 59, p. 1075-1102, 2004.