



**HAL**  
open science

## Estimation d'erreur en quantités d'intérêt dans un code de calcul industriel

Josselin Delmas, Patrice Coorevits, Pierre-Bernard Badel, Mohamed Guessasma

► **To cite this version:**

Josselin Delmas, Patrice Coorevits, Pierre-Bernard Badel, Mohamed Guessasma. Estimation d'erreur en quantités d'intérêt dans un code de calcul industriel. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495622

**HAL Id: hal-01495622**

**<https://hal.science/hal-01495622v1>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Estimation d'erreur en quantités d'intérêt dans un code de calcul industriel

## Mise en œuvre et résultats

**Josselin Delmas<sup>\*,\*\*,\*</sup>** — **Patrice Coorevits<sup>\*\*\*</sup>** —  
**Pierre-Bernard Badel<sup>\*,\*\*</sup>** — **Mohamed Guessasma<sup>\*\*\*</sup>**

*\* Laboratoire de Mécanique des Structures Industrielles Durables,  
UMR EDF/CNRS 2832,  
1 avenue du Général de Gaulle, F-92141 Clamart Cedex.*

*\*\* Électricité de France, Direction Recherche & Développement,  
Département Analyses Mécaniques et Acoustiques,  
1 avenue du Général de Gaulle, F-92141 Clamart Cedex.  
{josselin.delmas, pierre.badel}@edf.fr*

*\*\*\* Laboratoire des Technologies Innovantes, EA 3899,  
Université de Picardie Jules Verne,  
48 rue d'Ostende, F-02100 Saint-Quentin.  
{patrice.coorevits, mohamed.guessasma}@u-picardie.fr*

---

*RÉSUMÉ. Des estimateurs d'erreurs locaux dits en quantités d'intérêt permettent d'obtenir directement l'erreur de discrétisation commise sur une quantité ayant un sens physique, dans une zone définie. On construit un tel estimateur à partir de l'erreur sur la solution du problème primal, celle du problème dual et un estimateur d'erreur basé sur les résidus explicites. Des exemples numériques traités par Code\_Aster permettent de valider cet estimateur mais aussi d'illustrer son utilisation sur des structures industrielles.*

*ABSTRACT. Local error estimators known as in quantities of interest enable to obtain directly the error of discretization committed on a quantity with a physical meaning, in a definite zone. Such an estimator is build starting from of the error on the solution of the primal problem, the one of the dual problem and an error estimator based on the explicit residual. Some numerical examples performed by Code\_Aster allow to validate this estimator but also to illustrate its use in industrial cases.*

*MOTS-CLÉS : erreur a posteriori, quantités d'intérêt, méthode des résidus, estimateurs explicites, élasticité linéaire, Code\_Aster, structures industrielles.*

*KEYWORDS: a posteriori error, quantities of interest, residual method, explicit estimators, linear elasticity, Code\_Aster, industrial structures.*

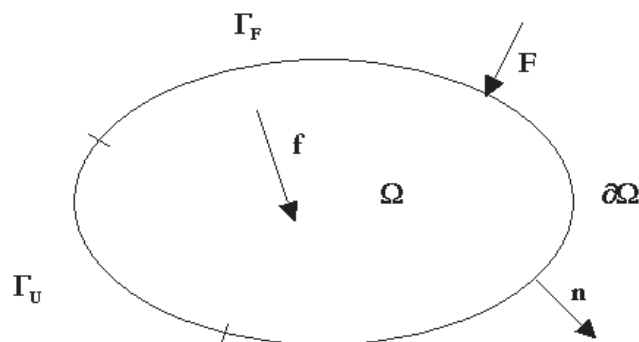
---

## 1. Introduction

Électricité de France développe, pour ses besoins d'ingénierie liée à ses installations nucléaires, un code de calcul de mécanique par éléments finis, *Code\_Aster* (Code\_Aster, 2007). Les besoins d'évaluation des erreurs de discrétisation et d'adaptation de maillages lors des simulations sont importants. Pour les problèmes linéaires, on distingue différentes démarches pour estimer la qualité de la solution éléments finis (Ladevèze, 1975), (Babuska *et al.*, 1978), (Zienkiewicz *et al.*, 1987). Elles conduisent toutes à l'estimation d'une erreur globale (norme  $L^2$ ,  $H^1$  ou semi- $H^1$  ou encore norme en énergie du déplacement). Le choix d'une précision globale fondée sur une norme du déplacement est souvent délicat car il n'y a pas de lien direct quantitatif avec une erreur sur des quantités mécaniques locales (contraintes sur une ligne ou sur une surface, maximum des contraintes, etc.). Pour y remédier, des estimateurs d'erreurs locaux dits en quantités d'intérêt, permettant d'accéder directement à l'erreur commise sur une quantité mécanique précise, ont été développés et implémentés dans *Code\_Aster*. On présente des tests numériques en 2D et 3D permettant de valider cet estimateur ainsi qu'une application à une étude industrielle.

## 2. Problème modèle et notations

On considère un solide qui occupe un domaine  $\Omega \in \mathcal{R}^3$  de frontière régulière  $\partial\Omega$  de normale sortante  $\mathbf{n}$ . Le contour est l'union de deux parties disjointes  $\Gamma_U$  et  $\Gamma_F$ . Sur le contour  $\Gamma_U$  on impose un déplacement  $u_d$  et sur le contour  $\Gamma_F$ , une densité d'effort surfacique  $F$ . Le solide est élastique linéaire et isotrope, sa loi de comportement est donnée par  $\sigma = C\varepsilon$ , où  $C$  est le tenseur de Hooke et  $\varepsilon$  la partie symétrique du gradient de  $u$ .



**Figure 1.** *Problème d'élasticité linéaire.*

Soient  $a(\cdot, \cdot)$  une forme bilinéaire et  $l(\cdot)$  une forme linéaire. La formulation variationnelle de ce problème d'élasticité est donnée par :

$$a(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \quad [1]$$

La norme en énergie et la norme  $L^2$  associée à l'espace  $V$  sont respectivement définies de la manière suivante :

$$\|v\|_e^2 = \int_{\Omega} \sigma(v) : \varepsilon(v) dv \quad \text{et} \quad \|v\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} v \cdot v dv \quad [2]$$

Soit  $\Omega_h$  une partition de  $\Omega$  en  $N$  éléments. On construit un espace éléments finis  $V^h \subset V$  à partir de fonctions continues, polynomiales par morceaux, et de degré  $p$  sur chaque élément  $E$ . Le problème discrétisé s'écrit de la manière suivante :

$$a(u^h, v^h) = l(v^h) \quad \forall v^h \in V^h \quad [3]$$

### 3. Estimateurs d'erreur basés sur les résidus d'équilibre

Dans la méthode des éléments finis, l'approximation principale porte sur les équations d'équilibre. Ces défauts d'équilibre sont représentés par les résidus qui mesurent la non-vérification de certaines propriétés des équations du problème. Le résidu global, noté  $R_h^u(v) = l(v) - a(u^h, v)$ , est constitué du résidu intérieur (noté  $r_E$ , il mesure la non vérification des équations d'équilibre intérieur) et du résidu de bord (noté  $t_{\Gamma}$ , il représente la non vérification de l'équilibre de bord). Enfin on montre qu'une estimation de l'erreur, définie par  $e = u - u^h$  où  $e \in V$ , dans la norme en énergie s'écrit

$$\|e\|_e^2 \leq C \left( \sum_E h_E^2 \|r_E\|_{L^2(E)}^2 + \sum_E \left( \frac{1}{2} \sum_{\Gamma \in \Gamma_f} l_{\Gamma} \|t_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \sum_{\Gamma \in \Gamma_f} l_{\Gamma} \|t_{\Gamma}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) \right) \quad [4]$$

où  $C$  est une constante qui dépend du type d'élément et des données du problème,  $E$  est l'élément courant et  $h_E$  et  $l_{\Gamma}$  sont des longueurs caractéristiques de l'élément.

### 4. Erreur en quantité d'intérêt

Le principal objectif de l'estimation d'erreur *a posteriori* est d'évaluer une mesure de l'erreur telle que la norme en énergie par exemple. Mais bien souvent il est difficile de trouver un lien entre cette mesure et une quantité ayant un sens physique, appelée quantité d'intérêt. Cette quantité d'intérêt peut être représentée par une fonctionnelle  $Q(\cdot)$  linéaire définie sur l'espace des fonctions tests. Deux exemples sont présentés ; ces fonctionnelles linéaires représentent la moyenne d'une composante du déplacement et la moyenne d'une composante des contraintes sur un sous-domaine (zone d'intérêt) :

$$Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} v_x d\Omega \quad Q(v) = \frac{1}{|\omega|} \int_{\omega} \sigma_{xx} d\Omega \quad [5]$$

On définit le problème dual comme le problème d'élasticité linéaire dont la solution  $\omega$  est appelée fonction d'influence et dont  $Q(\cdot)$  est le chargement. Le problème primal et le problème dual peuvent s'écrire de la manière suivante :

$$\begin{cases} a(u, v) = l(v) \\ a(v, \omega) = Q(v) \end{cases} \quad \forall v \in V \quad [6]$$

On définit l'erreur primale telle que  $e = u - u_h$  et l'erreur duale telle que  $\varepsilon = \omega - \omega_h$ . On montre (Prudhomme *et al.*, 1999) que l'on peut trouver une relation entre l'erreur primale, l'erreur duale et le résidu du problème primal. Ceci fournit une expression pour l'erreur en quantité d'intérêt :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) \quad [7]$$

Il existe différentes stratégies pour l'estimation d'erreur en quantité d'intérêt basée sur la norme en énergie. En considérant l'expression précédente et le théorème de Cauchy-Schwartz, on montre que l'erreur en quantité d'intérêt est bornée par la norme en énergie de l'erreur primale pondérée par la norme en énergie de l'erreur duale. En général, ce genre d'estimateur d'erreur est trop pessimiste et surestime l'erreur. Pour accéder à des bornes plus fines, la relation du parallélogramme a été introduite (Prudhomme *et al.*, 1999) :

$$Q(e) = a(e, \varepsilon) = \frac{1}{4} \|s e + s^{-1} \varepsilon\|_e^2 - \frac{1}{4} \|s e - s^{-1} \varepsilon\|_e^2 \quad [8]$$

où  $s$  est un scalaire choisi tel que  $s = \sqrt{\frac{\|\varepsilon\|_e}{\|e\|_e}}$

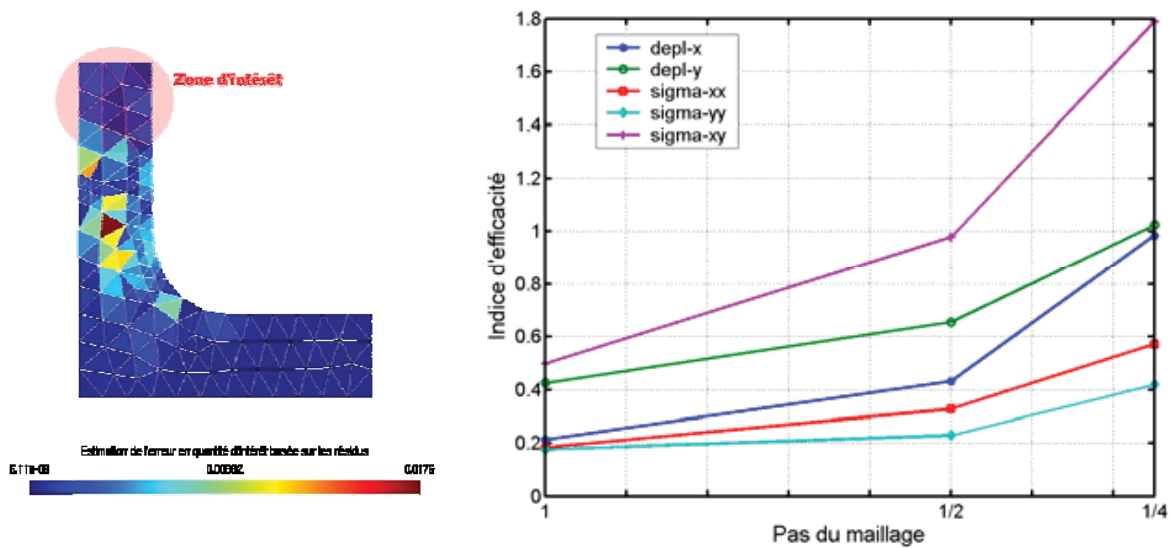
Un estimateur basé sur la relation précédente et sur la méthode des résidus explicite a été implémenté dans *Code\_Aster*, permettant ainsi d'accéder à une estimation de l'erreur en quantité d'intérêt.

## 5. Validation de l'estimateur en quantité d'intérêt

Pour juger de la qualité d'un estimateur, on calcule un indice d'efficacité  $\gamma$  qui caractérise un bon estimateur d'erreur s'il est proche de un. L'indice d'efficacité est défini comme le rapport entre l'erreur estimée et l'erreur vraie (obtenue par une approximation éléments finis sur un maillage très fin) :

$$\gamma = \frac{e_{estimée}}{e_{vraie}} \quad [9]$$

De tels calculs ont été effectués sur un croisillon en traction bi-directionnelle pour les quantités d'intérêt « composante du déplacement » et « composante des contraintes », fournissant des résultats satisfaisants.



**Figure 2a et 2b.** Carte d'erreur pour la quantité d'intérêt « moyenne de la composante  $u_x$  du déplacement » après un raffinement (à gauche) et quelques résultats d'indice d'efficacité pour différentes quantités d'intérêt en 2D (à droite).

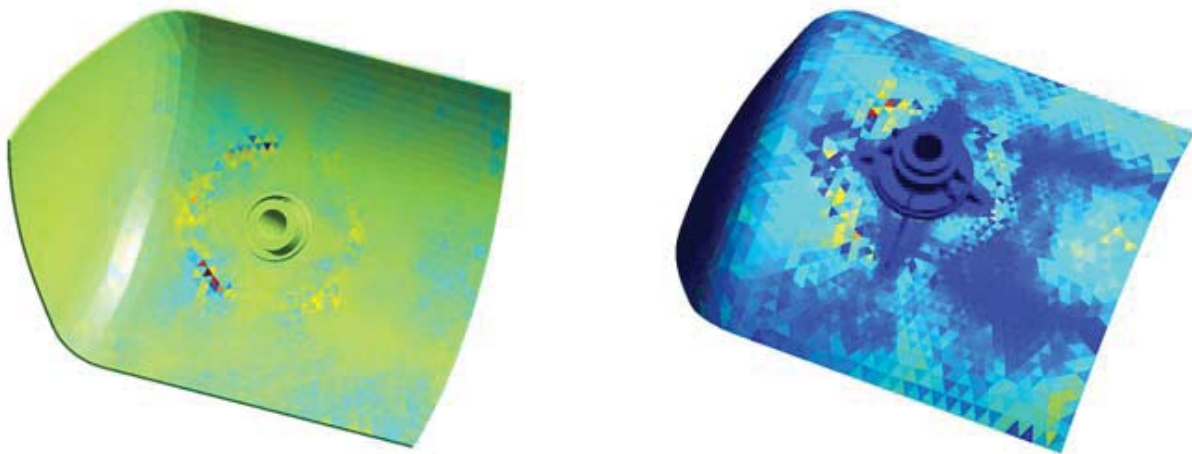
## 6. Application à une étude industrielle

Un exemple de l'utilisation d'estimateurs d'erreurs en quantités d'intérêt sur une étude industrielle permet d'illustrer les développements réalisés dans *Code\_Aster*.



**Figure 3a et 3b.** C.A.O. d'un douzième du caisson à bornes (à gauche) et détail de la borne de sortie (à droite).

Il s'agit d'un caisson de sortie de bornes d'alternateur dont on veut connaître le comportement en terme de contraintes équivalentes.



**Figure 4a et 4b.** Cartes d'erreur pour la quantité d'intérêt « moyenne de la composante  $\sigma_{xx}$  des contraintes » (à gauche) et valeur absolue de l'erreur pour la même quantité d'intérêt (à droite).

## 7. Conclusions et perspectives

Un estimateur d'erreur local dit en quantités d'intérêt a été implémenté dans *Code\_Aster*. Les bonnes performances de cette approche ont été montrées par le calcul d'indices d'efficacité en 2D et en 3D. Enfin on montre les résultats obtenus lors d'une étude sur une structure industrielle.

Une étude de tels estimateurs en présence de singularité est envisagée ainsi que leur utilisation dans un processus de remaillage.

## 8. Bibliographie

- Babuska I., Rheinboldt W.C., « A posteriori error estimates for the finite element method », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 12, 1978, p. 1597-1659.
- Becker B., Rannacher R., « An optimal control approach a posteriori error estimation in finite element methods », *Acta Numerica*, vol. 19, 2001, p. 1-102.
- Code\_Aster, « Site officiel de Code\_Aster », [www.code-aster.org](http://www.code-aster.org), 2007.
- Ladevèze P., Comparaison de modèles de milieux continus, Thèse d'Etat, Université Pierre et Marie Curie, France, 1975.
- Prudhomme S., Oden J.T., « On goal-oriented error estimation for elliptic problems : Application to the control of pointwise errors », *Comput. Methods Appl. Mech. Eng.*, vol. 176, 1999, p. 313-331.
- Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z., « A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 24, 1987, p. 334-357.