



**HAL**  
open science

## Identification locale des paramètres d'un modèle élastoplastique à l'aide d'une méthode variationnelle

Félix Latourte, André Chrysochoos, Stéphane Pagano, Bertrand Wattrisse

### ► To cite this version:

Félix Latourte, André Chrysochoos, Stéphane Pagano, Bertrand Wattrisse. Identification locale des paramètres d'un modèle élastoplastique à l'aide d'une méthode variationnelle. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495599

**HAL Id: hal-01495599**

**<https://hal.science/hal-01495599>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

---

# Identification locale des paramètres d'un modèle élastoplastique à l'aide d'une méthode variationnelle

**Félix Latourte — André Chrysochoos — Stéphane Pagano — Bertrand Wattrisse**

*Laboratoire de Mécanique et Génie Civil (CNRS - UMII)  
cc048 Place Eugène Bataillon  
F-34095 Montpellier cedex 5  
latourte@lmgc.univ-montp2.fr*

---

*RÉSUMÉ. Dans ce papier, nous présentons l'application d'une méthode variationnelle à l'identification de distributions de propriétés matérielles. Cette méthode, basée sur l'écart en relation de comportement, a été précédemment utilisée par Geymonat et al. (Geymonat et al., 2002), dans le cadre d'un comportement élastique linéaire. Dans ce qui suit, cette méthode a été étendue à une classe de comportements élastoplastiques à écrouissage cinématique linéaire. Elle permet d'identifier localement 5 paramètres à partir de mesures surfaciques de déplacement lors d'un essai unique. Après un bref exposé du principe de la méthode nous présentons sa mise en oeuvre numérique puis un exemple d'application.*

*ABSTRACT. A variational method applied to the identification of distributed material properties is here introduced. This method, established on the constitutive equation gap, has been previously applied by Geymonat et al. (Geymonat et al., 2002) to the identification of elastic parameters. Now extended to a class of elastoplastic behaviour, with linear kinematic hardening, it allows identifying locally 5 parameters from displacement fields obtained during a single test. First, we will present some theoretical notions relative to this identification, and some aspects of the numerical method associated. Then, the possibilities of the method will be presented towards results obtained with a numerical simulation.*

*MOTS-CLÉS : identification, élastoplasticité, mesures de champs.*

*KEYWORDS: identification, elastoplasticity, field measurements.*

---

## 1. Introduction

Lors d'essais mécaniques traditionnels (traction simple, torsion pure...), l'expérimentateur assimile la réponse de la "partie utile" de l'éprouvette à celle du matériau. Mais des imperfections du dispositif expérimental, du matériau ou encore de la géométrie de l'éprouvette peuvent avoir pour conséquence une réponse hétérogène de cette partie utile. Afin de tenir compte de ces phénomènes, les essais mécaniques sont de plus en plus souvent couplés à des techniques de mesure de champs locaux (déformation, vitesse de déformation, température...). La méthode présentée dans cet article est basée sur l'exploitation de champs de déplacement, obtenus dans un cadre expérimental par corrélation d'images numériques (Wattrisse *et al.*, 2001). Ces mesures locales reflètent mieux le comportement du matériau et de ce fait elles peuvent être utilisées pour identifier certaines de ses propriétés mécaniques. Dans cet article nous nous intéressons à une méthode variationnelle, inspirée par l'identification de conductivités électriques par Kohn & McKenney (Kohn *et al.*, 1990). Cette méthode a ensuite été adaptée à l'identification de modules élastiques à partir de données au bord (Constantinescu, 1994), avant d'être utilisée en élasticité (Geymonat *et al.*, 2002) pour traiter le problème de l'identification à partir de mesures de champs. D'autres méthodes ont été mises en place pour résoudre ce type de problème, comme la méthode des champs virtuels (Grédiac *et al.*, 2002), le recalage par élément finis (Meuwissen *et al.*, 1998), ou encore l'écart à l'équilibre (Claire *et al.*, 2003). Nous nous intéressons ici à l'identification d'un comportement élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire dans le cas des petites perturbations, sous l'hypothèse des contraintes planes. L'algorithme de résolution est présenté dans ce qui suit. Cette présentation est suivie d'une application numérique qui a pour but d'illustrer la faisabilité de la procédure d'identification.

## 2. Utilisation de l'erreur en comportement pour traiter le problème d'identification

De façon générale, les mesures de surface dont nous disposons ne permettent pas d'identifier des propriétés matérielles locales dans un volume. Pour cette raison, nous nous restreignons à des situations simples où l'hypothèse des contraintes planes semble réaliste. La mesure locale de trois composantes de la déformation nous permet alors de déterminer trois coefficients matériau indépendants pour chaque incrément de déformation. Dans ce qui suit nous présentons le cadre choisi pour formuler et résoudre ce problème d'identification dans le cadre d'un comportement élastoplastique.

### 2.1. Définition d'une fonctionnelle élastoplastique

Pour plusieurs pas de chargements successifs, le champ de déplacement  $\mathbf{u}^*$  est mesuré sur le domaine  $\Omega$ , les résultantes globales  $\mathbf{R}_i$  sont connues sur les bords  $\Gamma_i$ . Les bords libres  $\Gamma_j$  sont tels que  $\Gamma_i \cup \Gamma_j = \partial\Omega$  et  $\Gamma_i \cap \Gamma_j = \emptyset$ . Nous allons nous intéresser à deux types de formulation du problème mécanique : une formulation globale, et une

formulation incrémentale. Le problème de l'identification élastique consiste à obtenir le tenseur d'élasticité  $\mathbf{A}$  et la contrainte  $\boldsymbol{\sigma}$  qui satisfassent l'équation d'équilibre (Eq. 1), la relation de comportement (Eq. 2) et l'équilibre global (Eq. 3) pour un pas de chargement pour lequel il n'y a pas d'écrouissage. L'identification plastique consiste à obtenir, lors d'une transformation plastique, le tenseur plastique tangent  $\mathcal{L}$  et l'incrément de contrainte  $\Delta\boldsymbol{\sigma}$  vérifiant les équations (4, 5, 6) de la formulation incrémentale, appliquée sur un incrément plastique :

Formulation globale	Formulation incrémentale
$div \boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad [1]$	$div \Delta\boldsymbol{\sigma} = 0 \quad \text{dans } \Omega \quad [4]$
$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{A} \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega \quad [2]$	$\Delta\boldsymbol{\sigma} = \mathcal{L} \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*) \quad \text{dans } \Omega \quad [5]$
$\begin{cases} \mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad [3]$	$\begin{cases} \Delta\mathbf{R}_i = \int_{\Gamma_i} \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} \, ds, \\ \Delta\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_j. \end{cases} \quad [6]$

Nous associons à la formulation globale la fonctionnelle  $\mathcal{G}$ , et à la formulation incrémentale la fonctionnelle  $\mathcal{F}$  :

$$\mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*))^T : \mathbf{B}^{-1} : (\boldsymbol{\tau} - \mathbf{B} : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)) \, d\Omega, \quad [7]$$

$$\mathcal{F}(\Delta\boldsymbol{\tau}, \mathcal{L}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} (\Delta\boldsymbol{\tau} - \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*))^T : \mathcal{L}^{-1} : (\Delta\boldsymbol{\tau} - \mathcal{L} : \boldsymbol{\varepsilon}(\Delta\mathbf{u}^*)) \, d\Omega, \quad [8]$$

où  $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^*)$  est la déformation associée au déplacement mesuré. Les champs de contrainte  $\boldsymbol{\tau}$  et  $\Delta\boldsymbol{\tau}$  appartiennent respectivement aux espaces  $\Sigma_{adm}$  et  $\Delta\Sigma_{adm}$  :

$$\Sigma_{adm} = \{ \boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant les eqs. 1 et 2} \}, \quad [9]$$

$$\Delta\Sigma_{adm} = \{ \Delta\boldsymbol{\tau} \text{ régulière et symétrique vérifiant les eqs. 4 et 5} \}. \quad [10]$$

Étant en contrainte plane, nous utilisons les notations ingénieur, l'espace des tenseurs de rigidité admissibles est alors défini comme :

$$\xi = \{ \mathbf{B} \in (\mathcal{L}^\infty(\Omega))_{sym}^{3 \times 3} ; B_{ij} \text{ linéaire par morceaux, } \mathbf{B} \text{ défini positif} \}. \quad [11]$$

*Les propositions suivantes pour la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  sont vraies :*

- (i)  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) \geq 0, \forall (\mathbf{B}, \boldsymbol{\tau}) \in \Sigma_{adm} \times \xi.$
- (ii)  $\mathcal{G}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{B}) = 0 \Leftrightarrow (2) \text{ est vraie avec } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\tau} \text{ et } \mathbf{A} = \mathbf{B}.$
- (iii) *La fonctionnelle  $\mathcal{G}$  est convexe sur  $\Sigma_{adm} \times \xi.$*

Ces propositions s'appliquent de la même façon à la fonctionnelle  $\mathcal{F}$ , moyennant une définition similaire des tenseurs plastiques tangents admissibles. Le problème d'identification revient alors à minimiser les fonctionnelles  $\mathcal{F}$  et  $\mathcal{G}$  par rapport à leurs deux arguments. On détaille dans le paragraphe suivant la stratégie numérique mise en place à cet effet.

## 2.2. Résolution numérique

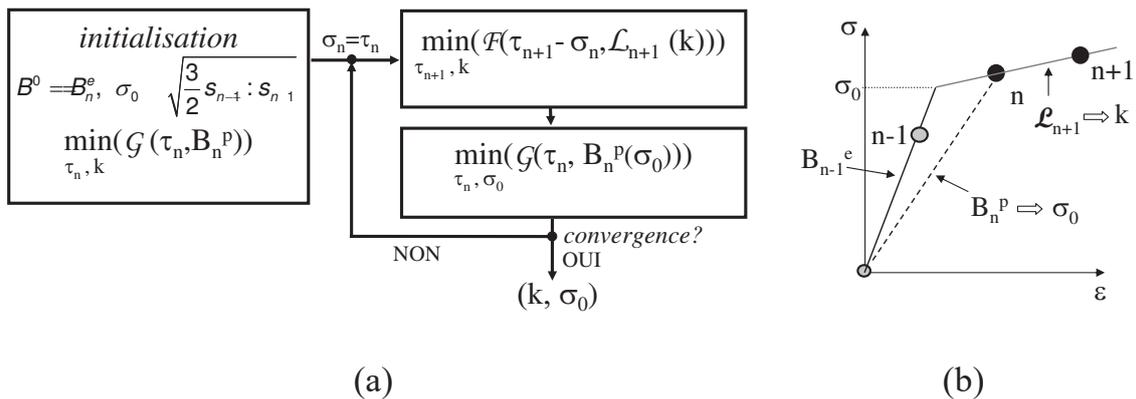
Le modèle élastoplastique fait intervenir 5 coefficients indépendants : 3 paramètres élastiques et 2 plastiques. Pour identifier les paramètres élastiques, la fonctionnelle  $\mathcal{G}$  est minimisée successivement par rapport chacune de ses variables. Pour la première minimisation, le champ de contrainte se doit de respecter l'équation d'équilibre (Eq. 1) et les conditions aux limites (Eq. 3). La deuxième étape est explicite en  $\mathbf{B}$ , et permet d'obtenir, via un calcul direct, les 3 coefficients de l'élasticité.

Sur chaque incrément de chargement, une identification élastique est réalisée, chaque tenseur obtenu est comparé localement au tenseur élastique afin de savoir si la plasticité apparaît localement.

Les deux inconnues plastiques sont le module d'écrouissage  $k$  et la contrainte seuil  $\sigma_0$ . Pour la première étape plastique (i.e. étape  $n$  sur la figure 1b) il est possible d'écrire une formulation sécante du problème. En notant  $\mathbf{A}_e$  le tenseur de rigidité élastique,  $\mathbf{A}_n^p$  le tenseur plastique sécant, et  $\Delta\gamma$  le multiplicateur plastique, nous pouvons écrire (Simo *et al.*, 1998) :

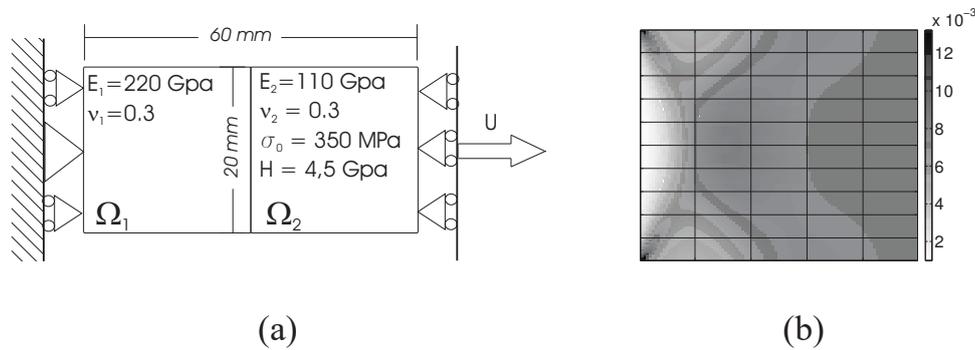
$$\mathbf{A}_n^p = \left[ \mathbf{A}_e^{-1} - \frac{\Delta\gamma(\sigma_0)}{1 + \frac{2}{3}k\Delta\gamma(\sigma_0)} \right]^{-1} \quad [12]$$

En calculant le gradient de  $\mathcal{G}$  par rapport à  $\mathbf{A}_n^p$ , nous obtenons 3 équations scalaires dépendantes, *ce qui rend impossible une identification locale et simultanée de  $k$  et de  $\sigma_0$  à partir de la formulation sécante*. De ce fait, un algorithme particulier pour l'identification des deux paramètres plastiques a été mis en place (cf. figure 1a). Le calcul est itératif et nécessite deux pas de chargement plastiques successifs qui seront notés  $n$  et  $n+1$ . La contrainte  $\sigma_0$  est déterminée par le problème sécant sur le pas  $n$ , le module  $k$  est déterminé par la résolution du problème tangent sur le pas  $n+1$ .



**Figure 1.** Résolution itérative de l'identification de paramètres plastiques, (a) : algorithme et (b) : diagramme  $(\sigma, \epsilon)$ .

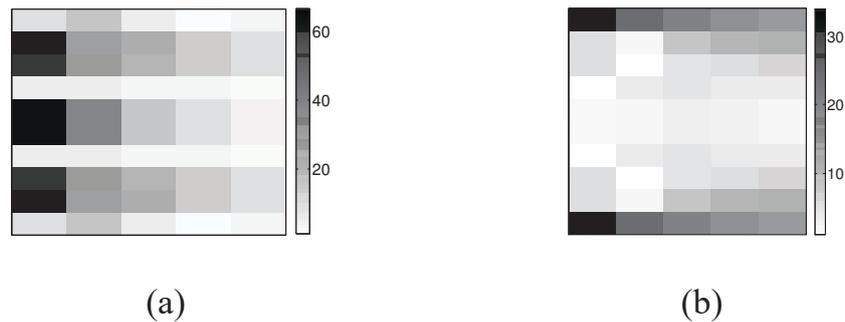
### 3. Identification numérique d'une distribution de paramètres plastiques sur un bi-matériau



**Figure 2.** Présentation de l'essai (a) et déformation plastique équivalente affichée sur  $\Omega_2$  (b).

La simulation d'un essai de traction sur un bi-matériau est réalisée pour les conditions de chargement présentées sur la figure 2a. Ce barreau comporte deux zones matérielles : la zone  $\Omega_1$ , purement élastique et la zone  $\Omega_2$ , de raideur plus faible, élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Cet essai, particulièrement pénalisant, fait apparaître de forts gradients de déformation permettant d'éprouver les performances de la méthode en présence d'hétérogénéités matérielles. Les paramètres du modèle sont identifiés sur  $10 \times 10$  zones matérielles. Dans un premier temps, les données issues d'un calcul par éléments finis 2D (utilisant  $80 \times 30$  éléments Q1) sont transmises à la procédure d'identification qui utilise un maillage contenant  $21 \times 21$  noeuds de déplacement. Nous obtenons à partir de ces données non bruitées une erreur relative sur  $E$  inférieure à 0.5%, et une erreur sur  $\nu$  inférieure à 3%. De plus, cette erreur reste concentrée sur l'interface à proximité des bords libres du barreau où l'on observe une forte concentration de contrainte.

Le barreau ne plastifie pas uniformément sur  $\Omega_2$  comme en atteste le faible niveau de déformation plastique le long de la frontière (cf. figure 2b). L'erreur sur le module d'écrouissage  $H$  est localisée sur cette zone (figure 3a), tandis que l'erreur sur  $\sigma_0$  est maximale aux endroits où les gradients de déformation sont les plus élevés (figure 3b). Ces gradients constituent une source d'erreur importante pour l'identification dans la mesure où le maillage utilisé pour l'identification est plus grossier que celui utilisé pour le calcul direct. Naturellement, les résultats sont nettement améliorés si l'on considère les paramètres de la loi de comportement constants sur chacune des deux zones matérielles.



**Figure 3.** Erreurs relatives (en %) concernant la détermination du module  $H$  (a) et de la contrainte  $\sigma_0$  (b) représentées uniquement sur  $\Omega_2$ .

#### 4. Conclusion

Nous avons présenté une méthode variationnelle d'identification de propriétés mécaniques à partir de données cinématiques. Cette méthode est maintenant étendue à un comportement de type élastoplastique à écrouissage cinématique linéaire. Les résultats obtenus dans le cas d'un barreau constitué de deux matériaux sont encourageants et la méthode est actuellement appliquée sur des données expérimentales.

#### 5. Bibliographie

- Claire D., Roux S., Hild F., « Identification de Conductivités Thermiques et de Propriétés Élastiques Locales Par Analyse de Champs », *Mécanique et Industries*, vol. 4, p. 655-665, 2003.
- Constantinescu A., Sur l'identification des modules élastiques, PhD thesis, Ecole Polytechnique, 1994.
- Geymonat G., Hild F., Pagano S., « Identification of Elastic Parameters by Displacement Field Measurement », *C.R. Mécanique*, vol. 330, p. 403-408, 2002.
- Grédiac M., Toussaint E., Pierron F., « L'identification de Propriétés Mécaniques de Matériaux Avec la Méthode Des Champs Virtuels, Une Alternative Au Recalage Par Éléments Finis », *C.R. Mécanique*, vol. 330, p. 107-112, 2002.
- Kohn R., McKenney A., « Numerical implementation of a variational method for electric impedance tomography », *Inverse Problems*, vol. 6, p. 389-414, 1990.
- Meuwissen M., Oomens C., Baaijens F., Petterson R., Janssen J., « Determination of the elastoplastic properties of aluminium using a mixed numerical-experimental method », *J. of Materials Processing Technology*, vol. 75, p. 204-211, 1998.
- Simo J., Hughes T., *Computational Inelasticity*, Springer-Verlag, 1998.
- Wattrisse B., Chrysochoos A., Muracciolo J.-M., Némot-Gaillard M., « Analysis of Strain localisation during tensile test by digital image correlation », *Journal of Experimental Mechanics*, vol. 41, p. 29-38, 2001.