

## X-FEM en dynamique explicite

Thomas Menouillard, Nicolas Moes, Alain Combescure

### ▶ To cite this version:

Thomas Menouillard, Nicolas Moes, Alain Combescure. X-FEM en dynamique explicite : Obtention d'un pas de temps critique optimal par une diagonalisation appropriée de la matrice des masses. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495617

## HAL Id: hal-01495617 https://hal.science/hal-01495617

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers. L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# **X-FEM en dynamique explicite**

## Obtention d'un pas de temps critique optimal par une diagonalisation appropriée de la matrice des masses

Thomas Menouillard<sup>\*,\*\*</sup> — Nicolas Moës<sup>\*\*\*</sup> — Alain Combescure<sup>\*</sup>

\* LaMCoS, INSA-Lyon, CNRS UMR5259, Bât. J. d'Alembert, 20 avenue Albert Einstein, 69621 Villeurbanne Cedex Thomas.Menouillard@insa-lyon.fr

\*\* CEA Saclay, DEN / DM2S / SEMT / DYN, 91191 Gif-sur-Yvette Cedex \*\*\* GEM, Ecole Centrale Nantes, CNRS UMR6183, 1 rue de la Noë, 44321 Nantes

RÉSUMÉ. Ce papier traite de la simulation numérique de propagation dynamique de fissure dans le cas particulier de calcul explicite, et appliquée à la méhode des éléments finis étendus. L'intérêt de cette méthode est le non-remaillage. Effectivement, la fissure se propage dans le maillage invariant. Seulement certains éléments, coupés par la fissure, peuvent avoir des pas de temps critiques de calcul presque nuls. Pour s'affranchir de ces cas pénalisant le calcul, la méthode de diagonalisation de matrice de masse va permettre d'obtenir le même pas de temps critique que le cas sans fissure : l'introduction d'une fissure et sa propagation ne modifie pas le pas de temps critique de la structure. Au final, on a dans certains cas  $\Delta t_c^{XFEM} = \Delta t_c^{FEM}$ .

ABSTRACT. This paper presents numerical crack propagations in case of explicit dynamics, and applied to eXtended Finite Element Method. The interest of this method is non remeshing. Hence the crack propagates through the constant mesh. Only some elements cut by the crack can have critical time step close to zero. To avoid this case, the lumping technique of mass matrix will allow to obtain the same critical time step than the case without crack: a crack and its propagation do not modify the critical time step of the whole structure. To conclude, we have  $\Delta t_c^{XFEM} = \Delta t_c^{FEM}$  for some elements.

MOTS-CLÉS : X-FEM, dynamique explicite, matrice de masse diagonalisée, partition de l'unité. KEYWORDS: X-FEM, explicit dynamics, lumped mass matrix, partition of unity method.

#### 1. Introduction

La méthode X-FEM basée sur la partition de l'unité (Babuka *et al.*, 1997), permet de modéliser la présence d'une discontinuité sans tenir compte du maillage de la structure (Moës *et al.*, 1999). Le calcul de l'évolution et de la propagation de la discontinuité est mené sur une discrétisation indépendante de celle du calcul de structure. Les deux discrétisations sont cependant reliées : les contraintes calculées sur la structures fissurées régissent l'évolution de la discontinuité et inversement l'évolution de la discontinuité affecte celle des contraintes, déformations et variables cinématiques. Le chemin de la fissure est *a priori* inconnu. Il est possible qu'une fissure coupe certains éléments en passant très près d'un noeud : dans ce cas l'élément sera coupé en deux parties, l'une étant très petite de masse quasi nulle. Si aucune précaution n'est prise, les degrés de liberté discontinus associés auront une masse quasi nulle : si la raideur n'évolue pas de la même manière le pas de temps d'un calcul en dynamique explicite tendra vers zéro.

Ce papier présente les résultats récents de recherche concernant les pas de temps critiques pour la méthode des éléments finis étendus en dynamique explicite, et plus particulièrement concernant les éléments triangle et tetraèdre en utilisant deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse qui garantissent pour ces éléments un pas de temps de stabilité au moins égal à la moitié du pas de temps critique de l'élément standard non enrichi, voire même égal.

#### 2. Dynamique explicite avec X-FEM

L'objectif ici est d'étudier les pas de temps critiques de différents éléments finis enrichis, en utilisant deux méthodes de diagonalisation de matrice de masse. Ces études montrerons les intérêts des deux méthodes de lumping proposées ci-après.

#### 2.1. Élément monodimensionnel fissuré

La base de fonctions de forme utilisée classiquement avec la méthode X-FEM est composée de la base des fonctions standards  $(f_I, f_{II})$  et de la base des fonctions enrichies  $(f_{I'}, f_{II'})$ . La figure 1 illustre ces fonctions sur l'élément monodimensionnel enrichi. D'autre part, le référence (Hansbo *et al.*, 2004) montre que l'on peut aussi bien utiliser la base suivante  $(f_1, f_{1'}, f_2, f_{2'})$  illustrée par la figure 2. Autrement dit, on peut discrétiser le déplacement aussi bien dans une base que dans l'autre ; le déplacement u peut s'écrire de deux manières :

$$u = u_I f_I + u_{I'} f_{I'} + u_{II} f_{II} + u_{II'} f_{II'}$$
[1]

$$u = u_1 f_1 + u_{1'} f_{1'} + u_2 f_2 + u_{2'} f_{2'}$$
[2]



**Figure 1.** Fonctions de forme classiques  $(f_I, f_{II})$  et enrichies  $(f_{I'}, f_{II'})$  pour un élément monodimensionnel fissuré.



**Figure 2.** Base de fonctions tronquées pour un élément monodimensionnel fissuré. Cette base est équivalente à celle de la figure 1.

D'après (Rozycki *et al.*, to appear), la matrice de masse lumpée est dans le cas d'un élément monodimensionnel :

$$\mathbb{M}_{1,2',2,1'} = \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} \epsilon & 0 & 0 & 0\\ 0 & \epsilon & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 - \epsilon & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 - \epsilon \end{pmatrix}$$
[3]

Remarquons que cette matrice de masse dans la base standard (I, I', II, II') s'écrit :

$$\mathbb{M}_{I,I',II,II'} = \frac{\rho SL}{2} \begin{pmatrix} 1 & 2\epsilon - 1 & 0 & 0\\ 2\epsilon - 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\epsilon - 1\\ 0 & 0 & 2\epsilon - 1 & 1 \end{pmatrix}$$
[4]

Quant à la matrice de raideur, elle est explicitée dans (Menouillard et al., 2006).

A partir des matrices de masse et de raideur, on peut déterminer le pas de temps critique. Pour un schéma explicite le pas de temps critique est défini par  $2/\omega_{max}$  où  $\omega_{max}$  est la plus grande valeur de  $\omega$  solution de :

$$det\left(\mathbb{K}_{1,1',2,2'} - \omega^2 \mathbb{M}_{1,1',2,2'}\right) = 0$$
[5]

$$\epsilon^2 \left(1-\epsilon\right)^2 det \left(\mathbb{K}_{I,II}^{FEM} - \omega^2 \mathbb{M}_{I,II}^{FEM}\right) = 0$$
[6]

On trouve donc le pas de temps critique du problème éléments finis :  $\Delta t_c^{FEM} = L\sqrt{\frac{\rho}{E}}$ .

#### 4 L'objet. Volume $8 - n^{\circ} 2/2005$

En fait, cette méthode de diagonalisation dans la base (1, 1', 2, 2'), permet d'obtenir une matrice de masse diagonale par bloc dans la base standard (I, I', II, II'); cette matrice ne dépend que de la fraction de coupure  $\epsilon$ .

Il faut néanmoins vérifier que la matrice permet effectivement de conserver l'énergie cinétique. On considère à présent un élément de masse  $m = \rho SL$ , où S est sa section, L sa longueur et  $\rho$  sa masse volumique. Considérons ensuite les deux mouvements de corps rigide suivants : premier mouvement de corps rigide à vitesse V(comme s'il n'y avait pas de fissure), et second mouvement de corps rigide dont chaque partie s'éloigne l'une de l'autre à vitesse V. Le premier vecteur vitesse discrétisé est donc (dans la base d'Hansbo (1, 1', 2, 2')) :  $[U] = [V, V, V, V]^T$ , et le second est  $[U] = [V, -V, -V, V]^T$ . Dans les deux cas de mouvement, l'énergie cinétique de l'élément est :

$$E_{dis} = \frac{1}{2}[U].\mathbb{M}_{1,1',2,2'}.[U] = \frac{1}{2}mV^2 = E_c$$
[7]

On peut constater que le pas de temps critique d'un élément enrichi est le même que le pas de temps du même élément non enrichi en utilisant une matrice masse diagonale par bloc. Pourrait-on étendre ce résultat aux éléments 2D et 3D?

#### 2.2. Les éléments triangle et tétraèdre

D'abord, nous nous interessons dans cette partie à un élément triangulaire enrichi. Les fonctions de forme standard sont notées  $f_I$ ,  $f_{II}$ ,  $f_{III}$ , et les fonctions enrichies  $f_{I'}$ ,  $f_{III'}$ ,  $f_{III'}$ ,  $f_{III'}$ . Ainsi on utilisera la base standard  $(f_I, f_{I'}, f_{II}, f_{III}, f_{III}, f_{III'})$  et la base d'Hansbo ici est  $(f_1, f_{1'}, f_2, f_{2'}, f_3, f_{3'})$ . La figure 3 présente l'élément coupé par la discontinuité. Les relations entre les fonctions de forme d'Hansbo et standards sont :

$$\forall (i,j) \in \{(I,1), (II,2), (III,3)\} \begin{cases} f_i = f_j + f_{j'} \\ f_{i'} = H(x_i) (f_j - f_{j'}) \end{cases}$$
[8]

où H(.) indique le signe de la fonction d'Heaviside aux différents noeuds  $x_I$ ,  $x_{II}$  et  $x_{III}$ .

Enfin, pour les éléments triangle et tétraèdre (on obtient les mêmes résultats), la figure 3 montre que la matrice de masse diagonale par bloc permet d'obtenir, avec des éléments enrichis aussi, le même pas de temps critique que le problème éléments finis équivalent. Quant à la matrice de masse diagonale, elle permet seulement de minimiser le pas de temps critique de l'élément enrichi à un peu plus de la moitié du pas de temps critique de l'élément finis standard. Ici, le gain de pas de temps critique se paie par l'évaluation de la fraction  $\epsilon$  et de l'inversion d'une matrice de masse diagonale par bloc. Le tableau 1 présente les différents résultats précédents de calcul de pas de temps pour les éléments poutre, triangle et tétraèdre standard et enrichis, en utilisant les 2 matrices de masse : diagonale et diagonale par bloc.



**Figure 3.** Élément triangulaire fissuré, et son pas de temps critique normalisé par rapport à l'élément fini standard en fonction de la fraction de coupure  $\epsilon$ .

Élément	$\Delta t_c^{FEM}$		$\Delta t_c^{XFEM}$ normalisé par $\Delta t_c^{FEMlump}$	
	${f M}$ standard	M diagonal	M diagonal par bloc	M diagonal
Poutre	0.577	1	1	$>\sqrt{2}/2$
Triangle	0,2819	0,5638	1	$>\sqrt{2}/2$
Tetraèdre	0,1919	0,4071	1	$>\sqrt{2}/2$

**Tableau 1.** Tableau présentant les pas de temps critiques pour différents éléments : standards et enrichis (Module d'Young E = 1, longueur L = 1, masse volumique  $\rho = 1$ , coefficient de Poisson  $\nu = 0, 3$ ).

#### 3. Applications numériques

Le problème du CCS est décrit sur la figure 4. Les propriétés matériau sont celles du PMMA : E = 5.76 GPa,  $\nu = 0.42$ ,  $\rho = 1,180 kgm^{-3}$ . La force  $P_1(t)$  est dûe à un impact de vitesse  $V_0 = 20ms^{-1}$ . L'éprouvette est supposée avoir un comportement linéaire élastique. Bien que la géométrie soit symétrique, la déformation et le trajet de fissure ne le sont pas. Ceci est dû à un chargement et des conditions limites non symétriques (Rittel *et al.*, 1996). Les calculs de validations ont pu être effectués sur ce cas test.

#### 4. Conclusion

Les deux méthodes proposées sont intéressantes : la première (Menouillard *et al.,* 2006), car elle utilise une matrice masse contante et diagonale, mais le pas de temps



**Figure 4.** *Modélisation du CCS : conditions limites et géométrie (épaisseur de l'éprouvette : 16.5mm), et maillage déformé (avec des éléments triangulaires)* 

critique est divisé par au plus  $\sqrt{2}$ ; la seconde (Rozycki *et al.*, to appear), car elle permet d'envisager des calculs de propagation de fissure avec un pas de temps égal au pas de temps critique du problème éléments finis sans fissure pour les éléments de type triangle ou tétraèdre linéaire : l'ajout d'une fissure et sa propagation (par la méthode X-FEM) ne modifient pas le pas de temps de calcul.

#### 5. Bibliographie

- Babuka I., Melenk I., « Partition of unity method », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 40, n° 4, p. 727-758, 1997.
- Hansbo A., Hansbo P., « A finite element method for the simulation of strong and weak discontinuities in solid mechanics », *Computer Methods In Applied Mechanics And Engineering*, vol. 193, p. 3523-3540, 2004.
- Menouillard T., Réthoré J., Combescure A., Bung H., « Efficient explicit time stepping for the eXtended Finite Element Method (X-FEM) », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 68, p. 911-939, 2006.
- Moës N., Dolbow J., Belytschko T., « A finite element method for crack growth without remeshing », *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 46, p. 131-150, 1999.
- Rittel D., Maigre H., « A study of mixed-mode dynamic crack initiation in PMMA », *Mechanics Research Communications*, vol. 23, p. 475-481, 1996.
- Rozycki P., Moës N., Béchet E., Dubois C., « Explicit direct integration using X-FEM to simulate structural dynamics », *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, to appear.