



**HAL**  
open science

## Sous-structuration en vibroacoustique par une formulation en potentiel de déplacement

Quang Hung Tran, Morvan Ouisse, Noureddine Bouhaddi

► **To cite this version:**

Quang Hung Tran, Morvan Ouisse, Noureddine Bouhaddi. Sous-structuration en vibroacoustique par une formulation en potentiel de déplacement. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01495591

**HAL Id: hal-01495591**

**<https://hal.science/hal-01495591>**

Submitted on 25 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

# Sous-structuration en vibroacoustique par une formulation en potentiel de déplacement

Q.H. Tran, M. Ouisse, N. Bouhaddi

*FEMTO-ST, UMR 6174, Laboratoire de Mécanique Appliquée R. Chaléat  
24 chemin de l'épitaphe, 25000 BESANCON, Université de Franche-Comté*

---

*RÉSUMÉ. Le calcul prévisionnel en vibroacoustique est toujours un problème qui nécessite un coût de calcul important (temps CPU et mémoire). La discrétisation des domaines fluides et structuraux conduit à des modèles éléments finis de grandes tailles, pratiquement inexploitable. Dans ce cas, la réduction de modèle est une procédure incontournable et son utilisation est bien justifiée. On présente ici une méthode de sous-structuration dynamique de type Craig-Bampton adaptée au problème d'interaction fluide-structure. La variable dans le fluide est le potentiel de déplacement qui est défini de sorte que le problème soit bien posé dans le cas statique. La méthodologie est illustrée par le calcul vibro-acoustique dans le cas d'un modèle simple de cavité et celui d'un modèle axisymétrique simplifié d'une ligne d'échappement. Les performances de la méthode sont mises en évidence en comparant les résultats obtenus à ceux de la condensation classique par les bases modales découplées du fluide et de la structure et à ceux du calcul de référence sur le modèle complet.*

*ABSTRACT. Solving numerical vibroacoustic problems requires a high calculation time. Meshing of both fluid and structural domains often results in large finite elements models. These models can be reduced in order to be efficiently solved. The Craig-Bampton dynamic sub-structuring method adapted to fluid-structure interaction is presented. The choice of displacement potential as the state variable in the fluid is done, it is defined in order to have a correct solution even in the static case ( $\omega=0$ ). A simple plate-cavity model is studied to valid the method and furthermore a test with a more complex model of a part of an exhaust system is presented. Numerical results are compared with the non-reduced case.*

*MOTS-CLÉS : vibroacoustique, interaction fluide-structure, rayonnement, réduction, sous-structuration, éléments finis.*

*KEYWORDS : vibro-acoustics, fluid-structure interaction, radiation, reduction, sub-structure, finite element.*

---

## 1. Introduction

Dans les domaines du transport terrestre et de l'aéronautique, la réduction des niveaux vibratoires et acoustiques demeure encore un enjeu majeur pour les industriels tant sur le plan de compréhension de certains phénomènes physiques liés au comportement vibroacoustique du système que sur le plan de l'amélioration de la conception en présence de facteurs mal maîtrisés. Pour résoudre un problème vibroacoustique, les calculs issus des modélisations nécessitent la mise en œuvre de

modèles de grandes tailles, difficilement exploitables en pratique. Afin de réduire ces temps de calcul, la réduction de modèle est un outil bien adapté.

Il existe un certain nombre de formulations d'un problème d'interaction fluide-structure. Elles ne se distinguent généralement que par le choix des variables d'état dans le domaine fluide. La formulation classique en pression conduit à une forme à matrices non symétriques. La formulation en potentiel de vitesse conduit à une forme symétrique non classique (Morand *et al.*, 1992). La combinaison de variables comme la pression et le potentiel de déplacement conduit à un système symétrique mais le nombre de degrés de liberté est doublé. D'autres formulations (Morand *et al.*, 1992, Lesueur, 1988) sont proposées dans la littérature, dont un des principaux inconvénients est qu'elles présentent une indétermination pour le cas statique (pression constante dans la cavité). Il en résulte des difficultés dans certaines configurations de calcul (calcul des modes statiques pour enrichir les bases modales, évaluation des résidus statiques (Masson, 2003) ...).

La formulation que l'on propose ici permet de s'affranchir de ce problème. Elle utilise le potentiel de déplacement  $\varphi$  comme variable dans le fluide (Morand *et al.*, 1992), qui garantit l'existence d'une solution  $\varphi_0$  dans le cas  $\omega=0$ . Cette formulation conduit à une topologie matricielle comparable à la formulation en pression mais présentant une permutation des termes de couplage. La condensation de la partie structure est classique (Craig *et al.*, 1995), tandis que pour le fluide, les modes statiques sont définis de façon similaire au cas structural, et les modes dynamiques sont obtenus en considérant que l'interface est libre ( $\varphi=0$ ).

*Pour plus de détails, le lecteur est invité à se référer à la version électronique de ce document, disponible sur le cd-rom des actes de la conférence.*

## 2. Problème vibroacoustique

Lorsqu'une structure élastique vibre en présence d'un fluide acoustique, il y a interaction entre les ondes élastiques et acoustiques. Dans le cas d'un fluide léger, on peut trouver la solution approchée en résolvant successivement le problème intérieur couplé (sans domaine fluide à l'extérieur), puis le problème extérieur, pour lequel on utilise la solution  $u_n$  du problème intérieur afin de déterminer le rayonnement acoustique. Dans la suite, on considère uniquement le problème intérieur. Les équations discrétisées caractérisant le système peuvent s'écrire en utilisant pour variables d'état le déplacement de la structure et la pression dans le fluide. Cette formulation classique dite (u,p) conduit au système matriciel suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_s & \mathbf{K}_{fs} \\ \mathbf{0} & \mathbf{K}_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{fs} & \mathbf{M}_f \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U} \\ \mathbf{P} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}, \quad [1]$$

avec  $\mathbf{K}_{fs} = -\mathbf{C}$  et  $\mathbf{M}_{fs} = \rho_f \mathbf{C}^T$ . Cette formulation possède une indétermination pour le cas statique, qui pose problème lors de l'utilisation de techniques telle que la sous-

structuration dynamique. On utilisera donc ici une formulation en  $(u, \varphi)$ , où  $\varphi$  est le potentiel de déplacement acoustique (Morand *et al.*, 1992), qui est défini par :

$$p = \rho_f \omega^2 \varphi - \frac{\rho_f c^2}{V_f} \int_{S_u} u_n dS_u, \text{ avec } \int_{\Omega_f} \varphi d\Omega_f = 0. \quad [2]$$

Cette définition est accompagnée de la contrainte sur  $\varphi$  qui permet de lever l'indétermination dans le cas statique. Cette formulation conduit, après discrétisation, au système matriciel suivant :

$$\left( \begin{bmatrix} K_0 & O \\ K_{fs} & K_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} M_s & M_{fs} \\ O & M_f \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} B_s & O \\ O & O \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} U \\ \Psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_s \\ O \end{Bmatrix}, \quad [3]$$

### 3. Réduction de modèle

Dans le cas de modèles de grandes tailles, une technique simple permettant la réduction de la taille du modèle est la méthode de condensation modale directe. Elle consiste à projeter les équations sur les bases modales découplées de la structure ( $T_s$ ) et du fluide ( $T_f$ ). La topologie du système est conservée par cette opération :

$$\left( \begin{bmatrix} \bar{K}_0 & O \\ \bar{K}_{fs} & \Lambda_f \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} I_s & \bar{M}_{fs} \\ O & I_f \end{bmatrix} + j\omega \begin{bmatrix} \bar{B}_s & O \\ O & O \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} y_s \\ y_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \bar{F}_s \\ O \end{Bmatrix}, \quad [4]$$

où  $\bar{K}_0 = \Lambda_s + T_s^T K_c T_s$ ,  $\bar{K}_{fs} = T_f^T K_{fs} T_s$ ,  $\bar{M}_{fs} = T_s^T M_{fs} T_f$ ,  $\bar{B}_s = T_s^T B_s T_s$ , et  $\bar{F}_s = T_s^T F_s$ . La prise en compte de la contribution statique au 1<sup>er</sup> ordre des modes de rang plus élevé conduit aux relations suivantes :

$$\begin{aligned} U &= T_s y_s + R_s F_s & ; & \quad R_s = (K_0)^{-1} - T_s (\bar{K}_0)^{-1} T_s^T ; \\ \Psi &= T_f y_f + R_f K_{fs} U & ; & \quad R_f = H(H^T K_f H)^{-1} H^T - T_f \Lambda_f^{-1} T_f^T . \end{aligned} \quad [5]$$

La condition d'existence de la solution statique  $L^T \Psi = O$  permet de calculer la matrice de filtrage  $H$ . En pratique, la condensation directe demeure encore coûteuse et ne permet pas toujours une résolution efficace. L'idée consiste alors à utiliser les techniques de sous-structuration dynamique. Une base de réduction est donc calculée pour chaque sous-domaine. Dans les méthodes de réduction de type Craig-Bampton, on distingue les degrés de liberté de frontière ( $F$ ) et les degrés de liberté internes ( $I$ ) :  $U_{CB}^{(i)} = \left\langle (U_F^{(i)})^T \quad (U_I^{(i)})^T \right\rangle^T$ ,  $\Psi_{CB}^{(i)} = \left\langle (\Psi_F^{(i)})^T \quad (\Psi_I^{(i)})^T \right\rangle^T$ . Les bases de réduction des sous-domaines structures et fluides sont  $R_s^{(i)}$  et  $R_f^{(i)}$ , telles que :

$$U_{CB}^{(i)} = \begin{bmatrix} I & O \\ - (K_{s,II}^{(i)})^{-1} K_{s,IF}^{(i)} & T_s^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_F^{(i)} \\ y_s^{(i)} \end{Bmatrix} = R_s^{(i)} U_R^{(i)}, \quad [6]$$

$$\Psi_{CB}^{(i)} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{0} \\ -(\mathbf{K}_{f,II}^{(i)})^{-1} \mathbf{K}_{f,IF}^{(i)} & \mathbf{T}_f^{(i)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Psi_F^{(i)} \\ \mathbf{y}_f^{(i)} \end{Bmatrix} = \mathbf{R}_f^{(i)} \Psi_R^{(i)}, \quad [7]$$

où  $\mathbf{y}_s^{(i)}$  et  $\mathbf{y}_f^{(i)}$  sont des vecteurs de coordonnées modales. La base  $\mathbf{T}_s^{(i)}$  (resp.  $\mathbf{T}_f^{(i)}$ ) est constituée des vecteurs propres de la sous-structure (resp. sous-domaine fluide) (i) encastree (resp. libre) sur ses frontières.

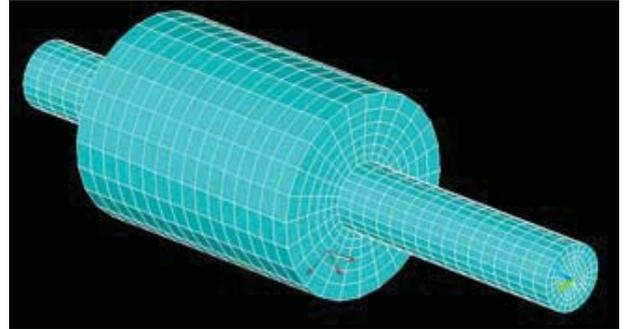
Après assemblage des sous-domaines structures et fluides, en tenant compte des conditions de continuité, et en projetant les équations sur la nouvelle base R on obtient le système condensé final :

$$\left( \begin{bmatrix} \mathbf{K}_O^R & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_{fs}^R & \mathbf{K}_f^R \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M}_s^R & \mathbf{M}_{fs}^R \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_f^R \end{bmatrix} + \mathbf{j}\omega \begin{bmatrix} \mathbf{B}_s^R & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \right) \begin{Bmatrix} \mathbf{U}^R \\ \Psi^R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \mathbf{F}_s^R \\ \mathbf{0} \end{Bmatrix}. \quad [8]$$

#### 4. Simulation numérique : modèle simplifié d'une ligne d'échappement

La ligne d'échappement, dont les caractéristiques sont détaillées dans la version électronique du document, est modélisée par des éléments finis quadrilatères (structure) et parallélépipédiques (fluide).

Les mécanismes dissipatifs sont pris en compte par l'intermédiaire d'un amortissement proportionnel, qui porte sur la structure uniquement ( $\mathbf{B}_s = \alpha \mathbf{K}_s + \beta \mathbf{M}_s$ ). Pour la réduction du modèle, la ligne d'échappement est divisée en 5 sous-domaines fluides et 5 sous-domaines structure suivant la longueur.



*Figure 1. modèle EF de la ligne*

##### - Analyse modale

Les modes 2 et 4 sont des modes à dominante structurale ; le 3 est à dominante fluide. On s'intéresse à la bande fréquentielle  $[0-f_{max}=300 \text{ Hz}]$ , et le nombre de modes composants est choisi de telle sorte que la fréquence propre maximale soit supérieure ou égale à  $3xf_{max}$ . Comme l'illustre le tableau 1, le modèle réduit donne des résultats avec une très bonne précision.

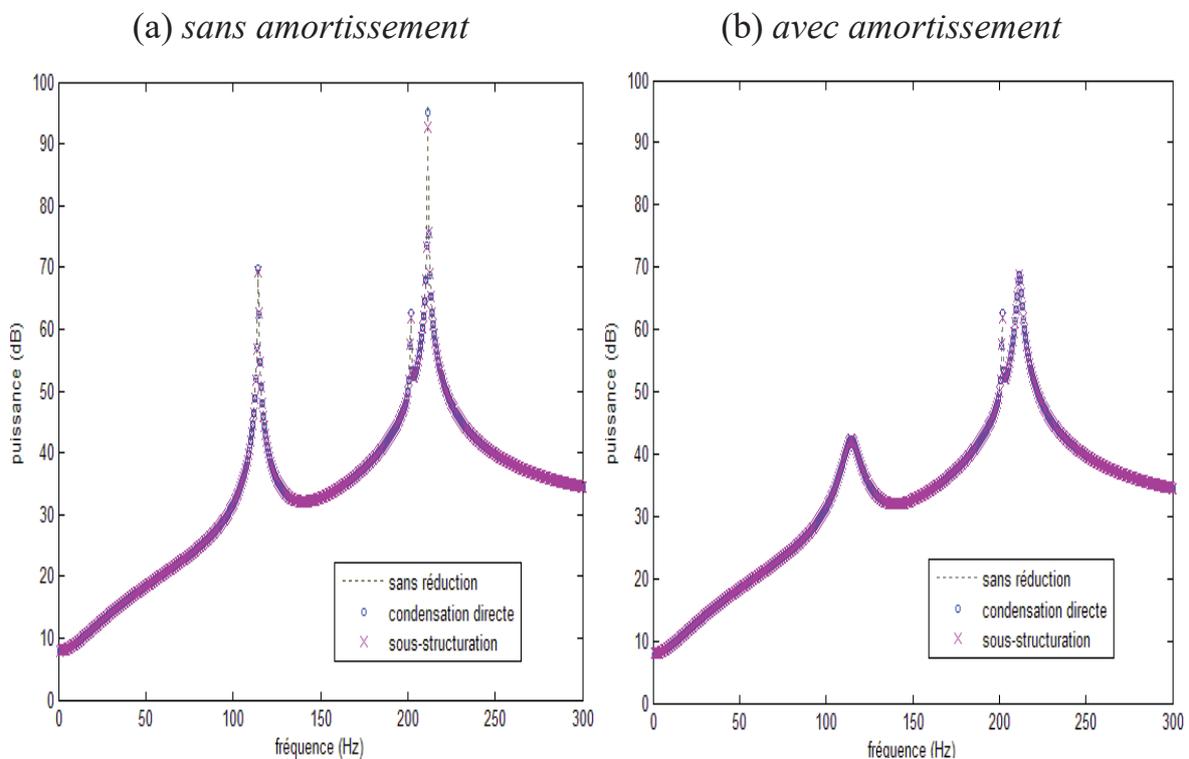
##### - Analyse forcée

Pour le calcul des puissances internes en régime harmonique, on applique une force ponctuelle d'amplitude  $F_0 = 1N$  sur la paroi élastique. On présente en figure 2 la puissance acoustique à l'intérieur de la ligne dans les deux cas non amorti et amorti. Le modèle original comporte 15627 ddl. Pour le calcul par condensation modale directe, on prend en compte 31 modes de la structure et 210 modes de cavité. Le

modèle condensé résolu comporte 241 ddl, soit un taux de réduction d'environ 98%. Pour le calcul par sous-structuration, on prend en compte 51 modes composants pour les sous-structures et 80 modes composants pour les sous-domaines fluide. Là encore, on obtient, dans le cas amorti, une très bonne corrélation entre les modèles condensés en comparaison avec la référence sur le modèle complet à 15627 ddl.

$f(\text{Hz})$ sans réduction de modèle	$f(\text{Hz})$ avec réduction, $(N_s) \times (N_f) = (\text{nombre de mode/sous-domaine structural}) \times (\text{nombre de mode/sous-domaine fluide})$					
	11x13	%	21x25	%	51x80	%
0						
114.41	114.45	0.03	114.44	0.03	114.44	0.03
201.52	201.52	0.00	201.51	0.00	201.51	0.00
211.31	211.69	0.18	211.66	0.17	211.39	0.04
211.31	211.71	0.19	211.68	0.18	211.42	0.05
348.86	348.92	0.02	348.89	0.01	348.88	0.01
388.90	390.59	0.43	390.59	0.43	388.96	0.02
464.78	464.89	0.02	464.83	0.01	464.82	0.01

**Tableau 1.** Fréquences propres du problème couplé (ligne d'échappement)



**Figure 2.** Puissance acoustique dans la ligne d'échappement

D'autres modèles vibro-acoustique ont mis en évidence l'intérêt de la méthode (voir modèle de cavité parallélépipédique à 5 parois rigides, fermée par une plaque appuyée et bafflée présenté dans la version électronique du document).

## 5. Conclusions

Pour résoudre les problèmes vibroacoustiques dont les modèles éléments finis sont de grandes tailles, une méthode de sous-structuration basée sur une formulation en déplacement (structure) et en potentiel de déplacement acoustique (fluide) est proposée. Cette formulation exploite une extension de la méthode de type interfaces bloquées de Craig et Bampton adaptée aux domaines fluide et structure ainsi qu'au couplage vibroacoustique. Les résultats numériques présentés illustrent les performances de la méthode en comparaison avec la méthode de condensation directe sur des bases modales des domaines découplés.

Cette formulation autorise l'introduction aisée de dispositifs amortissants sur la structure ou aux frontières fluides afin de baisser les niveaux vibratoires et acoustiques. En effet, pour résoudre les problèmes de nuisances vibratoires et acoustiques, le choix de composants ou sous-structures en matériaux composites absorbants passifs (sandwichs viscoélastiques, poroélastiques,...), voire semi-actifs (piézo shunté), selon différentes architectures est de plus en plus fréquent.

Un des objectifs à moyen terme de ces travaux consiste à mettre en œuvre ces outils pour étudier l'influence des ces sous-structures composites sur le comportement vibro-acoustique, ainsi que pour optimiser leur forme et emplacement.

## Références

- Boily S., Charron F., « The vibroacoustic response of a cylindrical shell structure with viscoelastic and poroelastic materials », *Applied Acoustics*, vol. 58, 1999, p. 131-152.
- Craig R. R., Bampton M.C.C., « substructure methods in vibration », *Journal of Vibration and Acoustics*, 117, 1995, p.207-213.
- Lesueur C., *Rayonnement acoustique des structures, vibroacoustique, interactions fluide-structures*, Paris, Eyrolles, 1988.
- Masson G., *Synthèse modale robuste adaptée à l'optimisation de modèles de grande taille*, Thèse de l'Université de Franche-Comté, 2003.
- Morand H. J.-P., Ohayon R., *Interactions fluide-structures*, Paris, Masson, 1992.
- Treysede F., Elhami A., « Une méthode couplée de sous-structuration dynamique/sous-domaines acoustiques pour des problèmes d'interactions fluide-structure de grande taille », *XIV<sup>e</sup> Colloque Vibrations Chocs et Bruits*, Lyon, 16-18 juin 2004.