



**HAL**  
open science

# Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris de propagation de fissures via des modèles non-locaux d'endommagement

Amor Hanen, Jean-Jacques Marigo

► **To cite this version:**

Amor Hanen, Jean-Jacques Marigo. Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris de propagation de fissures via des modèles non-locaux d'endommagement. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495594

**HAL Id: hal-01495594**

**<https://hal.science/hal-01495594>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Approche variationnelle des lois de Griffith et de Paris de propagation de fissures via des modèles non-locaux d'endommagement

**Amor Hanen\*** — **Jean-Jacques Marigo\*\***

*\*Laboratoire des propriétés Mécaniques et Thermodynamiques des Matériaux  
Université Paris-Nord  
99, avenue Jean-Baptiste Clément  
93430 Villetaneuse (France)  
amor@lpmtm.univ-paris13.fr*

*\*\*Institut Jean le Rond d'Alembert  
Université Pierre et Marie Curie  
4, place Jussieu  
75252 Paris cedex 05 (France)  
marigo@lmm.jussieu.fr*

---

*RÉSUMÉ. A. Jaubert et J.-J. Marigo proposent une nouvelle approche variationnelle de la fatigue basée sur un principe de moindre énergie. On se propose ici de régulariser l'énergie totale du solide (somme de l'énergie potentielle et de l'énergie de surface du solide élastique) par des modèles d'endommagement non-locaux dont on discutera le bien fondé mathématique et numérique. Cette méthode s'applique aussi bien à la rupture fragile qu'à la fatigue.*

*ABSTRACT. A. Jaubert and J.-J. Marigo proposed a new formulation for fatigue based on a principle of least energy. We proposed to regularize the total energy of the body (sum of its elastic energy and its surface energy) by non-local damage models. In this work, a theoretical and numerical analysis is carried out for a bar. This method can be applied to brittle fracture and to fatigue as well.*

*MOTS-CLÉS : approche énergétique, méthode variationnelle, modèles d'endommagement non locaux, fatigue.*

*KEYWORDS: energetic approach, variational method, non-local damage models, fatigue.*

---

## 1. Les modèles variationnels de rupture fragile et de fatigue

Dans (Francfort *et al.*, 1998) G. Francfort et J.-J. Marigo proposent une nouvelle approche variationnelle de la rupture fragile basée sur un principe de moindre énergie. Les fissures apparaissent et se propagent dans un solide élastique de telle façon que l'énergie totale du solide soit minimale à chaque pas de temps du chargement.

### 1.1. Le modèle de rupture fragile

Dans le cas de Griffith, l'énergie totale (somme de l'énergie potentielle et de l'énergie de surface du solide élastique) s'écrit :

$$\mathcal{G}_0(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + G_c H^{n-1}(\Gamma) \quad [1]$$

où  $\varepsilon(u)$  est le tenseur des déformations,  $A_0$  le tenseur de rigidité,  $G_c$  la ténacité et  $H^{n-1}$  la mesure de Hausdorff de dimension  $n - 1$ .

Si cette approche est suffisante pour rendre compte de la rupture sous chargement monotone croissant, elle est en revanche inapte à prédire le phénomène de fatigue.

### 1.2. Le modèle de fatigue

A. Jaubert et J.-J. Marigo proposent dans (Jaubert *et al.*, 2006), une autre formulation variationnelle. Cette dernière est obtenue en conservant un principe de moindre énergie, mais en remplaçant l'énergie de surface de type Griffith par une énergie dépendant du saut de déplacement sur les lèvres de la fissure et en introduisant une condition d'irréversibilité. Par passage à la limite, lorsque la longueur interne du modèle est petite devant les dimensions de la structure, une loi de type Paris est obtenue. En retour, cette loi limite peut s'écrire sous forme variationnelle et cela revient à minimiser l'énergie :

$$\mathcal{F}_0(u, \Gamma) = \int_{\Omega \setminus \Gamma} \frac{1}{2} A_0 \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \Delta T G_c D \left( \frac{1}{\Delta T} H^{n-1}(\Gamma \setminus \Gamma_i) \right) \quad [2]$$

où  $\Gamma_i$  est la fissure créée à la fin du  $i^{\text{ème}}$  cycle et  $\Delta T$  un petit paramètre réel positif. On voit que [2] ne diffère de [1], i.e. de celle de Griffith, que par la fonction  $D$  qui joue le rôle du potentiel de dissipation (fonction positive et convexe de la nouvelle surface de fissuration créée).

## 2. Régularisation par des modèles d'endommagement non-locaux

L'énergie totale est régularisée en utilisant des modèles d'endommagement non-locaux (i.e. ceux dont l'énergie contient des termes avec gradient d'endommagement). Cela consiste à remplacer la surface de discontinuité du champ de déplacement (la fissure) par des zones de petites tailles dans lesquelles le gradient de déplacement est grand (zones endommagées).

### 2.1. Le modèle de rupture fragile régularisé

L'énergie s'écrit alors :

$$\mathcal{G}_\ell(u, \alpha) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) + G_c \frac{w(\alpha)}{\ell} + G_c \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha \right) dx \quad [3]$$

où  $\alpha$  est le champ d'endommagement du solide  $\Omega$ ,  $A(\alpha)$  le tenseur de rigidité affecté par l'endommagement,  $G_c w(\alpha)/\ell$  est la densité volumique d'énergie dissipée et  $\ell$  est un paramètre qui a la dimension d'une longueur. Cette longueur a un intérêt purement numérique si l'on utilise le modèle comme régularisation du problème de rupture [1], mais devient une longueur caractéristique du matériau si on l'utilise comme un authentique modèle d'endommagement.

### 2.2. Le modèle de fatigue régularisé

Dans le cas de la fatigue, par un procédé identique aux précédents, l'énergie régularisée s'écrit alors :

$$\mathcal{F}_\ell(u, \alpha) = \int_{\Omega} \frac{1}{2} A(\alpha) \varepsilon(u) \cdot \varepsilon(u) dx + \Delta T G_c D \left( \frac{\mathcal{S}(\alpha) - \mathcal{S}(\alpha_{i-1})}{\Delta T} \right) \quad [4]$$

où

$$\mathcal{S}(\alpha) = \int_{\Omega} \left( \ell \nabla \alpha \cdot \nabla \alpha + \frac{w(\alpha)}{\ell} \right) dx.$$

### 2.3. Choix des modèles d'endommagement

Par  $\Gamma$ -convergence, il est possible de prouver que, lorsque le paramètre  $\ell$  tend vers 0, le minimum global de la fonctionnelle régularisée [3] converge vers celui de [1] à condition que les fonctions  $A(\alpha)$  et  $w(\alpha)$  vérifient certaines propriétés particulières (cf. (Braides, 1998)). Cependant, ce résultat de convergence ne s'applique pas forcément aux minima locaux et un des objectifs de ce travail est de comparer différents modèles d'endommagement non-locaux. On considère la famille de modèles adoucissants suivant, vérifiant tous les propriétés requises pour la  $\Gamma$ -convergence :

$$\text{Modèles 1 : } \quad A(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^p \quad \text{et} \quad w(\alpha) = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \left(1 - \sqrt{\frac{A(\alpha)}{E_0}}\right), \quad p > 0$$

$$\text{Modèle 2 : } \quad A(\alpha) = E_0(1 - \alpha)^2 \quad \text{et} \quad w(\alpha) = \frac{\alpha^2}{4}$$

La première famille de modèles (indexée par  $p$ ) a été construite de sorte que tous (quel que soit  $p$ ) donnent la même réponse contrainte-déformation. Le deuxième modèle possède un intérêt numérique dont on discutera.

L'étude analytique et numérique qui suit va montrer que ces modèles d'endommagement non-locaux se comportent sensiblement différemment en termes de minima locaux.

### 3. Etude d'une barre en traction

#### 3.1. Le problème d'évolution

On considère une barre  $\Omega = (0, L)$  fixée à une extrémité ( $u(0) = 0$ ) et soumise à un déplacement contrôlé croissant à l'autre extrémité ( $u(L) = \varepsilon L$  avec  $\varepsilon \geq 0$ ), la déformation moyenne imposée  $\varepsilon$  jouant le rôle du temps. L'énergie totale s'écrit

$$\mathcal{G}_\ell(u, \alpha) = \int_0^L \left( \frac{1}{2} A(\alpha) u'^2 + G_c \frac{w(\alpha)}{\ell} + G_c \ell \alpha'^2 \right) dx. \quad [5]$$

Le problème quasistatique d'évolution consiste à chercher à chaque *instant*  $\varepsilon$ , les champs de déplacement  $u \in \mathcal{C}_\varepsilon$  et d'endommagement  $\alpha \in \mathcal{D}$  vérifiant :

$$\mathcal{G}'_\ell(u, \alpha)(v - \dot{u}, \beta - \dot{\alpha}) \geq 0 \quad \forall (v, \beta) \in \mathcal{C}_1 \times \mathcal{D} \quad [6]$$

où le point désigne la dérivée par rapport au "temps"  $\varepsilon$ ,  $\mathcal{G}'_\ell(u, \alpha)(\hat{v}, \hat{\beta})$  désigne la dérivée Gâteaux de  $\mathcal{G}_\ell$  à  $(u, \alpha)$  dans la direction  $(\hat{v}, \hat{\beta})$ .  $\mathcal{C}_\varepsilon$  et  $\mathcal{D}$  désignent respectivement les champs des déplacements cinématiquement admissibles et le cône convexe des endommagements admissibles :

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{v \in H^1(0, L) : v(0) = 0, v(L) = \varepsilon L\} \text{ et } \mathcal{D} = \{\beta \in H^1(0, L) : \beta(x) \geq 0\}.$$

En prenant  $\beta = \dot{\alpha}$  et  $v = \dot{u} + w$  avec  $w \in H^1(0, L)$  dans [6], l'équilibre exige que la contrainte  $\sigma$  soit uniforme dans la barre. En injectant ce résultat dans [6], on obtient la loi d'évolution de  $\alpha$  suivante :

- E1**      **Condition d'irréversibilité**       $\dot{\alpha} \geq 0$
- E2**      **Si  $\dot{\alpha} = 0$  alors**       $\frac{\sigma^2}{2} \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)^2} + G_c \frac{w'(\alpha)}{\ell} - 2G_c \ell \alpha'' \geq 0$
- E3**      **Si  $\dot{\alpha} \neq 0$  alors**       $\frac{\sigma^2}{2} \frac{A'(\alpha)}{A(\alpha)^2} + G_c \frac{w'(\alpha)}{\ell} - 2G_c \ell \alpha'' = 0$
- E4**      **Conditions aux limites**       $\alpha'(0) = 0$  et  $\alpha'(L) = 0$

#### 3.2. Unicité et Stabilité

Le problème d'évolution est mal posé car il peut admettre une infinité de solutions, cf (Benallal *et al.*, 2007). En effet, au début, la réponse est élastique. Puis à un instant  $\varepsilon_c$  tous les points de la barre atteignent le seuil d'endommagement et donc sont susceptibles de s'endommager. A partir de cet instant, on peut envisager différentes solutions comme par exemple la solution uniforme ou encore une solution avec localisation de l'endommagement. On introduit un critère de sélection de solution basé sur la notion de stabilité. Plus précisément, on dira que la barre est stable au temps  $\varepsilon$  dans son état  $(u, \alpha)$  si et seulement si  $(u, \alpha)$  est un minimum local *unilatéral* de l'énergie totale  $\mathcal{G}_\ell$  sur  $\mathcal{C}_\varepsilon \times \mathcal{D}$ , i.e. si on ne peut pas trouver dans un voisinage de  $(u, \alpha)$  un état  $(v, \beta)$

admissible avec  $\beta \geq \alpha$  ayant une énergie plus petite.

D'un point de vue pratique, la stabilité des états homogènes est essentielle pour l'identification expérimentale de la loi de comportement. On se propose donc d'étudier la stabilité de l'état homogène caractérisé par un champ de déplacement linéaire ( $u(x) = \varepsilon x$ ) et un champ d'endommagement uniforme ( $\alpha(x) = \alpha$ ) à l'instant  $\varepsilon$  où le critère d'endommagement est atteint en tout point de la barre :

$$\varepsilon^2 \geq \varepsilon_c^2 = -2G_c \frac{w'(0)}{\ell A'(0)}, \quad \frac{1}{2} A'(\alpha) \varepsilon^2 + G_c \frac{w'(\alpha)}{\ell} = 0. \quad [7]$$

En utilisant l'équilibre de la barre, la dérivée seconde de l'énergie en l'état  $(u, \alpha)$  dans la direction  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  peut s'écrire :

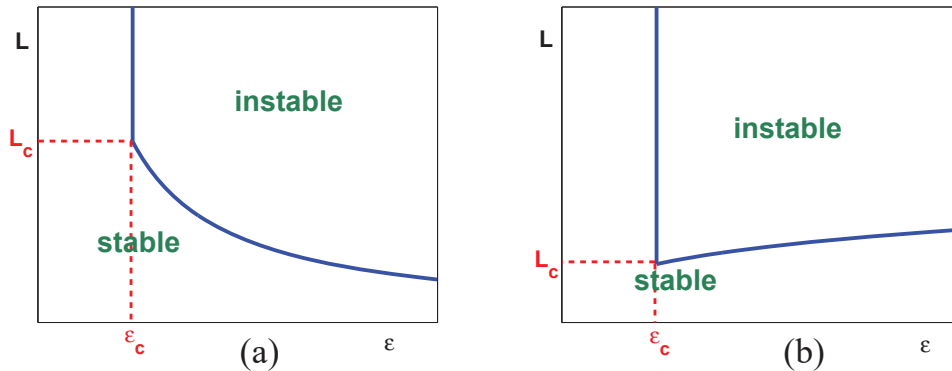
$$\begin{aligned} \mathcal{G}_\ell''(\varepsilon x, \alpha)(v, \beta) &= \int_0^L \left( A(\alpha) v'^2 + \left( \frac{G_c}{\ell} w''(\alpha) + \frac{\varepsilon^2}{2} A''(\alpha) \right) \beta^2 \right) dx \\ &+ \int_0^L (2\varepsilon A'(\alpha) v' \beta + 2G_c \ell \beta'^2) dx. \end{aligned} \quad [8]$$

Cet état est stable si  $\mathcal{G}_\ell''(\varepsilon x, \alpha)(v, \beta) > 0$  pour toute direction  $(v, \beta) \in \mathcal{C}_0 \times \mathcal{D}$  non nulle.

On montre que la stabilité de l'état dépend de la longueur de la barre. Plus précisément, il existe une valeur critique  $L_c(\varepsilon)$  telle que si  $L < L_c(\varepsilon)$ , alors l'état homogène est stable, tandis qu'il est instable si  $L > L_c(\varepsilon)$ . En reprenant la première famille de modèle introduit précédemment, on obtient que la valeur de longueur critique de la barre en fonction de la déformation  $\varepsilon$  est donnée par :

$$L_c(\varepsilon) = \sqrt{c_L c_\varepsilon^{\frac{4}{p}-1}} \varepsilon^{-\frac{4}{p}+1}, \quad c_L = \frac{2\pi^2 E_0}{p^2 \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{G_c}{\ell} \left(\frac{3}{4}\right)^3}, \quad c_\varepsilon = \left(\frac{3}{8}\right)^2 \frac{G_c}{E_0 \ell}. \quad [9]$$

On peut remarquer que, bien que tous ces modèles donnent la même réponse contrainte-déformation, leurs propriétés de stabilité diffèrent. En effet, pour  $p > 4$ , la longueur critique croît avec la déformation, alors que pour  $p < 4$  la longueur critique décroît avec la déformation (cf. figure 1).



**Figure 1.** Longueur critique vs. déformation moyenne : (a)  $p < 4$ , (b)  $p > 4$

### 3.3. Résultats numériques

On se propose dans cette partie de résoudre le problème d'évolution [6] avec le deuxième modèle introduit en utilisant la méthode des éléments finis et l'algorithme de minimisation alternée proposé par B. Bourdin dans (Bourdin *et al.*, 2000).

Pour une barre en traction de longueur égale à 1, les figures 2 et 3 représentent l'évolution du champ d'endommagement et du champ de déplacement avant et après la charge critique où le champ d'endommagement homogène devient instable. La longueur interne  $\ell$  est égale à 0.01.

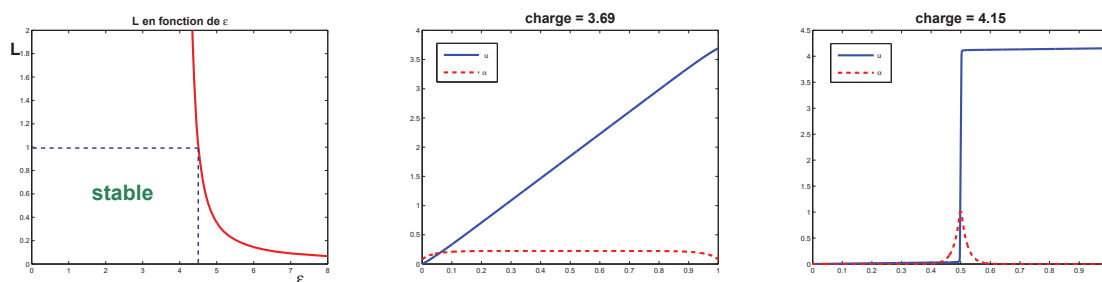


Figure 2. Réponse numérique de la barre en traction pour  $E_0 = 1$

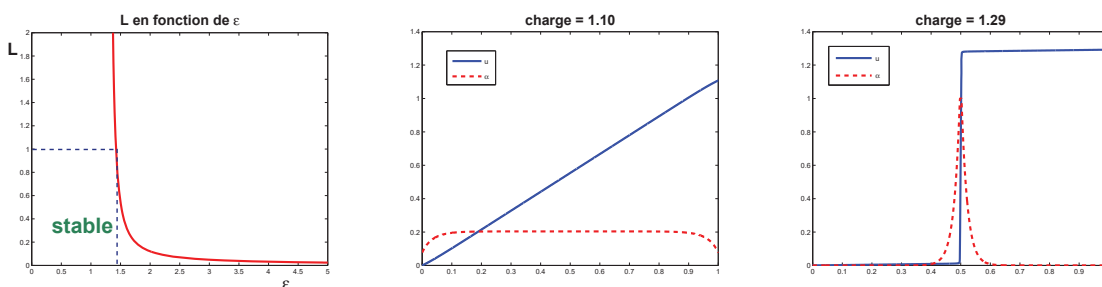


Figure 3. Réponse numérique de la barre en traction pour  $E_0 = 10$

## 4. Bibliographie

Ambrosio L., Tortorelli V., « Approximation of functionals depending on jumps by elliptic functionals via  $\Gamma$ -convergence », *Comm Comm. Pure Appl. Math.*, vol. 43, n° 8, p. 999-1036, 1990.

Benallal A., Marigo J.-J., « Bifurcation and stability issues in gradient theories with softening », *Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering*, vol. 15, n° 1, p. S283-S295, 2007.

Bourdin B., Francfort G., Marigo J.-J., « Numerical experiments in revisited brittle fracture », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 48, n° 1, p. 797-826, 2000.

Braides A., *Approximation of Free-Discontinuity Problems*, Springer, Berlin, 1998.

Francfort G., Marigo J.-J., « Revisiting brittle fracture as an energy minimization problem », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 46, n° 8, p. 1319-1342, 1998.

Jaubert A., Marigo J.-J., « Justification of Paris-type fatigue laws from cohesive forces model via a variational approach », *Contin. Mech. Thermodyn.*, vol. 18, n° 1-2, p. 23-45, 2006.