



**HAL**  
open science

# Méthodes rapides non-itératives pour l'identification de défauts

Marc Bonnet

► **To cite this version:**

Marc Bonnet. Méthodes rapides non-itératives pour l'identification de défauts. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. pp.5-18. hal-01493698

**HAL Id: hal-01493698**

**<https://hal.science/hal-01493698v1>**

Submitted on 22 Mar 2017

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.



Distributed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License

---

# Méthodes rapides non-itératives pour l'identification de défauts

**Marc Bonnet**

*Laboratoire de Mécanique des Solides (CNRS UMR 7649)*

*Ecole Polytechnique*

*F-91128 Palaiseau Cedex*

*bonnet@lms.polytechnique.fr*

---

*RÉSUMÉ. Cette communication présente une synthèse de travaux consacrés à l'identification de défauts (cavités, inclusions) de géométrie et topologie a priori inconnus par des approches non-itératives reposant sur la notion de sensibilité topologique. Ces méthodes permettent des calculs rapides (coût de l'ordre de quelques calculs directs), par des méthodes numériques ordinaires, de champs indicateurs de défauts. Quelques possibilités de ces approches sont illustrées sur des exemples numériques. Des perspectives touchant la théorie et la mise en oeuvre numérique sont présentées.*

*ABSTRACT. This communication summarizes recent investigations on the identification of defects (cavities, inclusions) of unknown geometry and topology by means of the concept of topological sensitivity. This approach leads to the fast computation (equivalent to performing a few direct solutions), by means of ordinary numerical solution methods such as the BEM (used here), the FEM or the FDM, of defect indicator functions. Possibilities of this approach are demonstrated on numerical examples. The paper concludes with a discussion of further research on theoretical and numerical issues.*

*MOTS-CLÉS : Problèmes inverses, sensibilité topologique, méthode multipôle rapide.*

*KEYWORDS: Inverse problems, topological sensitivity, fast multipole method.*

---

## 1. Introduction

L'identification et la reconstruction d'objets (cavités, fissures, inclusions...) de géométrie (emplacement, taille forme) et topologie *a priori* inconnues à partir de mesures de signaux associés à des ondes acoustiques, élastiques, électromagnétiques... est un domaine de recherche actif et multidisciplinaire, avec des applications en géophysique, contrôle non destructif, détection acoustique, imagerie médicale. Comme pour beaucoup d'autres problèmes inverses, une approche classique de résolution repose sur la minimisation d'une fonction coût portant sur la distance entre les mesures réelles et leur simulation pour une configuration donnée de défaut (Colton *et al.*, 1992, Farhat *et al.*, 2002, Bonnet et Constantinescu, 2005).

L'efficacité numérique de méthodes d'optimisation classiques mises en oeuvre dans ce contexte peut être optimisée (notamment en termes de rapidité du calcul) par recours à des méthodes de dérivation par rapport au domaine et d'état adjoint pour la formulation du gradient de la fonction-coût (Bonnet, 1995, Bonnet, 1999b, Bonnet, 2001, Guzina *et al.*, 2003). D'autres approches reposant sur les ensembles de niveaux permettent de s'affranchir d'hypothèses *a priori* sur la topologie des défauts (Litman *et al.*, 1998, Lambert *et al.*, 2006). La non-convexité des fonctions-coût rend néanmoins ces problèmes inverses très dépendants du choix des conditions initiales. De plus, le coût numérique habituellement très élevé d'une simulation directe restreint fortement l'emploi de méthodes d'optimisation globale (Michalewicz et Fogel, 2004) ou de méthodes d'inversion stochastiques (Tarantola, 2005).

Ces considérations ont conduit, depuis une dizaine d'années, au développement d'autres méthodes d'inversion, maintenant regroupées sous le vocable de « méthodes d'échantillonnage » (*sampling methods*), pour lesquelles une revue récente est présentée dans (Potthast, 2006). Ces méthodes cherchent à remplacer l'approche classique d'optimisation par le calcul d'une *fonction indicatrice de défaut*.

Plusieurs principes ont pour cela été mis en oeuvre. Le premier est celui de l'échantillonnage linéaire (*linear sampling*) qui utilise les propriétés de l'opérateur de Green associé aux propriétés physiques du milieu et à la géométrie du système inspecté (Colton et Kirsch, 1996, Colton *et al.*, 2000, Nintcheu Fata et Guzina, 2004). Un autre repose sur la notion de *sensibilité topologique*, et plus généralement sur des développements asymptotiques pour des petites tailles caractéristique des objets cherchés. Cette communication a pour objet de présenter une synthèse des travaux que nous avons effectués ces dernières années dans ce domaine.

## 2. Sensibilité topologique et inversion

La notion de sensibilité topologique est initialement apparue en liaison avec l'optimisation topologique de structures (Eschenauer *et al.*, 1994, Schumacher, 1995), et a permis de développer des algorithmes procédant par enlèvement itératif de matière jusqu'à convergence vers une forme et une topologie satisfaisantes du point de vue du critère d'optimisation considéré. A la suite de formulations comme celles proposées

par (Sokolowski et Zochowski, 1999, Garreau *et al.*, 2001) pour l'équation de Laplace ou (Samet *et al.*, 2004, Pommier et Samet, 2005) pour les équations de Helmholtz et de Maxwell, nous nous proposons d'étudier l'intérêt et les performances de l'indicateur de sensibilité topologique pour l'identification préliminaire, ou approchée (selon le point de vue d'utilisation adopté). Notre travail porte uniquement sur les situations 3D. D'autres travaux concernant des approches similaires aux nôtres ont été menés dans un cadre 2D (Feijóo, 2004, Gallego et Rus, 2004).

Le principe de cette approche consiste à examiner l'effet sur la fonction-coût de l'apparition, en un point  $\mathbf{x}_s$  spécifié du milieu de référence, d'un objet de nature physique spécifiée et de taille caractéristique  $\varepsilon$  arbitrairement petite, cet effet devant être quantifié comme une fonction de  $\mathbf{x}_s$ . Notant par  $J(\varepsilon, \mathbf{x}_s)$  la valeur atteinte par la fonction-coût associée au problème inverse pour un objet infinitesimal situé en  $\mathbf{x}_s$ , la sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  de  $J$  est (pour des situations 3D) définie à travers le développement

$$J(\varepsilon, \mathbf{x}_s) - J(0, \mathbf{x}_s) = \varepsilon^3 \mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s) + o(\varepsilon^3) \quad [1]$$

qui repose sur l'hypothèse que les conditions à la surface de l'objet à identifier sont soit des conditions aux limites de type Neumann (objet rigide en milieu acoustique, cavité ou fissure en milieu élastique) soit des conditions de transmission (inclusion pénétrable). On note que la valeur  $J(0, \mathbf{x}_s)$  de  $J$  pour le milieu de référence sans obstacle ne dépend en fait pas de  $\mathbf{x}_s$ . L'idée est alors d'exploiter le champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  comme une fonction indicatrice de défaut, de façon heuristique : les régions du milieu analysé telles que l'apparition d'un défaut de petite taille crée la plus forte diminution de la valeur de  $J$  sont celles pour lesquelles le champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  atteint les valeurs *negatives* les plus prononcées. Une idée simple consiste alors à calculer le champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  dans une région de l'espace soupçonnée d'abriter un défaut et d'y chercher les zones où  $\mathcal{T}_3$  atteint ses plus basses valeurs.

Le champ de sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  peut être exprimé explicitement à l'aide de la fonction de Green pour le domaine, les propriétés physiques et les conditions aux limites considérés. En pratique, il est rare que les fonctions de Green soient connues pour la configuration analysée. Une autre formulation, mieux adaptée au calcul numérique, fournit l'expression de  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  en fonction des champs libre  $u$  (créé par l'excitation appliquée en l'absence de défaut) et adjoint  $\hat{u}$  (créé par une excitation adjointe associée à la fonction coût) et de leurs gradients. Par exemple, le champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  donnant la sensibilité topologique à l'apparition d'un petit obstacle sphérique impénétrable dans un milieu à propriétés acoustiques linéaires est donné par

$$\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s) = \frac{4\pi}{3} \left[ \frac{3}{2} \nabla u \cdot \nabla \hat{u} - k^2 u \hat{u} \right] (\mathbf{x}_s) \quad [2]$$

où  $k$  est le nombre d'onde (régime fréquentiel). Les expressions de  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  ont été également établies pour d'autres situations tridimensionnelles, pour des analyses en domaine fréquentiel : milieu acoustique contenant un obstacle pénétrable (Guzina et Bonnet, 2006), milieu élastique contenant une cavité (Guzina et Bonnet, 2004, Bonnet et Guzina, 2004) ou une inclusion pénétrable (Guzina et Chikichev, 2007), milieu

électromagnétique contenant une inclusion pénétrable (Ammari et Kang, 2004, Mas-moudi *et al.*, 2005). Pour les analyses en domaine temporel, il a été montré que des expressions similaires sont obtenues pour  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$ , les expressions bilinéaires en  $(u, \hat{u})$  telles que [2] se transformant en produits de convolution temporelle entre les champs libre et adjoint ou leurs gradients (Bonnet, 2006). Il est important de noter que des expressions telles que [2] sont formellement analogues à la combinaison additive d'une énergie de déformation et d'une énergie cinétique, et sont donc très simples à calculer par toute méthode numérique standard telle que les éléments finis, les différences finies ou les éléments de frontière. Nos expérimentations numériques utilisent pour l'instant cette dernière, mais cela n'a donc rien d'obligatoire.

### 3. Sensibilité topologique et méthode multipôle rapide

Si le milieu de référence a des propriétés de comportement simples (linéaires, homogènes par morceaux), alors le calcul du champ de sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x})$  et des champs de coefficients  $\mathcal{T}_5(\mathbf{x}), \mathcal{T}_6(\mathbf{x})$  peut être effectué au moyen de formules de représentation intégrale (Bonnet, 1999a), les champs libre et adjoint étant alors déterminés préalablement sur la frontière de la région d'intérêt par la méthode des éléments de frontière (BEM). Cette approche est en particulier appropriée si le problème d'identification est posé sur un milieu non borné. Dans la mesure où l'exploration globale d'une région spatiale 3D nécessite un grand nombre de points d'échantillonnage, un tel calcul peut toutefois être coûteux en temps de calcul et en mémoire, conséquence du fait que la matrice gouvernant le problème BEM discret est pleine. La méthode multipôle rapide (FMM, pour *Fast Multipôle Method*) (Greengard et Rokhlin, 1997, Nishimura, 2002, Margonari et Bonnet, 2005, Nemitz, 2006, Chaillat *et al.*, 2007) permet une accélération de ces calculs, et une réduction de la place mémoire nécessaire, considérables. Pour une analyse dynamique fréquentielle, si la région d'intérêt comprend  $M$  points d'échantillonnage, et le problème BEM  $N$  DDLs, le calcul du champ de sensibilité topologique demande un temps de calcul d'ordre  $O(N \log N)$  par itération (solveur itératif BEM) et d'ordre  $O(M \log M)$  (post-traitement de la solution BEM aux points d'échantillonnage), à comparer respectivement à  $O(N^2)$  par itération (si solveur itératif, sinon  $O(N^3)$  pour un solveur direct) et  $O(MN)$  par les techniques BEM traditionnelles. La FMM permet des tailles de calculs  $N, M = O(10^6)$  sur un simple PC.

Des exemples similaires, présentant des données bruitées, ont été considérés. Pour une fonction-coût quadratique par rapport aux résidus expérimentaux, l'état adjoint  $\hat{u}$  est alors perturbé de façon proportionnelle au bruit de mesure, et la formule [2] montre que la perturbation induite sur  $\mathcal{T}_3$  est alors linéaire par rapport au bruit. Cette approche est donc moins sensible au bruit de mesure que les méthodes traditionnelles d'inversion.

### Exemple numérique

Cette démarche combinant la sensibilité topologique et la méthode multipôle rapide, mise en oeuvre dans (Nemitz et Bonnet, 2007), est maintenant illustrée sur l'exemple de l'identification d'un obstacle rigide dans un milieu acoustique occupant le cube  $\Omega = \{|\xi_i| \leq 8a \ (i = 1, 2, 3)\}$ . Un ensemble de  $n_e = 30$  expériences simulées sont réalisées, chacune consistant à exercer une excitation uniforme sur une petite région  $S_q$  ( $1 \leq q \leq N$ ) de la frontière externe  $S$  et à recueillir la pression acoustique sur  $S$  (c'est-à-dire en tous les noeuds du maillage par éléments de frontière). L'excitation acoustique est telle que  $ka = 2\pi/3$ . Chaque face du domaine cubique  $\Omega$  supporte cinq surfaces d'excitation  $S_q$ , chacune étant un disque de rayon  $a$  (figure ??). L'identification s'appuie sur la fonction coût

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{30} \int_S |u^* - u_q^{\text{obs}}|^2 d\Gamma_\xi \quad [3]$$

où  $u_q^{\text{obs}}$  and  $u_q^*$  désignent les champs acoustiques créés par la diffraction de la  $q$ -ième source par l'obstacle à identifier  $B^{\text{vrai}}$  et par un obstacle d'essai  $B^*$  (on considère ici des données non bruitées). L'obstacle  $B^{\text{vrai}}$  à identifier est sphérique (de rayon  $0,4a$  et centré en  $\mathbf{x}^{\text{vrai}} = (2a, 3a, 2a)$ ).

Les maillages d'éléments de frontière employés pour le calcul des champs libre et adjoint, et des données simulées  $u_q^{\text{obs}}$ , par la FMM sont constitués d'éléments triangulaires linéaires à trois noeuds, avec une densité de l'ordre de 15 noeuds par longueur d'onde (les nombres d'éléments et de noeuds utilisés sont indiqués au tableau 1).

**Tableau 1.** Nombres d'éléments et de DDLs supportés par les maillages d'éléments de frontière.

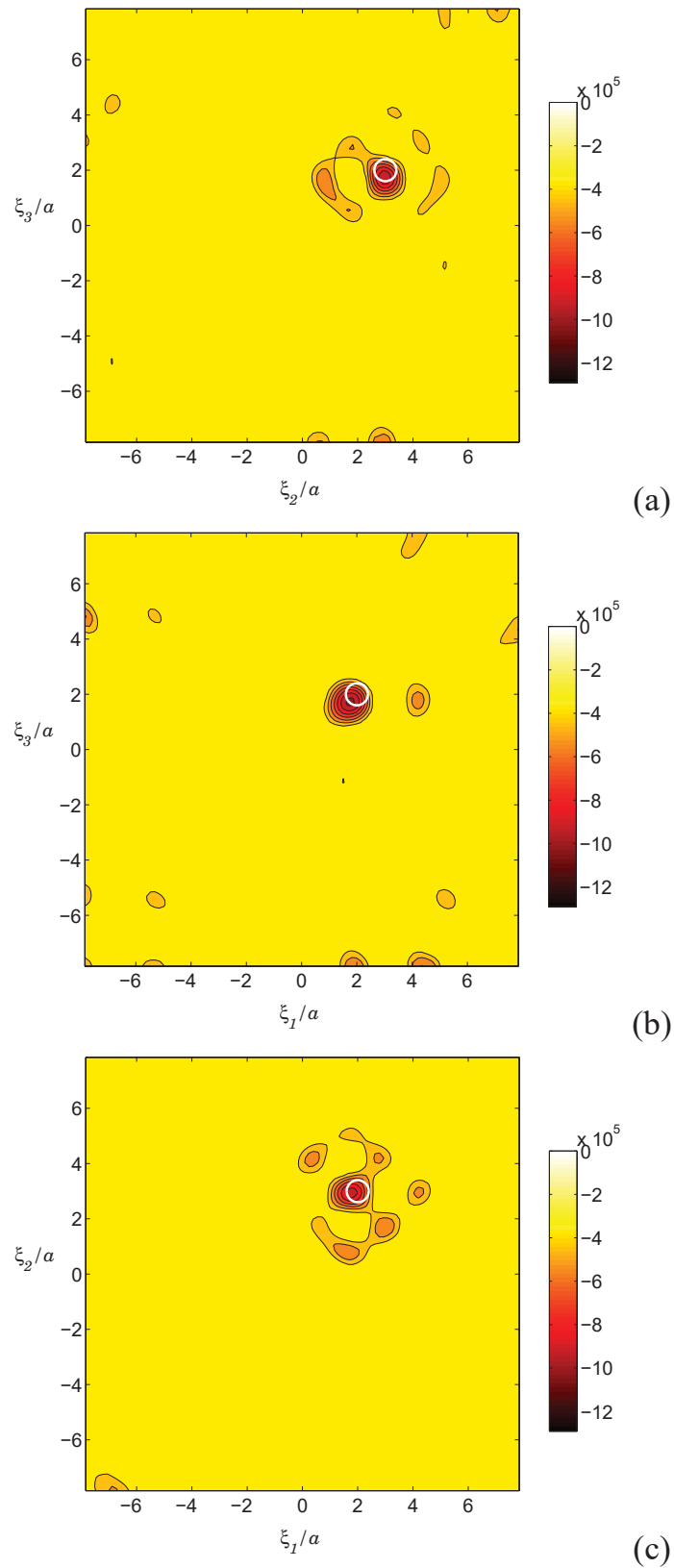
Taille de cube	Cube		Obstacle		Total	
	Elements	noeuds	Elements	noeuds	Elements	noeuds
$2L = 16a$	76800	38402	336	170	77136	38572
$2L = 32a$	307200	153602	336	170	307536	153772

Le champ de sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  a été évalué selon [2] aux points d'une grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$  constituée de  $100 \times 100 \times 100$  points situés aux sommets d'une grille cubique régulière centrée à l'origine et de pas  $\Delta x_s = 16a/101$ , qui remplit uniformément le milieu acoustique délimité par  $S$ . Pour faciliter l'interprétation visuelle, une version seuillée  $\hat{\mathcal{T}}_3$  de  $\mathcal{T}_3$  est introduite selon

$$\hat{\mathcal{T}}_3(\mathbf{x}_s) = \mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s) \quad (\mathcal{T}_3 \leq C \mathcal{T}_{\min}), \quad \hat{\mathcal{T}}_3(\mathbf{x}_s) = 0 \quad (\mathcal{T}_3 > C \mathcal{T}_{\min}),$$

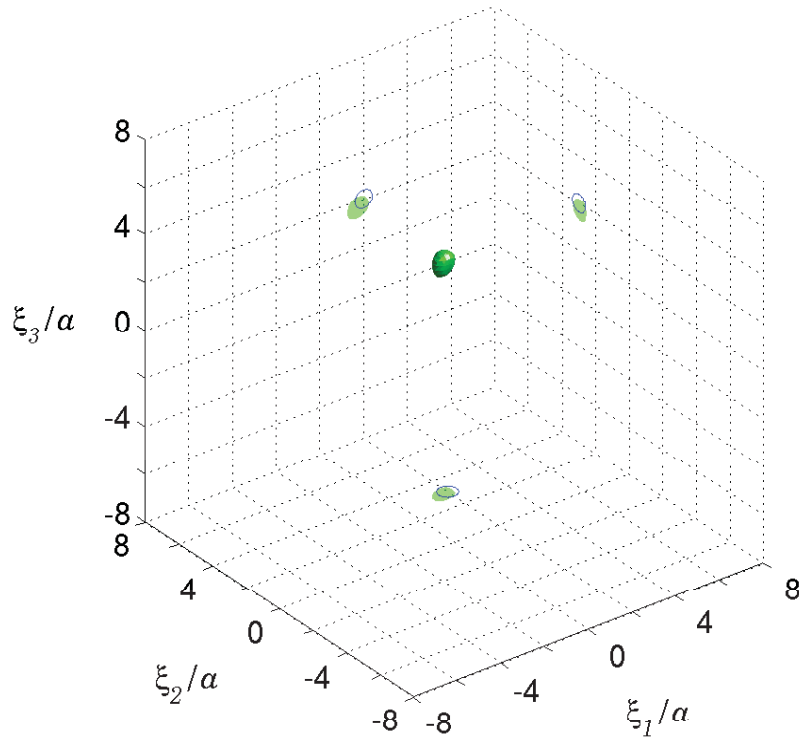
avec  $C = 0.25$ . [4]

La figure 1 présente les traces du champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  sur trois plans parallèles aux faces du cube  $S$  et passant par le centre  $\mathbf{x}^{\text{vrai}}$  de l'obstacle à détecter. Le champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  atteint



**Figure 1.** Identification d'un obstacle rigide de rayon  $0.4a$  : champ de sensibilité topologique seuillée  $\hat{T}_3(\mathbf{x}_s)$  pour les sections de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$  par les plans  $\xi_1 = x_1^{\text{vrai}}$  (a),  $x_2 = x_2^{\text{vrai}}$  (b) et  $x_3 = x_3^{\text{vrai}}$  (c).

ses valeurs négatives les plus prononcées dans un voisinage du lieu géométrique de l'obstacle à identifier. Cette constatation est renforcée par la figure 2, qui montre les iso-surfaces du champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  (calculé sur la partie centrale  $\{|\xi_i| \leq 5a \ (i = 1, 2, 3)\}$  de la grille de calcul  $\mathcal{G}$ ) correspondant à  $\mathcal{T}_3 = 0.55\mathcal{T}_{3,\min}$  (où  $\mathcal{T}_{3,\min}$  désigne la plus basse valeur de  $\mathcal{T}_3$  obtenue sur la grille de calcul  $\mathcal{G}$ ) : les valeurs de  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  les plus basses apparaissent seulement en des points de  $\mathcal{G}$  proches de l'obstacle  $B^{\text{vrai}}$  à identifier. Il faut cependant préciser que ces expérimentations numériques ont également montré la tendance de l'indicateur  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  à prendre également des valeurs basses au voisinage de la frontière  $S$ , région qui ne contient pourtant pas d'obstacle, sans que la raison en soit pour l'instant comprise. La méthode proposée est donc surtout valable pour la détection d'objets situés à une distance suffisante de la frontière.



**Figure 2.** Identification d'un obstacle rigide de rayon  $0.4a$  : iso-surface  $\mathcal{T}_3 = 0.55\mathcal{T}_{\min}$  du champ  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  calculé dans la partie centrale  $\{|\xi_i| \leq 5a \ (i = 1, 2, 3)\}$  de la grille d'échantillonnage  $\mathcal{G}$ . Les valeurs de  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  inférieures à  $0.55\mathcal{T}_{\min}$  apparaissent à l'intérieur de l'iso-surface.

Pour compléter ces résultats, des valeurs typiques de temps de calcul et de nombres d'itérations GMRES utilisées par la FMM sont donnés au tableau 2, pour le domaine cubique de taille  $2L = 16a$  considéré ci-dessus ainsi que pour un domaine plus grand de taille  $2L = 32a$  (avec encore  $ka = 2\pi/3$ ), et pour lequel la grille  $\mathcal{G}$  de calcul de  $\mathcal{T}_3$  est constituée de  $150 \times 150 \times 150$  points. Les temps de calcul pour  $\Omega(32a)$  sont environ 5 fois plus élevés que ceux pour  $\Omega(16a)$ , les nombres  $N$  de degrés de liberté de frontière étant dans un rapport d'environ 4, ce qui est cohérent avec la croissance quasi-linéaire en  $N$  du temps de calcul par itération prévue par la théorie de la FMM



(Nishimura, 2002, Darve, 2000, Sylvand, 2003). Les calculs ont été effectués sur un PC Linux avec un processeur simple à 3 GHz.

**Tableau 2.** Temps de calcul et (entre parenthèses) nombres d'itérations GMRES utilisés pour le calcul des données simulées  $u^{\text{vrai}}$  et des champs libre  $u$  et adjoint  $\hat{u}$  sur la frontière  $S$ , et temps de calcul pour le calcul du champ  $\mathcal{T}_3$  sur la grille  $\mathcal{G}$  complète.

	$u^{\text{vrai}}$ sur $S \cup \Gamma^{\text{vrai}}$	$u$ sur $S$	$\hat{u}$ sur $S$	$\mathcal{T}_3$ sur $S$
$2L = 16a$	1444s (435)	969s (282)	1163s (342)	852s
$2L = 32a$	6461s (439)	5615s (388)	6818s (476)	1860s

#### 4. Développement topologique à plusieurs termes

Les diverses expérimentations numériques effectuées à ce jour montrent clairement l'intérêt pratique du calcul du champ de sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  comme fonction indicatrice de défauts. L'indication donnée par  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  est cependant nécessairement de nature qualitative, l'approximation [1] de la fonction-coût ne pouvant être minimisée par rapport à la taille  $\varepsilon$  aux points  $\mathbf{x}_s$  tels que  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s) < 0$ . C'est pourquoi il peut être intéressant de considérer l'utilisation aux fins d'inversion d'un développement de  $J(\varepsilon, \mathbf{x}_s)$  à plusieurs termes en puissances de  $\varepsilon$ . Pour le cas fréquent en pratique d'utilisation de fonctions-coût quadratiques par rapport aux résidus expérimentaux, il est alors pertinent, compte tenu de [1], de pousser le développement de  $J(\varepsilon, \mathbf{x}_s)$  jusqu'à l'ordre  $O(\varepsilon^6)$  (qui est l'ordre du carré du terme principal dans [1]).

Ce travail a pour l'instant été fait dans le cadre de l'équation de Helmholtz scalaire (Bonnet, 2006, in preparation), correspondant typiquement à l'acoustique linéaire, mais le principe de la méthode proposée s'étend par exemple à l'élastodynamique. Le développement de  $J$  pour tout défaut impénétrable à *symétrie centrale*, de taille caractéristique  $\varepsilon$  et centré en  $\mathbf{x}_s$ , est de la forme

$$\begin{aligned} J(\varepsilon, \mathbf{x}_s) - J(0, \mathbf{x}_s) &= \varepsilon^3 \mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s) + \varepsilon^5 \mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s) + \varepsilon^6 \mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s) + o(\varepsilon^6) \\ &= J(0, \mathbf{x}_s) + J_6(\varepsilon, \mathbf{x}_s) + o(\varepsilon^6) \end{aligned} \quad [5]$$

Le champ de coefficients  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$  est le champ de sensibilité topologique déjà connu. Les nouveaux coefficients  $\mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s)$ ,  $\mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s)$  sont donnés explicitement à l'aide de la fonction de Green pour le domaine, les propriétés physiques considérées et les conditions aux limites considérées. D'autres travaux existent sur des développements du type [5], par exemple (Ammari et Kang, 2004). En pratique, il est rare que les fonctions de Green soient connues pour la configuration analysée. Une autre formulation, mieux adaptée au calcul numérique, permet d'exprimer  $\mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s)$  en fonction des champs libre et adjoint et de leurs gradients d'ordre 1 et 2, et  $\mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s)$  en fonction des champs libre et adjoint ainsi que de la fonction de Green pour des sources situées sur la surface de mesure. Le calcul du développement en un point d'échantillonnage  $\mathbf{x}_s$  demande alors

le calcul numérique des champs libre et adjoint (comme pour le champ de sensibilité topologique  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$ ) ainsi que celui de la fonction de Green. Tous ces champs étant gouvernés par le même opérateur linéaire, le supplément de temps de calcul nécessité par l'évaluation de l'état adjoint et des fonctions de Green est modeste (par rapport au coût d'une résolution directe) dans tous les cas où un solveur direct peut être employé, et un peu plus important (l'équivalent de quelques calculs directs) quand seules des méthodes itératives sont envisageables, ce qui est par exemple le cas avec la FMM.

### *Une méthode approchée d'exploration globale*

Compte tenu des indications qui précèdent, les calculs numériques nécessaires pour évaluer les champs restent raisonnables. On peut alors définir une méthode approchée et rapide d'exploration globale fondée sur le développement [5]. Celle-ci repose sur le fait qu'une fois les champs  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s)$ ,  $\mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s)$ ,  $\mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s)$  calculés, la minimisation de l'approximant polynomial  $J_6(\varepsilon, \mathbf{x}_s)$  défini par [5] par rapport à  $\varepsilon$  est une opération simple et numériquement très rapide, qu'il est donc envisageable d'effectuer en *tous* les points d'une grille tridimensionnelle  $\mathcal{G}$  échantillonnant la région où l'on s'attend *a priori* à trouver un défaut. On va donc estimer l'emplacement  $\mathbf{x}^{\text{est}}$  et la taille caractéristique  $R^{\text{est}}$  d'un défaut à partir de

$$(R^{\text{est}}, \mathbf{x}^{\text{est}}) = \arg \min_{\varepsilon > 0, \mathbf{x}_s \in \mathcal{G}} J_6(\varepsilon, \mathbf{x}_s) \quad [6]$$

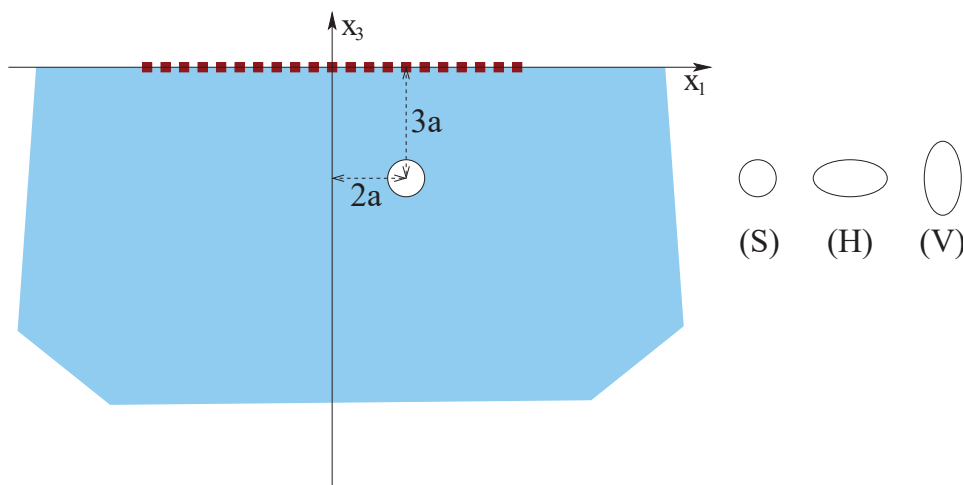
Cette estimation peut alors soit être retenue comme une approximation raisonnable, soit fournir une bonne condition initiale à un algorithme itératif d'inversion « conventionnel ».

### *Exemple numérique*

La démarche proposée est illustrée sur l'exemple de l'identification d'un obstacle rigide dans un milieu acoustique occupant le demi-espace  $\Omega = \{\boldsymbol{\xi} \mid \xi_3 \leq 0\}$  (figure 3).

Des expériences simulées sont réalisées sur trois configurations (notées  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$ ), telles que le carré  $-5a \leq \xi_1, \xi_2 \leq 5a$  sur la surface  $x_3 = 0$  supporte une grille de  $n_m = 5 \times 5$ ,  $10 \times 10$  ou  $20 \times 20$  capteurs, respectivement. On considère l'excitation du milieu par une source ponctuelle unitaire placée au centre de l'un des carrés de la grille de mesure ainsi définie, toutes les positions de sources possibles étant envisagées successivement, de sorte que  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$  supportent respectivement  $n_e = 25$ , 100, 400 expériences simulées. Le champ acoustique diffracté par l'obstacle pour chacune de ces sources est supposé mesuré à tous les capteurs des grilles  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$  (conditions d'ouverture limitée). L'identification s'appuie sur la fonction coût

$$\mathcal{J}(\Omega^*) = \frac{1}{2} \sum_{q=1}^{n_e} \sum_{m=1}^{n_m} |u_q^{\text{obs}}(\mathbf{x}_m) - u_q^*(\mathbf{x}_m)|^2 \quad [7]$$



**Figure 3.** Identification d'un obstacle sphérique ou ellipsoïdal dans un demi-espace acoustique : géométrie et notations.

où  $u_q^{\text{obs}}$  and  $u_q^*$  désignent les champs acoustiques créés par la diffraction de la  $q$ -ième source ponctuelle par l'obstacle à identifier  $B^{\text{vrai}}$  et par un obstacle d'essai  $B^*$ , et les  $\mathbf{x}_m$  sont les points de mesure.

La méthode de recherche globale proposée a été effectuée dans la région parallélépipédique  $-10a \leq x_1, x_2 \leq 10a, -10a \leq x_3 \leq -0.4a$ , échantillonnée par une grille de recherche  $\mathcal{G}$  de  $51 \times 51 \times 25 = 65025$  points régulièrement espacés. L'approximant  $J_6(\varepsilon; \mathbf{x}_s)$  de la fonction-coût, avec les coefficients  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s), \mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s), \mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s)$  définis sur l'hypothèse d'un obstacle évanouissant sphérique, a été construit pour tous les 65025 points d'échantillonnage.

L'obstacle  $B^{\text{vrai}}$  à identifier est centré en  $\mathbf{x}^{\text{vrai}} = (2a, 1.2a, -3a)$  (emplacement situé à une distance verticale de  $0.2a$  du point le plus proche de  $\mathcal{G}$ ). Trois formes d'obstacle sont considérées : une sphère (S) de rayon  $0.5a$ , un ellipsoïde horizontal (H) de demi-axes  $(a, 0.5a, 0.5a)$  et un ellipsoïde vertical (V) de demi-axes  $(0.5a, 0.5a, a)$ .

Le rayon estimé  $R^{\text{est}}$  de l'obstacle (valeur au point d'échantillonnage  $\mathbf{x}_s^{\text{est}} \in \mathcal{G}$  tel que  $R(\mathbf{x}^{\text{vrai}}) = \arg \min_{\varepsilon} J_6(\varepsilon; \mathbf{x}^{\text{vrai}})$ ) obtenu pour les trois configurations d'essai  $T^{(1)}, T^{(2)}, T^{(3)}$  avec des données simulées non bruitées et pour trois fréquences  $ka = 0, 5, 1, 2$  est comparé au tableau 3 au rayon de référence  $R^{\text{vrai}}$ , pour les trois géométries d'obstacle (S), (H) and (V). La meilleure estimation de  $R^{\text{vrai}}$  est obtenue pour le cas  $ka = 0, 5$ . Dans tous les cas, l'emplacement de l'obstacle identifié est l'un des deux points de  $\mathcal{G}$  les plus proches de l'emplacement correct  $\mathbf{x}^{\text{vrai}}$ , tel que  $\|\mathbf{x}_s^{\text{est}} - \mathbf{x}^{\text{vrai}}\| = 0.2a$ . Pour les cas (H) et (V), pour lesquels l'obstacle d'essai utilisé pour définir les coefficients  $\mathcal{T}_3(\mathbf{x}_s), \mathcal{T}_5(\mathbf{x}_s), \mathcal{T}_6(\mathbf{x}_s)$  n'a pas la même forme que  $B^{\text{vrai}}$ , le « rayon équivalent »  $R^{\text{vrai}}$  est néanmoins bien estimé, et l'emplacement  $\mathbf{x}_s^{\text{est}}$  est optimal parmi ceux permis par la grille  $\mathcal{G}$ .

Là encore, des exemples similaires, présentant des données bruitées, ont été traités, et les résultats numériques pour l'estimation de  $(R^{\text{est}}, \mathbf{x}^{\text{est}})$  se sont avérés robustes par

**Tableau 3.** Rayon estimé  $R^{est}$  de l'obstacle (valeur au point d'échantillonnage  $\mathbf{x}_s^{est}$  tel que  $J_6(\varepsilon; \mathbf{x}_s^{est})$  est minimum), pour les configurations d'essai  $T^{(1)}$ ,  $T^{(2)}$ ,  $T^{(3)}$  et des données synthétiques sans bruit : sphère (S), ellipsoïde horizontal (H) et ellipsoïde vertical (V). Le rayon de référence  $R^{vrai}$  est celui de la sphère ayant même volume que  $B^{vrai}$ . Une distance  $\|\mathbf{x}_s^{est} - \mathbf{x}^{vrai}\| = 0.2a$  a été trouvée dans tous les cas.

		$R^{est}/R^{vrai} - 1$		
		$T^{(1)}$	$T^{(2)}$	$T^{(3)}$
(S)	$ka = 0.5$	$-4.18e-02$	$-4.20e-02$	$-4.20e-02$
	$ka = 1$	$-1.26e-01$	$-1.26e-01$	$-1.26e-01$
	$ka = 2$	$-3.33e-01$	$-3.34e-01$	$-3.34e-01$
(H)	$ka = 0.5$	$-2.31e-04$	$9.05e-04$	$8.89e-04$
	$ka = 1$	$-1.65e-01$	$-1.65e-01$	$-1.65e-01$
	$ka = 2$	$-4.22e-01$	$-4.22e-01$	$-4.22e-01$
(V)	$ka = 0.5$	$-7.42e-02$	$-7.51e-02$	$-7.51e-02$
	$ka = 1$	$-2.04e-01$	$-2.06e-01$	$-2.06e-01$
	$ka = 2$	$-4.64e-01$	$-4.67e-01$	$-4.67e-01$

rapport au bruit simulé, sauf parfois pour la configuration de test  $T^{(1)}$  (la moins riche en données).

## 5. Conclusions

Les approches présentées sont prometteuses en ce que les expérimentations numériques réalisées à ce jour attestent de leur capacité à fournir un résultat d'identification qualitativement satisfaisant à un coût de calcul de l'ordre d'une à quelques simulations directes, donc nettement inférieur à celui d'une inversion « classique » reposant sur un algorithme de gradient, et très inférieur à une minimisation par algorithme global (par exemple de type évolutionnaire). Il est également important de souligner leur caractère global, via le calcul d'un champ indicateur d'obstacle ou la minimisation globale d'une fonction-coût approchée. Leur combinaison avec des méthodes numériques de type multipôle rapide permet d'améliorer encore la rapidité des calculs numériques nécessaires à l'exploration globale approchée.

De nombreuses questions restent ouvertes, concernant aussi bien la théorie que la mise en oeuvre. La pertinence du champ de sensibilité topologique pour la localisation de défauts est à ce jour fondée sur un argument purement heuristique. Une analyse théorique, peut-être fondée sur les développements aux ordres plus élevés, permettant de mieux expliquer ces résultats, et aussi de définir les conditions sous lesquelles cette

approche fonctionne de manière satisfaisante, reste à faire. Une autre question ouverte est celle de l'identification de caractéristiques matériau d'inclusions à partir de la sensibilité topologique étendue aux inclusions pénétrables, pour laquelle là encore des résultats numériques encourageants sont obtenus (Guzina et Bonnet, 2006, Guzina et Chikichev, 2007) sans qu'une analyse complète soit disponible. Il sera par ailleurs intéressant de formuler et évaluer l'efficacité de l'indicateur en sensibilité topologique pour des mesures vibratoires, le cas d'une fréquence propre étant exclu dans les formulations de sensibilité topologique établies jusqu'ici. On peut aussi s'interroger sur la possibilité de liens entre cette approche et celle reposant sur la densité d'énergie associée à l'erreur en relation de comportement, pour laquelle d'intéressantes capacités à la localisation spatiale de défauts ont été numériquement mises en évidence (Ladeveze *et al.*, 1993, Ladevèze et Chouaki, 1999, Bonnet et Reynier, 1998). Sur le plan numérique, l'application de ce type de sensibilité dans un contexte éléments finis pourrait passer par la définition d'une sensibilité topologique discrète, l'obstacle infinitésimal de la formulation continue étant remplacé par la perturbation des caractéristiques du milieu à l'échelle d'un élément fini. Enfin, l'application à des données réelles de type contrôle non destructif reste à faire. Des extensions à d'autres situations physiques sont par ailleurs actuellement à l'étude, notamment en liaison avec la thermographie infrarouge.

## 6. Bibliographie

- Ammari H., Kang H., *Reconstruction of small inhomogeneities from boundary measurements*, Lecture Notes in Mathematics 1846, Springer-Verlag, 2004.
- Andrieux S., Ben Abda A., « Solving Cauchy problems by minimizing an energy-like functional », *Inverse Problems*, vol. 22, p. 115-133, 2006.
- Bonnet M., « BIE and material differentiation applied to the formulation of obstacle inverse problems. », *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 15, p. 121-136, 1995.
- Bonnet M., *Boundary Integral Equations Methods for Solids and Fluids*, John Wiley and Sons, 1999a.
- Bonnet M., « A general boundary-only formula for crack shape sensitivity of integral functionals. », *C.R. Acad. Sci. Paris, série II*, vol. 327, p. 1215-1221, 1999b.
- Bonnet M., « Boundary element based formulations for crack shape sensitivity analysis », *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, vol. 25, p. 347-362, 2001.
- Bonnet M., « Topological sensitivity for 3D elastodynamic and acoustic inverse scattering in the time domain », *Comp. Meth. in Appl. Mech. Engng.*, vol. 195, p. 5239-5254, 2006.
- Bonnet M., « Inverse acoustic scattering by small-obstacle expansion of misfit function », 2006, in preparation.
- Bonnet M., Bui H. D., Constantinescu A., « Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité », *Mécanique et Industries*, vol. 4, p. 687-697, 2003.
- Bonnet M., Burczyński T., Nowakowski M., « Sensitivity analysis for shape perturbation of cavity or internal crack using BIE and adjoint variable approach », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 39, p. 2365-2385, 2002.

- Bonnet M., Constantinescu A., « Inverse problems in elasticity », *Inverse Problems*, vol. 21, p. R1-R50, 2005. topical review article.
- Bonnet M., Guzina B. B., « Sounding of finite solid bodies by way of topological derivative », *Int. J. Num. Meth. in Eng.*, vol. 61, p. 2344-2373, 2004.
- Bonnet M., Reynier M., « On the estimation of the geometrical support of modelling defects using the distributed error in constitutive equation. », *Inverse Problems, Control and Shape Optimization, Carthage, Tunisie*, p. 65-70, 1998. ,invite.
- Bui H. D., *Fracture mechanics. Inverse problems and solutions*, Springer-Verlag, 2006.
- Chaillat S., Bonnet M., Semblat J. F., « Méthode multipôle rapide pour les éléments de frontière en élastodynamique tridimensionnelle: application à la propagation d'ondes sismiques », *8<sup>e</sup> Colloque National de Calcul des Structures*, Hermes, 2007.
- Colton D., Coyle J., Monk P., « Recent developments in inverse acoustic scattering theory. », *SIAM Review*, vol. 42, p. 369-414, 2000.
- Colton D., Kirsch A., « A simple method for solving inverse scattering problems in the resonance region », *Inverse Problems*, vol. 12, p. 383-393, 1996.
- Colton D., Monk P., « Numerical solution of an inverse scattering problem for acoustic waves », *IMA J. Appl. Math.*, vol. 49, p. 163-184, 1992.
- Constantinescu A., « On the identification of elastic moduli from displacement-force boundary measurements », *Inverse Problems in Engineering*, vol. 1, p. 293-315, 1995.
- Darve E., « The fast multipole method: numerical implementation », *J. Comp. Phys.*, vol. 160, p. 195-240, 2000.
- Eschenauer H. A., Kobelev V. V., Schumacher A., « Bubble method for topology and shape optimization of structures », *Structural Optimization*, vol. 8, p. 42-51, 1994.
- Farhat C., Tezaur R., Djellouli R., « On the solution of three-dimensional inverse obstacle acoustic scattering problems by a regularized Newton method », *Inverse Problems*, vol. 18, p. 1229-1246, 2002.
- Feijóo G. R., « A new method in inverse scattering based on the topological derivative », *Inverse Problems*, vol. 20, p. 1819-1840, 2004.
- Gallego R., Rus G., « Identification of cracks and cavities using the topological sensitivity boundary integral equation », *Comp. Mech.*, vol. 33, p. 154-163, 2004.
- Garreau S., Guillaume P., Masmoudi M., « The topological asymptotic for PDE systems: the elasticity case. », *SIAM J. Contr. Opt.*, vol. 39, p. 1756-1778, 2001.
- Greengard L., Rokhlin V., « A new version of the fast multipole method for the Laplace equation in three dimensions », *Acta Numerica*, vol. 6, p. 229-270, 1997.
- Guzina B. B., Bonnet M., « Topological derivative for the inverse scattering of elastic waves », *Quart. J. Mech. Appl. Math.*, vol. 57, p. 161-179, 2004.
- Guzina B. B., Bonnet M., « Small-inclusion asymptotic of misfit functionals for inverse problems in acoustics », *IP*, vol. 22, p. 1761-1785, 2006.
- Guzina B. B., Chikichev I., « From imaging to material identification: a generalized concept of topological sensitivity », *J. Mech. Phys. Solids*, vol. 55, p. 245-279, 2007.
- Guzina B. B., Nintcheu Fata S., Bonnet M., « On the stress-wave imaging of cavities in a semi-infinite solid », *Int. J. Solids Struct.*, vol. 40, p. 1505-1523, 2003.

- Ladevèze P., Chouaki A., « Application of a *posteriori* error estimation for structural model updating », *Inverse Problems*, vol. 15, p. 49-58, 1999.
- Ladeveze P., Reynier M., Nedjar D., « Parametric correction of finite element models using modal tests. », in H. D. B. M. Tanaka (ed.), *Inverse problems in engineering mechanics*, Springer-Verlag, p. 91-100, 1993.
- Lambert M., Bonnet M., Lesselier D., « Introduction à la diffraction inverse en acoustique et élasticité », in M. Bruneau, C. Potel (eds), *Matériaux et acoustique*, Hermes, p. 82-101, 2006.
- Litman A., Lesselier D., Santosa F., « Reconstruction of a two-dimensional binary obstacle by controlled evolution of a level-set », *Inverse Problems*, vol. 14, p. 685-706, 1998.
- Margonari M., Bonnet M., « Fast multipole method applied to the coupling of elastostatic BEM with FEM », *Computers and Structures*, vol. 83, p. 700-717, 2005.
- Masmoudi M., Pommier J., Samet B., « The topological asymptotic expansion for the Maxwell equations and some applications », *Inverse Problems*, vol. 21, p. 547-564, 2005.
- Michalewicz Z., Fogel D. B., *How to solve it: modern heuristics*, Springer-Verlag, 2004.
- Nemitz N., Méthode multipôle rapide et sensibilité topologique pour l'identification approchée de défauts à partir de données de type acoustique, thèse de doctorat, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2006.
- Nemitz N., Bonnet M., « Topological sensitivity and FMM-accelerated BEM applied to 3D acoustic inverse scattering », *Engng. Anal. with Bound. Elem.*, 2007. (accepté).
- Nintcheu Fata S., Guzina B. B., « A linear sampling method for near-field inverse problems in elastodynamics », *Inverse Problems*, vol. 20, p. 713-736, 2004.
- Nishimura N., « Fast multipole accelerated boundary integral equation methods », *Appl. Mech. Rev.*, vol. 55, p. 299-324, 2002.
- Pommier J., Samet B., « The topological asymptotic for the Helmholtz equation with Dirichlet condition on the boundary of an arbitrarily shaped hole », *SIAM J. Control Optim.*, vol. 43, p. 899-921, 2005.
- Potthast R., « A survey on sampling and probe methods for inverse problems », *Inverse Problems*, vol. 22, p. R1-R47, 2006.
- Samet B., Amstutz S., Masmoudi M., « The topological asymptotic for the Helmholtz equation », *SIAM J. Control Optim.*, vol. 42, p. 1523-1544, 2004.
- Schumacher A., Topologieoptimierung von Bauteilstrukturen unter Verwendung von Lochpositionierungskriterien, thèse de doctorat, Univ. of Siegen, Germany, 1995.
- Sokolowski J., Zochowski A., « On the topological derivative in shape optimization. », *SIAM J. Control Optim.*, vol. 37, p. 1251-1272, 1999.
- Sylvand G., « Complex industrial computations in electromagnetism using the fast multipole method », in G. Cohen, E. Heikkola, P. Joly, P. Neittaanmäki (eds), *Mathematical and numerical methods aspects of wave propagation*, Springer-Verlag, p. 657-662, 2003.
- Tarantola A., *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*, SIAM, 2005.