



**HAL**  
open science

## Réduction de la sensibilité au bruit pour l'identification de facteurs d'intensité des contraintes

Julien Réthoré, François Hild, Stéphane Roux

► **To cite this version:**

Julien Réthoré, François Hild, Stéphane Roux. Réduction de la sensibilité au bruit pour l'identification de facteurs d'intensité des contraintes : Utilisation de données provenant de mesures de champs cinématiques. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495632

**HAL Id: hal-01495632**

**<https://hal.science/hal-01495632>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Réduction de la sensibilité au bruit pour l'identification de facteurs d'intensité des contraintes

## Utilisation de données provenant de mesures de champs cinématiques

**Julien Réthoré — François Hild — Stéphane Roux**

*LMT-Cachan (ENS Cachan/CNRS-UMR 8535/Université Paris 6)*

*61 avenue du Président Wilson*

*F-94235 Cachan Cedex, France*

*{rethore,hild,roux}@lmt.ens-cachan.fr*

---

*RÉSUMÉ. L'étude de la propagation des fissures, quelle que soit la nature de la sollicitation qui la provoque (fatigue, dynamique, thermique...), nécessite l'identification de facteurs d'intensité des contraintes. Une technique d'extraction des facteurs d'intensité des contraintes à partir de mesures de champs cinématiques est présentée. Elle repose sur la méthode d'intégrale d'interaction pour laquelle on propose un champ d'extension virtuelle de fissure optimal du point de vue de la sensibilité à l'incertitude de mesure.*

*ABSTRACT. Stress intensity factor identification is a key point in Fracture Mechanics. A noise robust interaction integral is proposed to extract the stress intensity factors from full displacement field measurements.*

*MOTS-CLÉS : identification, mesure de champs cinématiques, facteur d'intensité des contraintes, intégrale d'interaction.*

*KEYWORDS: identification, full field measurement, stress intensity factors, interaction integral.*

---

## 1. Introduction

L'étude de la propagation de fissure, quelle que soit la nature de la sollicitation qui la provoque (fatigue, dynamique, thermique...), nécessite l'identification des facteurs d'intensité des contraintes. D'autre part, la ténacité, communément notée  $K_c$ , désigne la résistance à la propagation de fissures dans un matériau. Cette quantité peut être déclinée selon le mode de la fracture, mais pour beaucoup de matériaux fragiles seul le mode I compte, soit  $K_c = K_{Ic}$ . Cette quantité est difficile à identifier. En effet,  $K_{Ic}$  est la valeur limite à rupture du facteur d'intensité des contraintes  $K_I$  défini par

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} \sqrt{2\pi r} \sigma_{22}(\theta = 0)$$

où  $\sigma_{22}$  désigne la contrainte normale perpendiculaire au front (rectiligne) de fissure, et  $(r, \theta)$  le repère cylindrique local par rapport à la pointe de la fissure. La mesure directe de  $K_I$  à partir de cette définition semble des plus ardues.

Les techniques de mesure de champs sont aujourd'hui capables de fournir une grande quantité d'informations. Elles sont donc des outils intéressants pour l'identification en mécanique de la rupture. De plus, les méthodes des moindres carrés, par exemple, permettent de mesurer les facteurs d'intensité des contraintes en minimisant l'écart entre les champs mesurés et une solution asymptotique (voir par exemple (McNeill *et al.*, 1987)). L'intégrale d'interaction est une technique alternative permettant d'extraire les facteurs d'intensité des contraintes d'un champ de déplacement. Généralement utilisée dans le cadre de la simulation numérique (Suo *et al.*, 1992, Goz *et al.*, 1997), elle a aussi été utilisée pour l'identification des facteurs d'intensité des contraintes à partir de mesure de champs de déplacement par corrélation d'images numériques (Réthoré *et al.*, 2005).

Les intérêts de cette technique sont l'indépendance théorique par rapport au domaine d'intégration et l'absence de conditions sur la taille du domaine vis-à-vis de la zone de  $K$ -dominance. Néanmoins, l'intégrale d'interaction ne fait intervenir que les gradients d'un champ de déplacement dont la mesure est entachée d'une incertitude. Par conséquent, on s'attend à une sensibilité au bruit élevée de la mesure des facteurs d'intensité des contraintes par cette technique.

L'idée proposée est d'exploiter le fait que le champ d'extension virtuelle soit peu contraint afin de réduire la sensibilité aux incertitudes de mesure. On montre, en développant une formulation discrétisée de l'intégrale d'interaction, que la variance de la perturbation des facteurs d'intensité des contraintes est une forme quadratique du champ d'extension virtuelle discrétisé. Il est alors possible de déterminer numériquement le champ d'extension virtuelle minimisant l'influence du bruit de mesure sur l'identification des facteurs d'intensité des contraintes. On illustre ensuite les performances de la méthode sur un exemple.

## 2. Intégrale d'interaction

L'intégrale d'interaction  $I^{int}$  [1] fait intervenir les champs mesurés  $\mathbf{u}, \sigma$ , des champs auxiliaires  $\mathbf{u}^a, \sigma^a$  et un champ d'extension virtuelle  $\mathbf{q}$

$$I^{int} = - \int_{\Omega} [\sigma_{ml}^a u_{m,l} \delta_{kj} - (\sigma_{ij}^a u_{i,k} + \sigma_{ij} u_{i,k}^a)] q_{k,j} \, d\Omega \quad [1]$$

Les champs auxiliaires seront les champs asymptotiques en pointe de fissure pour le mode  $I$  ou le mode  $II$ . Dans ces conditions, les facteurs d'intensité des contraintes sont ensuite obtenus en ré-écrivant la relation d'Irwin pour le problème à deux champs

$$I^{int} = \frac{2}{E} (K_I K_I^a + K_{II} K_{II}^a) \quad [2]$$

En choisissant  $K_I^a = 1$  et  $K_{II}^a = 0$ , respectivement  $K_I^a = 0$  et  $K_{II}^a = 1$ , on peut calculer  $K_I$ , respectivement  $K_{II}$ , à partir de  $I^{int}$ . Le champ d'extension virtuelle doit satisfaire les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \mathbf{q} \cdot \mathbf{n}_{\Gamma} &= 0 && \text{sur } \Gamma \\ \mathbf{q} &= \mathbf{x} && \text{au front de fissure} \\ \mathbf{q} &= \mathbf{0} && \text{sur } \partial\Omega \end{aligned} \quad [3]$$

où  $\Gamma$  est le support géométrique de la fissure et  $\mathbf{n}_{\Gamma}$  la normale à ce support.

Ce champ d'extension virtuelle est donc peu contraint et on propose d'exploiter cette liberté afin de minimiser l'influence des incertitudes de mesure affectant le champ de déplacement.

## 3. Formulation discrétisée

La détermination du champ d'extension virtuelle optimal est faite numériquement ce qui implique l'utilisation d'un schéma de discrétisation. Pour le champ  $\mathbf{q}$ , on utilisera des fonctions de forme éléments finis d'ordre 1 sur le maillage grâce auquel on a obtenu le champ de déplacement

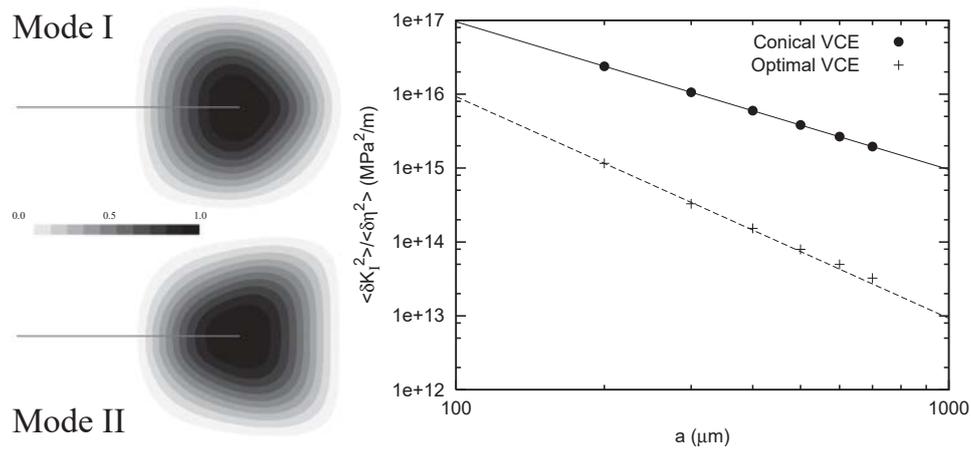
$$\mathbf{q} = \Psi_{\mathbf{q}} \mathbf{Q} \quad ; \quad \mathbf{u} = \Psi_{\mathbf{u}} \mathbf{U} \quad [4]$$

En notation matrice/vecteur, les vecteurs  $\Psi$  contiennent les fonctions de discrétisation et  $\mathbf{U}, \mathbf{Q}$  les valeurs des degrés de liberté correspondant à ces fonctions. En introduisant ces définitions dans  $I^{int}$ , on obtient une expression générique du facteur d'intensité des contraintes en mode  $I$  ou  $II$

$$K = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{U} \quad [5]$$

où  $K$  et  $\mathbf{M}$  sont calculés en mode  $I$  ou en mode  $II$  en choisissant le champ auxiliaire correspondant

$$\mathbf{M} = -\frac{E}{2} \int_{\Omega} \nabla \Psi_{\mathbf{q}}^T [\sigma^a : \nabla \Psi_{\mathbf{u}} \mathbf{I} - (\sigma^a \nabla \Psi_{\mathbf{u}} + (\mathbf{D} \nabla^s \Psi_{\mathbf{u}}) \nabla \mathbf{u}^a)] \, d\Omega \quad [6]$$



**Figure 1.** Champ d'extension virtuelle optimal pour le mode I et le mode II. Illustration de la sensibilité au bruit des facteurs d'intensité des contraintes.

#### 4. Sensibilité aux incertitudes de mesure

Supposons que le champs de déplacement mesuré soit affecté d'une perturbation  $\eta$  caractérisée par sa moyenne et sa variance

$$\langle \eta \rangle = \mathbf{0} \quad ; \quad \langle \eta^2 \rangle = \mathbf{I} \eta^2 \quad [7]$$

Ceci correspond aux propriétés d'un bruit blanc décorrélé ( $\mathbf{I}$  est la matrice identité). On peut alors calculer la perturbation affectant  $K$  en utilisant l'équation [5]. Celle-ci a les caractéristiques suivantes

$$\langle \delta K \rangle = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \langle \eta \rangle = 0 \quad ; \quad \langle \delta K^2 \rangle = \mathbf{Q}^T \mathbf{M} \mathbf{M}^T \mathbf{Q} \eta^2 \quad [8]$$

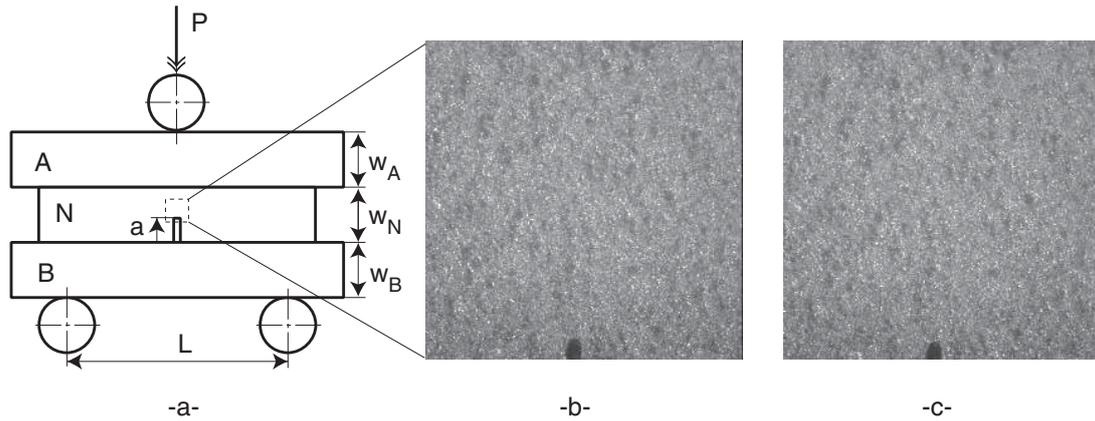
On montre que la variance de la perturbation des facteurs d'intensité des contraintes à partir d'un bruit blanc décorrélé est une forme quadratique du champ d'extension virtuelle.

#### 5. Calcul du champ d'extension virtuelle optimal

A partir du résultat du paragraphe précédent, la minimisation de l'influence des incertitudes de mesure conduit à la détermination d'un champ d'extension virtuelle optimal par résolution du système linéaire suivant

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \mathbf{C} \mathbf{M}^T & \mathbf{L}^T \\ \mathbf{L} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{Q} \\ \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q}_p \end{pmatrix} \quad [9]$$

où  $\mathbf{L}, \mathbf{Q}_p$  et  $\lambda$  permettent d'imposer les conditions aux limites [3] à la solution. La figure 1 présente les résultats obtenus pour l'exemple de la figure 2. En comparant les résultats obtenus avec ce champ optimisé par rapport à ceux utilisant un champ



**Figure 2.** Géométrie du dispositif expérimental (a). L'échantillon fragile en Carbone de Silicium (N) est placé entre deux poutres en acier (A et B). On effectue un premier essai afin d'initier une fissure stable. Image initiale (b) et fissurée (c) de la face de l'échantillon. Au milieu du bord bas de l'image on distingue un point noir qui est l'entaille initiale. La taille de l'image est  $1000 \times 1000$  pixels avec un facteur de conversion  $p = 1.85 \mu\text{m}/\text{pixel}$

d'extension virtuelle conique, on constate que la réduction de la sensibilité au bruit varie linéairement en fonction de la taille de  $\Omega$ . On obtient typiquement une réduction d'un facteur 100 pour une taille de domaine de  $600 \mu\text{m}$ .

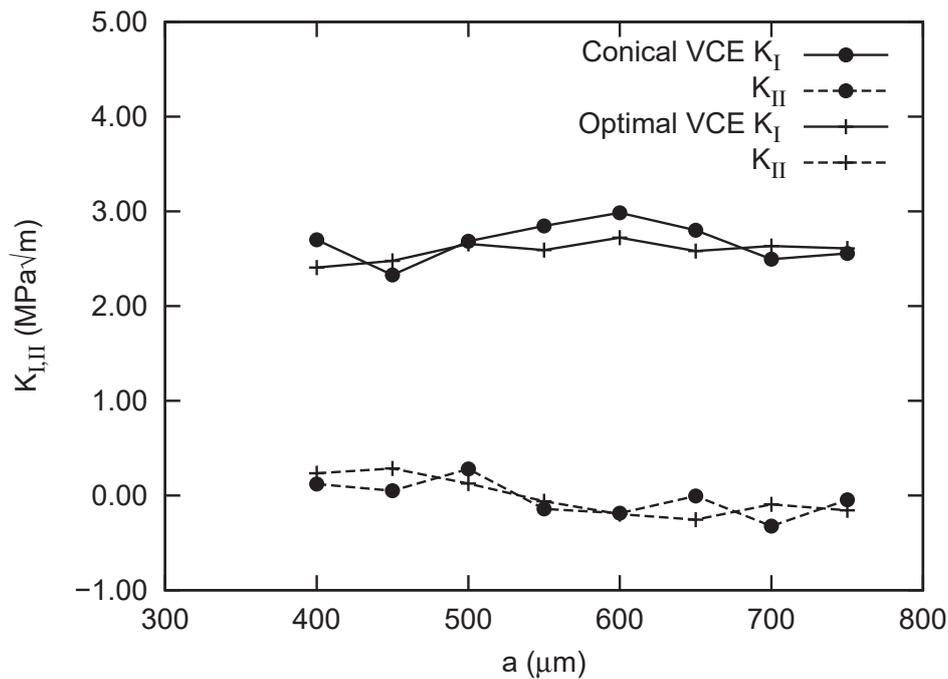
## 6. Détermination des facteurs d'intensité des contraintes

Une fois le champ d'extension virtuelle optimal calculé et le champ de déplacement mesuré (pour plus de détails voir (Roux *et al.*, 2006)), on peut obtenir une estimation des facteurs d'intensité des contraintes à partir de l'équation [5].

Les résultats sont présentés sur la figure 3. On observe une meilleure indépendance par rapport au domaine d'intégration pour le champ d'extension virtuelle optimisé. Les valeurs des facteurs d'intensité des contraintes sont  $2.58 \pm 0.03 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  pour  $K_I$ ,  $-0.03 \pm 0.06 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  pour  $K_{II}$ . Ces valeurs peuvent être comparées à celles obtenues dans (Roux *et al.*, 2006) :  $K_I = 2.3 \pm 0.15 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$  et  $K_{II} = 0.05 \pm 0.05 \text{ MPa}\sqrt{\text{m}}$ .

## 7. Conclusion

Une détermination expérimentale des facteurs d'intensité des contraintes par intégrale d'interaction appliquée à des champs de déplacement a été présentée. Elle réduit significativement la sensibilité au bruit de mesure. Pour une discrétisation donnée, à partir d'un problème de minimisation de l'influence du bruit affectant la mesure du champ de déplacement, un champ d'extension virtuelle optimal est calculé numéri-



**Figure 3.** Facteurs d'intensité des contraintes en mode I et en mode II pour un champ d'extension virtuelle conique et le champ d'extension virtuelle optimal.

quement. En plus de la réduction de la sensibilité au bruit, une meilleure robustesse vis-a-vis de la taille du domaine d'intégration ainsi qu'une plus faible influence de la position pré-supposée de la pointe de la fissure sont obtenues (Réthoré *et al.*, 2006).

## 8. Bibliographie

- Goz M., Dolbow J., Moran B., « Domain integral formulation for stress intensity factor computation along curved three-dimensional interface cracks », *International Journal of Solids and Structures*, vol. 35, n° 15, p. 1763-1783, 1997.
- McNeill S., Peters W., Sutton M., « Estimation of stress intensity factor by digital image correlation », *Engineering Fracture Mechanics*, vol. 28, n° 1, p. 101-112, 1987.
- Réthoré J., Gravouil A., Morestin F., Combescure A., « Estimation of mixed-mode stress intensity factors using digital image correlation and an interaction integral », *International Journal of Fracture*, vol. 132, n° 1, p. 65-79, 2005.
- Réthoré J., Roux S., Hild F., « Noise-robust Stress Intensity Factor Determination from Kinematic Field Measurements », *Engineering Fracture Mechanics*, 2006 soumis.
- Roux S., Hild F., « Stress intensity factor measurement from digital image correlation : post-processing and integrated approaches », *International Journal of Fracture*, vol. 140, n° 1-4, p. 141-157, 2006.
- Suo X., Combescure A., « On the application of the  $\mathcal{G}\theta$  method and its comparison with de Lorenzi's approach », *Nuclear Engineering and Design*, vol. 135, p. 207-224, 1992.