



**HAL**  
open science

## Modèle d'homogénéisation analytique pour le carton ondulé

Anis Batti, Nabil Talbi, Rezak Ayad, Ying Qiao Guo

► **To cite this version:**

Anis Batti, Nabil Talbi, Rezak Ayad, Ying Qiao Guo. Modèle d'homogénéisation analytique pour le carton ondulé. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495597

**HAL Id: hal-01495597**

**<https://hal.science/hal-01495597>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Modèle d'homogénéisation analytique pour le carton ondulé

Anis. Batti — Nabil. Talbi — Rezak. Ayad — Y.Q. Guo

*Groupe de Mécanique, Matériaux et Structures*

*Université de Reims Champagne-Ardenne, BP1039, F-51687 Reims cedex 2*

*anis.batti@etudiant.univ-reims.fr*

---

*RÉSUMÉ. Un modèle d'homogénéisation analytique pour le carton ondulé est proposé dans cet article. Le carton ondulé 3D est modélisé par une plaque homogénéisée 2D. Ce modèle repose principalement sur la théorie des stratifiés avec prise en compte du cisaillement transversal. Il est ensuite amélioré en utilisant la théorie de sandwich et des théories de poutre. Ce modèle d'homogénéisation est implémenté dans un élément fini de coque à trois nœuds et dix-huit degrés de liberté. La comparaison des résultats obtenus par le présent modèle et par une modélisation 3D détaillée avec le logiciel Abaqus montre la précision et l'efficacité du modèle.*

*ABSTRACT. An analytical homogenisation model for the corrugated cardboard is proposed in this paper. The 3D corrugated cardboard is modelled with a 2D homogenised plate. This model is essentially based on the theory of stratification including the transverse shears. It is then improved using the theory of sandwich and theories of beam. This homogenisation model is implemented into a shell element with three nodes and eighteen degrees of freedom. The comparison of the results obtained by the present model and by a 3D detailed modelling with the Abaqus software shows the accuracy and efficiency of the model.*

*MOTS-CLÉS : Carton ondulé ; Homogénéisation ; Théories des stratifiés et des sandwichs*

*KEYWORDS: Corrugated cardboard; Homogenization; Theories of stratified and sandwich*

---

## 1. Introduction

Les boîtes en carton ondulé prennent une place de plus en plus importante dans le domaine de l'emballage. Il est essentiel de pouvoir modéliser et prédire le comportement mécanique du carton ondulé afin de réaliser une éco-conception et optimisation des emballages. Une bonne modélisation pourrait être une alternative aux essais expérimentaux qui sont à la fois longs et coûteux avant la mise sur le marché d'un nouvel emballage.

Un modèle d'homogénéisation analytique basé sur la théorie des stratifiés a été proposé par Aboura et al. et comparé avec des résultats numériques et

expérimentaux. Buannic a présenté une théorie d'homogénéisation basée sur une méthode d'expansion asymptotique. Une approche par éléments finis a été réalisée par Biancolini afin d'évaluer les coefficients de rigidité mécanique. Carlsson et Nordstrand ont obtenus par une méthode analytique les propriétés mécaniques homogénéisées des plaques sandwichs en carton ondulé et, en particulier, celles concernant les cisaillements transverses. Ils ont aussi étudié le flambage et le post-flambage pour une plaque orthotrope en incluant l'effet du cisaillement transverse.

Nous proposons dans cet article un nouveau modèle d'homogénéisation analytique pour le carton ondulé. La théorie de sandwich est utilisée pour déterminer les rigidités globales des sections perpendiculaires à la direction MD (Machine Direction), la théorie des stratifiés est utilisée pour calculer celles de CD (Cross Direction), des théories de poutre sont utilisées pour améliorer encore le modèle d'homogénéisation car la structure du carton ondulé et son comportement mécanique sont très complexes. Le présent modèle d'homogénéisation est implémenté dans un élément de coque avec la prise en compte de cisaillements transversaux. Les résultats obtenus par notre modèle d'homogénéisation sont comparés à ceux donnés par le logiciel élément fini Abaqus en utilisant une modélisation 3D détaillée des faces et de l'ondulation du carton.

## 2. Aspects théoriques

Certains chercheurs ont proposé des modèles de sandwich en remplaçant la cannelure et les vides entre les deux peaux par une plaque homogène ayant les nouveaux coefficients du matériau. Ces coefficients peuvent être utilisés directement dans les codes commerciaux, mais il est difficile voire impossible de trouver ces coefficients satisfaisant l'équivalence de toutes les rigidités globales (tractions, cisaillements, flexions, torsions, ...). Le présent modèle conduit à une plaque homogène ayant les rigidités globale équivalentes qui lient les déformations généralisées aux efforts internes. Le modèle est plus précis mais nécessite une double implémentation : d'abord dans un élément fini de coque appelé T3γ18 et ensuite dans le code Abaqus via la user's routine UEL.

### 2.1. Transformation de la loi de comportement de la cannelure

La loi de comportement du papier de cannelure est déterminée expérimentalement dans son état initial plan. Dans un carton ondulé, les coefficients du matériau doivent être transformés du repère local 123 au repère global xyz (Fig. 1).

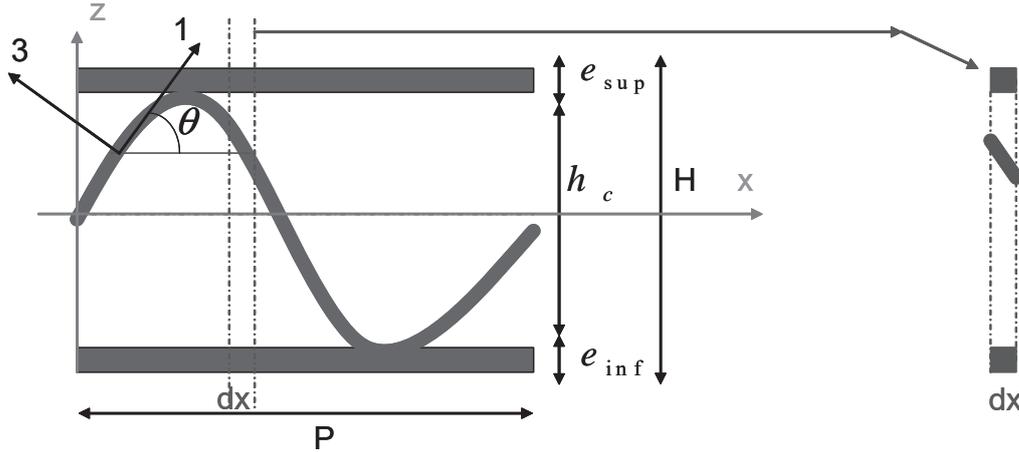
La loi de comportement dans le repère global xyz s'écrit :

$$\{\varepsilon\}_{xyz} = [C]_{xyz} \{\sigma\}_{xyz} \quad ; \quad \{\sigma\}_{123} = [T] \{\sigma\}_{xyz} \quad [1]$$

$$\text{Or } \{\varepsilon\}_{xyz} = [T'] \{\varepsilon\}_{123} = [T'] [C]_{123} \{\sigma\}_{123} \quad [2]$$

où  $[T]$  et  $[T']$  sont les matrices de passage,  $[C]_{123}$  et  $[C]_{xyz}$  matrices de flexibilité.

Ainsi, nous obtenons :  $[C_{xyz}] = [T'] [C_{123}] [T]$  [3]



**Figure 1.** Volume élémentaire représentatif du carton ondulé

## 2.2. Adaptation de la théorie des stratifiés au carton ondulé

Le carton ondulé est composé de trois strates, une peau supérieure, une cannelure sinusoïdale et une peau inférieure. La figure 1 montre un Volume Élémentaire Représentatif (VER) du carton ondulé. Pour chacune tranche  $dx$ , la théorie des stratifiés peut s'appliquer en intégrant les contraintes suivant l'épaisseur ( $z$ ) afin d'obtenir les rigidités globales liant les déformations généralisées et les efforts internes en un point  $x$  donné :

$$\begin{aligned}
 [A(x)] &= [Q^S] e^S + [Q^C] e^C + [Q^I] e^I \\
 [B(x)] &= [Q^S] z^S e^S + [Q^C] z^C e^C + [Q^I] z^I e^I \\
 [D(x)] &= [Q^S] \left( (z^S)^2 e^S + \frac{(e^S)^3}{12} \right) + [Q^C] \left( (z^C)^2 e^C + \frac{(e^C)^3}{12} \right) \\
 &+ [Q^I] \left( (z^I)^2 e^I + \frac{(e^I)^3}{12} \right) \\
 [F(x)] &= ([C^S] e^S + [C^C] e^C + [C^I] e^I) k \quad \text{avec } k=5/6
 \end{aligned}$$
 [4]

où  $[A]$ ,  $[D]$ ,  $[B]$  sont les matrices de rigidité de membrane, de flexion et de leur coulage,  $[F]$  celle de cisaillement ;  $[Q]$  est la matrice d'élasticité pour les contraintes dans le plan,  $[C]$  celle pour les contraintes de cisaillement transversal ;  $e$  et  $z$  sont l'épaisseur et la position des peaux et de la cannelure.

Ensuite, une intégration suivant  $x$  permet d'homogénéiser le carton dans la direction MD (ondulation). Finalement, les rigidités globales homogénéisées sont définies comme suit :

$$\begin{Bmatrix} N \\ M \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B & 0 \\ B & D & 0 \\ 0 & 0 & F \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon^0 \\ k \\ \gamma \end{Bmatrix}$$
 [5]

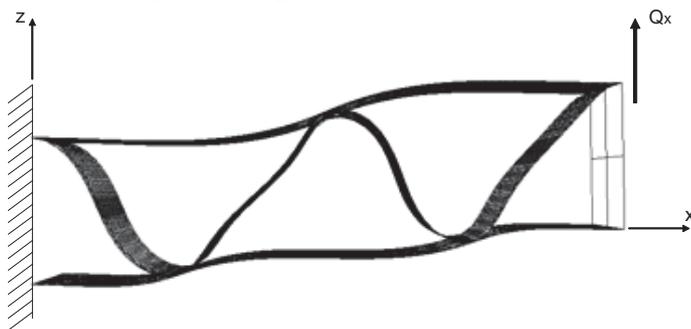
### 2.3. Modèle d'homogénéisation amélioré

En fait, le carton ondulé est plus complexe qu'une plaque laminée à cause de la cannelure et des vides entre les deux peaux. Les rigidités globales obtenues par la théorie des stratifiés nécessitent des améliorations, surtout pour les efforts sur les sections normales à la direction MD.

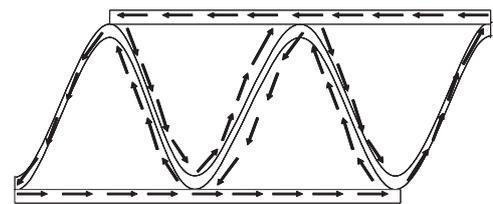
**Effort normal  $N_x$  et moment de flexion  $M_x$  :** Le théorème de Castigliano est utilisé pour calculer analytiquement la rigidité d'une cannelure en traction. La valeur obtenue est négligeable par rapport à celles des peaux. En effet, la cannelure se comporte comme une coque très mince en flexion et donc ne donne quasiment pas la résistance à la traction suivant  $x$ . Cela correspond plutôt à la théorie de sandwich. Le même phénomène est observé dans le cas de flexion  $M_x$ . En conclusion, les rigidités de la cannelure associées à  $N_x$  et  $M_x$  doivent être annulées dans l'Eq. [5].

**Effort tranchant  $Q_x$  :** La théorie des stratifiés donne une rigidité de cisaillement transversal trop grande. En fait, la rigidité de cisaillement du carton n'est pas la somme des rigidités de la cannelure et des peaux, elle dépend plutôt du déplacement transversal dû à la déformation de flexion des 3 strates (Fig. 2). Nordstrand a utilisé la théorie de poutre courbe pour calculer ce déplacement et puis en déduire la rigidité de cisaillement. Cette solution analytique est retenue dans le présent modèle.

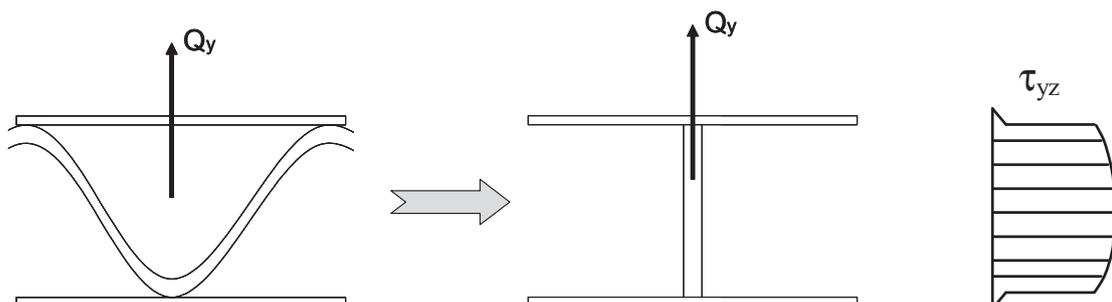
**Effort tranchant  $Q_y$  :** Cette rigidité de cisaillement transversal est égale à la somme des rigidités des 3 strates (Eq. 4) si la distribution de la contrainte tangentielle est constante sur la section. La figure 4 montre l'équivalence des 2 sections sous  $Q_y$  et une distribution parabolique de la contrainte tangentielle. On peut donc ne prendre que la rigidité de cisaillement de la cannelure comme dans le cas d'une poutre à profilé I.



**Figure 2.** Cisaillement transversal  $Q_x$  en torsion



**Figure 3.** Poutre multi-cellules en torsion



**Figure 4.** *Equivalence du carton ondulé et d'une section I sous CT  $Q_x$*

**Moment de torsion  $M_{xy}$  :** La figure 3 montre les flux de contraintes tangentielles sur la section multi-cellulaire d'une poutre en torsion  $M_{xy}$ , les deux flux opposés s'annulent dans les parois de la cannelure sauf celles au bord. Les calculs par la théorie de Bredt basée sur l'analogie de membrane permettent d'obtenir la rigidité de torsion en ne considérant que les deux peaux extérieures.

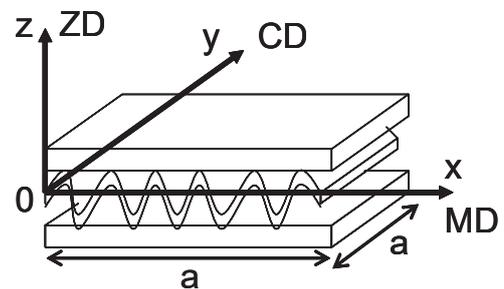
**2.4. Formulation de l'élément coque T3γ18**

Le présent modèle d'homogénéisation est implémenté dans l'élément de coque T3γ18. C'est un élément triangulaire à facette plane ayant trois nœuds et six degrés de liberté par nœud. Il est composé de l'élément de membrane CST (Constant Strain Triangle) et de l'élément de plaque T3γ avec prise en compte du cisaillement transversal, proposé par Hughes et al. et ensuite amélioré par Ayad et al. en utilisant les transformations Jacobiennes simplifiées.

**3. Résultats numériques et validation**

Une plaque en carton ondulé est prise pour valider le présent modèle avec la simulation 3D sur Abaqus. Ses dimensions sont  $120 \times 120 \times 2.87 \text{ mm}^3$  et le pas de la cannelure  $p=6.08 \text{ mm}$ . Pour les peaux supérieure, inférieure et la cannelure, les épaisseurs sont de 0.204, 0.172 et 0.205 mm, les modules d'Young  $E_x=8.37, 10.8$  et 5.42 GPa,  $E_y= 2.89, 2.95$  et 2.14 GPa, les modules de cisaillement sont calculés avec la formule de Baum  $G_{xy}=0.387(E_x E_y)^{1/2}$  et utilisés pour  $G_{xz}$  et  $G_{yz}$ .

Le carton ondulé non homogénéisé est discrétisée en 262835 éléments et 122942 nœuds pour la simulation 3D avec Abaqus, une plaque rigide est fixée sur un côté du carton afin de pouvoir appliquer la sollicitation souhaitée. La plaque homogénéisée est discrétisée en 1024 éléments et 545 nœuds. Les résultats sous différentes sollicitations présentés dans le tableau 2 sont les déplacements (mm).



**Figure 5.** *Repère*

Les résultats du modèle sont en assez bonne corrélation avec les simulations par éléments finis pour la plupart des tests effectués sauf les rigidités de torsion. Si le modèle est validé pour chacun des cas de chargement particuliers testés : la traction, la flexion, le cisaillement,..., alors le modèle sera validé de manière générale. Il est

donc possible de modéliser une structure en carton ondulé 3D par une plaque homogénéisée 2D de manière efficace.

Sollicitations	Efforts internes	Abaqus 3D	Homog.	Erreur
$F_x=1000\text{N}$ en $x=a$	Traction $N_x$	$U=0.292$	$U=0.285$	2.56%
$M_y=1\text{N.m}$ en $x=a$	Flexion pure $M_x$	$W=8.175$	$W=8.142$	0.37%
$F_z=10\text{N}$ en $x=a$	Flexion $M_x$ et CT $Q_x$	$W=6.67$	$W=6.51$	2.44%
$F_y=1000\text{N}$ en $x=a$	Cisaillement Plan $N_{xy}$	$V=2.33$	$V=2.18$	6.47%
$M_x=1\text{N.m}$ en $x=a$	Torsion $M_{xy}$	$W=4.602$	$W=3.740$	18.73%
$F_y=1000\text{N}$ en $y=a$	Traction $N_y$	$V=0.622$	$V=0.600$	3.54%
$M_x=1\text{N.m}$ en $y=a$	Flexion pure $M_y$	$W=21.43$	$W=22.52$	-5.08%
$F_z=10\text{N}$ en $y=a$	Flexion $M_y$ et CT $Q_y$	$W=17.22$	$W=18.00$	-4.53%
$F_x=1000\text{N}$ en $y=a$	Cisaillement Plan $N_{yx}$	$U=3.55$	$U=3.43$	3.38%
$M_y=1\text{N.m}$ en $y=a$	Torsion $M_{yx}$	$W=6.58$	$W=5.35$	18.69%

**Tableau 1.** Déplacements (mm) obtenus par Abaqus et le présent modèle

#### 4. Conclusion

Un modèle d'homogénéisation analytique du carton ondulé et son implémentation numérique ont été proposés. Ce modèle repose sur la théorie des stratifiés suivant  $y$  et sur la théorie des sandwichs suivant  $x$ . Pour les cisaillements transversaux, des améliorations basées sur des théories de poutre courbe ont été apportées et elles ont permis de se rapprocher sensiblement des valeurs d'Abaqus en simulation 3D. Le modèle d'homogénéisation sur la torsion donne des erreurs relativement importantes et cela demande encore des améliorations ; heureusement, le carton ondulé n'est pas destiné à résister à la torsion.

Aboura Z., Talbi N., Allaoui S., Benzeggagh M.L., "Elastic behavior of corrugated cardboard: experiments and modeling", *Composite Structures*, vol.63, 2004, p. 53-62.

Ayad R., Batoz J.L., Dhatt G., Katilli I., "A study of recent triangular elements for thin and thick plates", *New Advances in Computational Structural Mechanics*, 1992, p. 259-271.

Biancolini M.E., "Evaluation of equivalent stiffness properties of corrugated board", *Composite Structures*, vol. 69, 2005, p. 322-328.

Buannic N., Cartraud P., Quesnel T., "Homogenization of corrugated core sandwich panels", *Composite Structures*, vol. 59, 2003, p. 299-312.

Carlsson L.A., Nordstrand T., Westerlind B., "On the elastic stiffness of corrugated core sandwich plate", *J Sandwich Structures and Materials*, vol. 3, 2001, p. 253-267.

Nordstrand T., Carlsson L.A., "Transverse shear stiffness of structural core sandwich", *J Composite Structures*, vol. 27, 1994, p. 317-329.

Hughes T.J.R., Tezduyar T.E., “Finite element based on Mindlin plate theory with particular reference to the four-node Bilinear isoparametric element”, *J. App. Mech.* , vol. 48, 1981, p. 587-596.