



**HAL**  
open science

## Stabilité et équilibres d'un système tournant non axi-symétrique

Arnaud Lazarus, Didier Combescure, Quoc Son Nguyen

► **To cite this version:**

Arnaud Lazarus, Didier Combescure, Quoc Son Nguyen. Stabilité et équilibres d'un système tournant non axi-symétrique: Application aux rotors fissurés. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01493722

**HAL Id: hal-01493722**

**<https://hal.science/hal-01493722>**

Submitted on 22 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

---

# Stabilité et équilibres d'un système tournant non axisymétrique

## Application aux rotors fissurés

**Arnaud Lazarus<sup>\*,\*\*</sup> — Didier Combescure<sup>\*</sup> — Quoc Son Nguyen<sup>\*\*</sup>**

<sup>\*</sup> CEA Saclay, DM2S/SEMT/DYN  
F-91191 Gif-Sur-Yvette,  
arnaud.lazarus@cea.fr

<sup>\*\*</sup> Laboratoire de Mécanique des Solides, Ecole Polytechnique  
F-91128 Palaiseau cedex

---

*RÉSUMÉ.* Afin de prédire le comportement vibratoire d'un rotor fissuré, on formule les équations de mouvement qui, sous l'effet du défaut, sont des équations non autonomes de type Hill. Cet article donne les outils numériques pour résoudre ce type d'équation à travers un modèle à 2 ddls, un rotor horizontal fissuré reposant sur un palier de raideur anisotrope, en vue d'une généralisation aux éléments finis. On caractérise dans un premier temps l'effet de la fissure sur l'équation de mouvement de notre système. La théorie de Floquet nous permet d'affirmer que ce système non autonome possède des modes propres linéaires, complexes, à spectre de fréquences. On détermine alors, grâce au critère de Hsu, les instabilités paramétriques de ces modes. En raison des multiples fréquences caractérisant chaque mode, la réponse forcée du système sous poids propre est multi harmonique.

*ABSTRACT.* The modelling of a cracked rotor leads to a non autonomous equation of motion which is called Hill's equation. This paper gives the numerical tools in order to solve this equation. It shows their efficacy through a 2 dof model of an horizontal cracked rotor lying on support with anisotropic stiffness. First, the equation of motion is established. The Hill's determinant is obtained with the help of Floquet theory. Since its convergence, one can calculate the linear complex Eigen modes and their frequencies spectrum. Thanks to Hsu's criteria, the parametric instabilities of these modes are obtained. Due to the multiplicity of the frequencies contained in the Eigen modes, the forced response (under weight) is multi harmonic.

*MOTS-CLÉS :* rotors fissurés, vibration, équations de Hill, instabilités paramétriques, réponse multi-harmonique.

*KEYWORDS:* cracked rotor, vibration, Hill's equations, parametric instabilities, multi-harmonic response.

---

## 1. Introduction

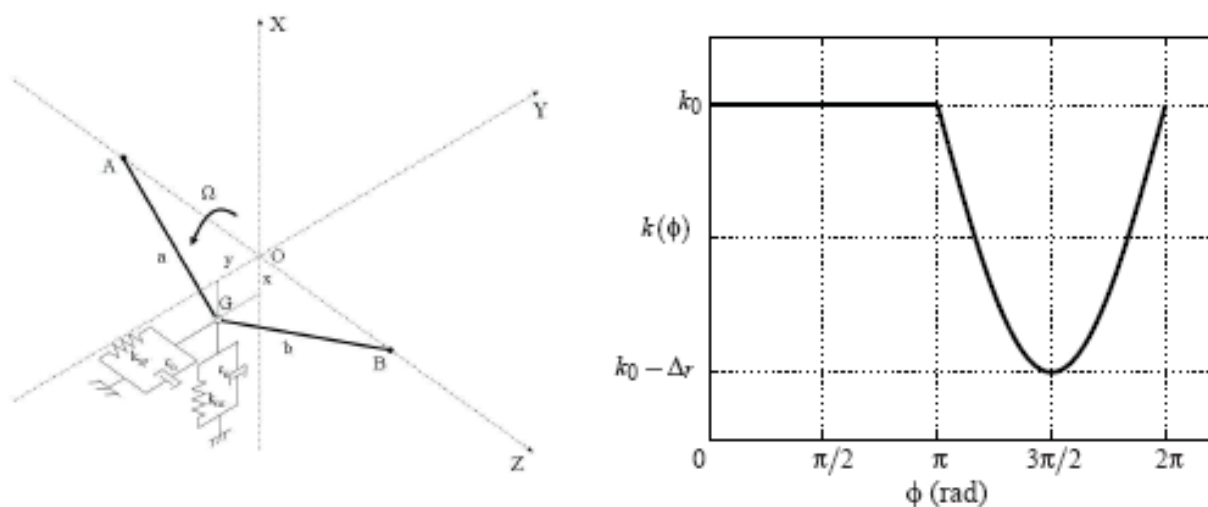
Un des défauts pouvant être rencontré sur les systèmes tournants est le phénomène de fissuration du rotor, notamment dans le domaine de l'énergie (turbine horizontale des générateurs par exemple).

La fissure entraîne l'apparition d'une flexibilité locale dans le système. Pour un rotor horizontal (soumis à son poids propre), la fissure est dite **respirante**. La loi de comportement associée à cette fissure a été déterminée dans (Andrieux et al., 2005). En modélisant simplement ce système par 2 ddls, (Saber, 2006) nous montre que l'équation du mouvement est à coefficients périodiques (équation non autonome) étant donné la raideur variable du système.

En s'inspirant des calculs de systèmes tournants en coordonnées complexes (Genta, 2005) et des outils utilisés pour résoudre les équations à coefficients périodiques, on analyse de façon rigoureuse, avec des outils similaires à la mécanique vibratoire linéaire classique (modes propres, fréquences propres, régime permanent...), la stabilité et la réponse sous poids propre d'un rotor horizontal fissuré sur des paliers de raideurs anisotropes. On étudie aussi l'influence de l'amortissement du système.

## 2. Equation du mouvement

Le rotor horizontal fissuré est modélisé de façon simplifiée figure 1. par 2 barres rigides liées en G par une liaison non-linéaire introduite dans (Andrieux et al., 2005). Le rotor possède un amortissement interne  $c_r$  et tourne à **vitesse constante**  $\Omega$  autour de l'axe Z (l'axe X est vertical). Le palier est anisotrope de raideur  $k_{nx}$  et  $k_{ny}$  et d'amortissement fixe  $c_n$  On pose  $\Delta_n = k_{nx} - k_{ny}$  et  $c = c_n + c_r$ .



**Figure 1.** Rotor fissuré sur palier anisotrope et allure de la fonction raideur

Sous poids propre ( $F_0 = -m^*g$ ), l'équation du mouvement de G s'écrit :

$$\begin{aligned} m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + k(\phi)x(t) - \frac{1}{2}k'(\phi)y(t) + k_{nx}x(t) + \Omega c_r y(t) &= F_0 \\ m\ddot{y}(t) + c\dot{y}(t) + k(\phi)y(t) + \frac{1}{2}k'(\phi)x(t) + k_{ny}y(t) - \Omega c_r x(t) &= 0 \\ \phi &= \frac{3\pi}{2} - \Omega t \end{aligned} \quad [1]$$

Cette équation est **non autonome** :  $k(\phi)$  est la fonction raideur périodique du système (figure 1), elle modélise la fissure respirante ( $k_0$  est la raideur du système sain et  $\Delta_r$  est sa perte de rigidité). On pose les paramètres adimensionnels suivants :

- défaut de rotor :  $\varepsilon_r = \Delta_r/k_0$ . On choisit ici  $\varepsilon_r = 0.4$ .
- défaut de stator :  $\varepsilon_n = \Delta_n/k_0$ . On choisit ici  $\varepsilon_n = 0.5$ .
- vitesse de rotation :  $\Omega_* = \Omega/\omega_n$  où  $\omega_n$  est la pulsation propre du système sain.

## 2.1. Déterminant de Hill

En posant la coordonnée complexe  $z(t) = x(t) + iy(t)$  et en appliquant la théorie de Floquet, on peut écrire le mouvement libre non amorti du système (équation [1] homogène avec  $c = 0$ ) sous la forme :

$$z(t) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} Z_{Dj} e^{j(\omega + j\Omega)t} + \sum_{j=-\infty}^{\infty} Z_{Rj} e^{-i(\bar{\omega} + j\Omega)t} \quad [2]$$

En remplaçant  $z(t)$  par son expression et en développant la fonction  $k(\phi)$  en série de Fourier, on obtient le **déterminant de Hill** du système dans le domaine fréquentiel:

$$\begin{bmatrix} - & - & - & - & - & - & - & - \\ - & A_{-1} & \varepsilon_n & \varepsilon_{r0} & 0 & \varepsilon_{r-1} & 0 & - \\ - & \varepsilon_n & B_{-1} & 0 & \varepsilon_{r0'} & 0 & \varepsilon_{r1} & - \\ - & \varepsilon_{r0'} & 0 & A_0 & \varepsilon_n & \varepsilon_{r0} & 0 & - \\ - & 0 & \varepsilon_{r0} & \varepsilon_n & B_0 & 0 & \varepsilon_{r0'} & - \\ - & \varepsilon_{r1} & 0 & \varepsilon_{r0'} & 0 & A_1 & \varepsilon_n & - \\ - & 0 & \varepsilon_{r-1} & 0 & \varepsilon_{r0} & \varepsilon_n & B_1 & - \\ - & - & - & - & - & - & - & - \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} - \\ Z_{D-1} \\ \bar{Z}_{R-1} \\ Z_{D0} \\ \bar{Z}_{R0} \\ Z_{D1} \\ \bar{Z}_{R1} \\ - \end{Bmatrix} = \{0\} \quad [3]$$

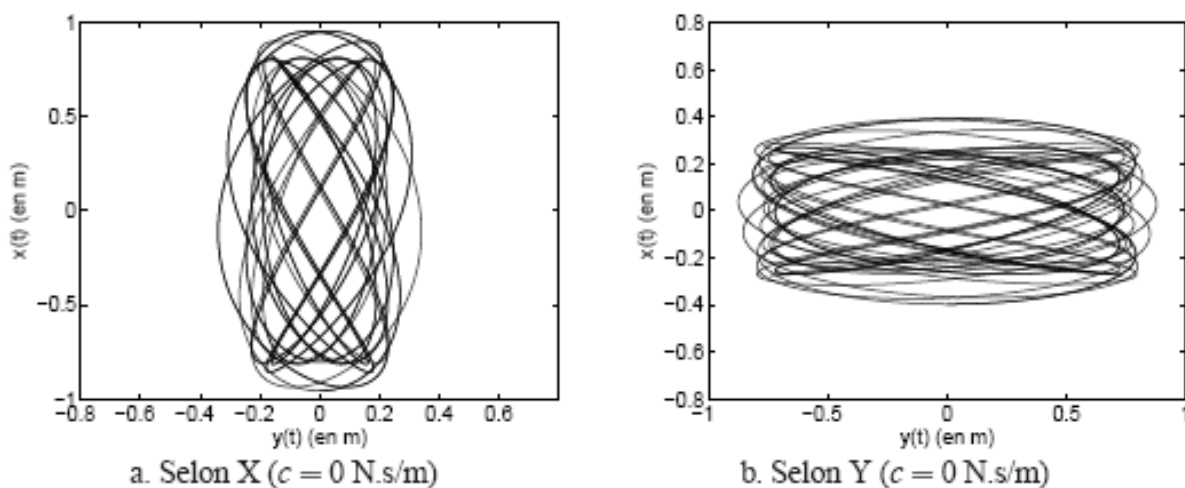
où  $A_j \equiv B_j \equiv \text{fct}(\Omega^2, \Omega, \omega^2, \omega, m, c_n, c_r, k_0, k_{nx}, k_{ny})$  et  $\varepsilon_{rj} \equiv \text{fct}(\varepsilon_r)$ .

On peut ainsi passer d'un système à coefficients périodiques à un système à coefficients constants équivalent dans le domaine fréquentiel mais de dimension infini ! Ce déterminant de Hill **converge** (Poincaré, 1886) et sa convergence dépend des paramètres ( $\Omega_*$ ,  $\varepsilon_r$ ). Plus la vitesse de rotation est élevée (ou plus  $\varepsilon_r$  est faible) et plus la convergence sera rapide donc plus l'ordre de troncature  $j_{\max}$

nécessaire à l'obtention de la réponse  $z(t)$  sera faible. En effet, les termes diagonaux comportent des coefficients en  $\Omega^2$  qui deviennent prépondérants.

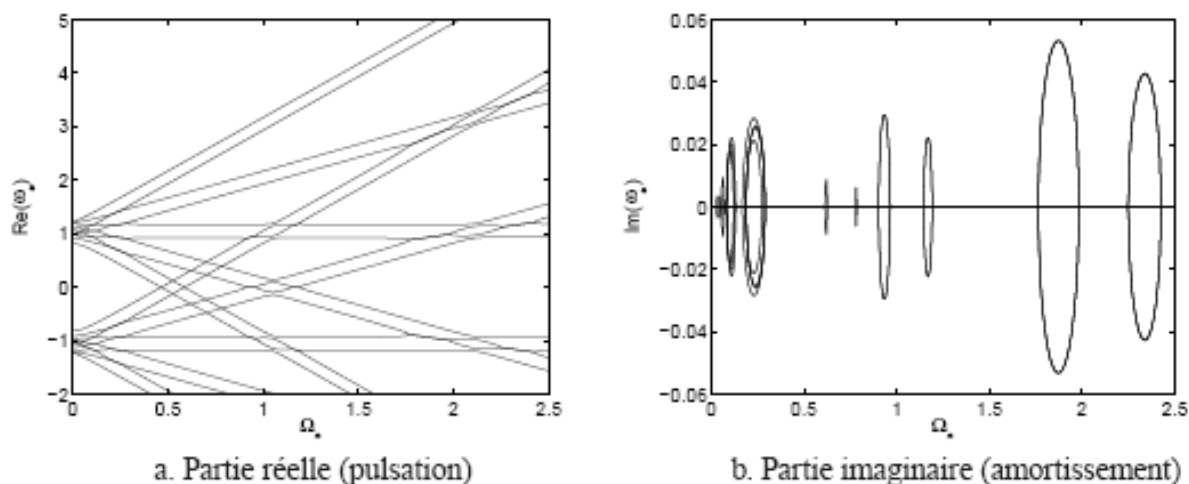
## 2.2. Modes propres à spectre de fréquences

Pour un ordre de troncature suffisant  $j = j_{\max}$ , on peut considérer que les vecteurs propres du système convergent [3] sont les **modes propres à spectre de fréquences** du système (figure 2). Ces modes sont de la forme [2], multi fréquentiel, de fréquences  $(\omega + j\Omega)$  données par la figure 3 et ils dépendent des paramètres  $(\Omega, \varepsilon_r, \varepsilon_n)$ . Pour notre système à 2 ddls, ces modes sont regroupés en 2 familles indépendantes convergentes, les modes selon X et les modes selon Y (figure 2.). Plus la vitesse de rotation est faible et plus leur contenu fréquentiel est important. Comme dans l'analyse modale classique, la solution de l'équation de mouvement [1] peut s'exprimer sur la base de ces modes propres.



**Figure 2.** Visualisation des 2 modes propres pour  $\Omega_* = 0.35$  ( $j_{\max} = 8$ )

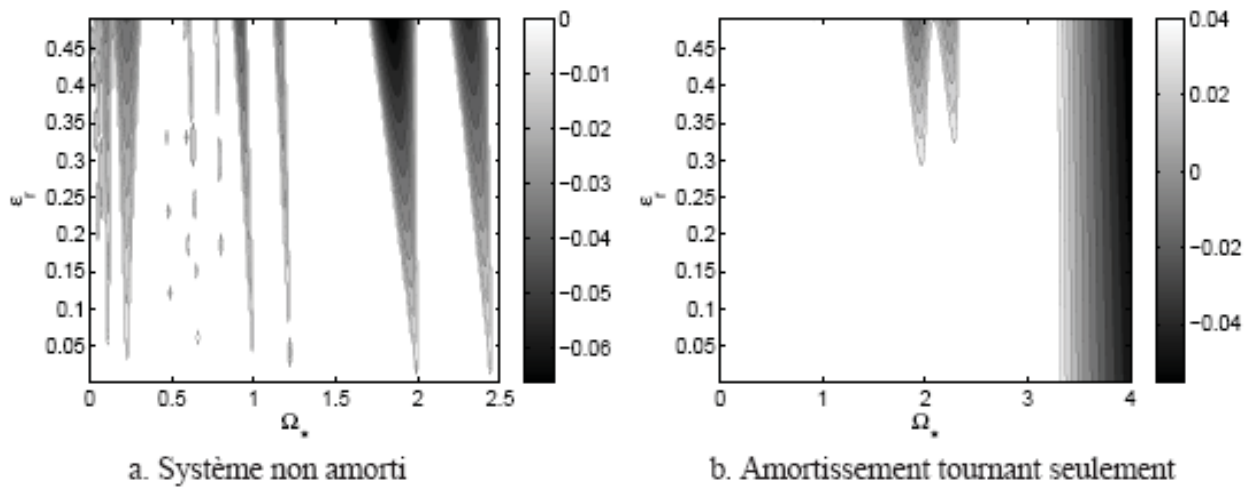
Pour certaines plages de rotation, on observe une **confusion des fréquences** des modes, le système est alors dynamiquement instable (partie imaginaire de  $\omega$  négative figure 3.b).



**Figure 3.** Evolution des valeurs propres du système en fonction de la vitesse de rotation

### 3. Diagramme de stabilité

On peut localiser les régions d'instabilité dues à la fissure des modes propres à spectre de fréquences grâce au **critère de Hsu** (Hsu, 1963) qui régit les instabilités paramétriques des systèmes à plusieurs ddls. On trace sur la figure 4. la partie imaginaire de la valeur propre en fonction des paramètres ( $\varepsilon_r$ ,  $\Omega_*$ ), c'est le **diagramme de stabilité**. Les instabilités paramétriques (amortissement négatif en zones sombres sur la figure 4.) apparaissent pour des multiples et sous multiples des pulsations propres du système sain  $\omega_x$  (selon X) et  $\omega_y$  (selon Y).



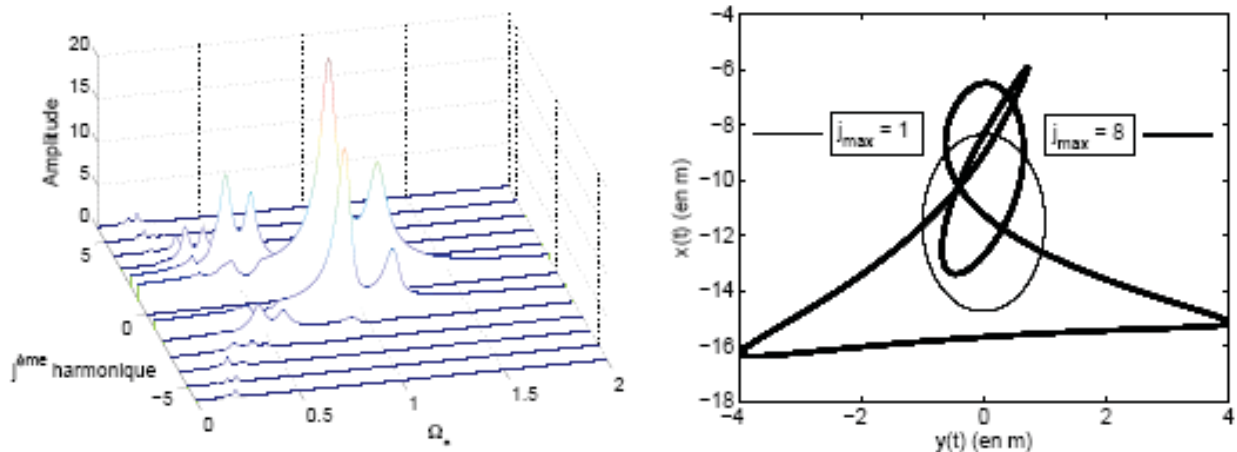
**Figure 4.** Diagramme de stabilité du système pour  $\varepsilon_n = 0.5$  et  $j_{max} = 2$

L'amortissement fixe stabilise le système, et ce quel que soit  $\Omega_*$ . Par contre, lorsque  $\Omega_* > 1$ , l'amortissement tournant peut déstabiliser le système (Genta, 2005). L'effet déstabilisateur de l'amortissement tournant peut être réduit par une anisotropie de raideur sur le stator. Ceci peut être le cas des arbres horizontaux de turbine dont les paliers sont généralement anisotropes en raison du poids propre. Sur la figure 4.b où l'amortissement est uniquement tournant, l'instabilité apparaît pour  $\Omega_* \approx 3.3$ . Pour des raideurs de palier isotropes, l'instabilité due à  $c_r$  apparaîtrait pour  $\Omega_* = 1$  !

### 4. Régime permanent

Lorsque l'arbre est soumis à son poids propre, les modes propres à spectre de fréquences peuvent être excités. On observe alors des résonances secondaires aux sous-multiples des pulsations propres  $\omega_x$  et  $\omega_y$  du système qui sont caractéristiques des systèmes non autonomes (figure 5.a). En régime sous-critique, l'influence des

harmoniques élevés est importante, il faut alors un ordre de troncature conséquent pour obtenir la réponse exacte (figure 5 où  $\Omega_* = 0.35$ ). En régime sur critique (cas du régime nominal par rapport aux premiers modes des arbres de turbine), seul le premier harmonique est nécessaire (Han, 2005).



**Figure 5.** Régime permanent sous poids propre et orbite de  $G$  ( $\Omega_* = 0.35$  et  $c_n \neq 0$ )

## 5. Conclusions

Cet article a présenté l'étude numérique des équations du mouvement non autonomes d'un rotor fissuré horizontal sur palier à raideur anisotrope. La prochaine étape sera d'adapter les méthodes utilisées aux calculs éléments finis afin de pouvoir traiter, à l'avenir, l'influence des défauts sur le comportement vibratoire de systèmes tournants réels aux géométries complexes.

## 6. Bibliographie

Andrieux S., Varé C., « Modelling of a cracked beam section under bending », 18th International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Beijing, august 2005, China, SMiRT 18.

El Arem S., Vibrations non-linéaires des structures fissurées, Thèse de doctorat, Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, 2006.

Genta G., *Dynamics of rotating systems*, Springer, 2005.

Han D-J, Modal analysis of periodically time-varying rotor systems using Floquet theory and modulated coordinate transformation: application to crack detections and modal balancing, PhD thesis, Korea Advanced Institute of Science and Technology, 2005.

Hsu C. S., « On the parametric excitation of a dynamic system having multiple degrees of freedom », *Journal of Applied Mechanics*, September 1963, p. 367-372.

Poincaré H., « Sur les déterminants d'ordre infini », Bulletin de la S. M. F., tome 14 (1886),  
P.77-90.