



HAL
open science

Modèles numériques multi-échelles du comportement anélastique des matériaux hétérogènes et prise en compte des aspects probabilistes

Adnan Ibrahimbegovic, Sergiy Melnyk, Martin Hautefeuille, Jean-Baptiste Colliat, Anna Kučerová

► **To cite this version:**

Adnan Ibrahimbegovic, Sergiy Melnyk, Martin Hautefeuille, Jean-Baptiste Colliat, Anna Kučerová. Modèles numériques multi-échelles du comportement anélastique des matériaux hétérogènes et prise en compte des aspects probabilistes. 8e Colloque national en calcul des structures, CSMA, May 2007, Giens, France. hal-01493129

HAL Id: hal-01493129

<https://hal.science/hal-01493129>

Submitted on 21 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Public Domain

Modèles numériques multi-échelles du comportement anélastique des matériaux hétérogènes et prise en compte des aspects probabilistes

**Adnan Ibrahimbegovic, S. Melnyk, M. Hautefeuille, J-B. Colliat et
A. Kucerova**

*Ecole Normale Supérieure de Cachan, LMT,
61, avenue de Président Wilson, 94235 Cachan, France
e-mail: ai@lmt.ens-cachan.fr, fax. +33147402240*

RÉSUMÉ. Dans ce travail on présente un modèle numérique pour les matériaux hétérogènes. Le point essentiel de ce travail est l'utilisation de maillages structurés incluant des comportements de chaque phase non-linéaires. Ceci est rendu possible par l'enrichissement de la base cinématique par la méthode des Modes Incompatibles. Avec un tel modèle nous pouvons introduire et tenir compte de la variabilité géométrique à une échelle micro-scopique. Le problème stochastique obtenu est résolu par la méthode de Monte Carlo. On en déduit ainsi les paramètres globaux à une échelle macro-scopique.

ABSTRACT. In this work we discuss the Finite Elements Method using the embedded discontinuity of strain and displacement fields, which can handle the problem of localized failure in heterogeneous materials by using structured (regular) meshes. On the chosen 2D model problem we develop all the pertinent details of the finite element approximation. With such a modeling in hand we also presented how to take into account for the variability of the geometrical description at the meso-scale level. In this work we employed the classical Monte-Carlo method in order to produce the statistical moments of the desired quantities.

MOTS-CLÉS : Discontinuité de déformations, discontinuité de déplacements, méthode des Modes Incompatibles, méthode de Monte Carlo.

KEYWORDS: Embedded discontinuity, discontinuity of strain, discontinuity of displacement, Monte Carlo simulation.

1. Introduction

Dans ce travail nous nous intéressons à l'analyse du comportement anélastique des matériaux hétérogènes jusqu'à la rupture. Pour pouvoir modéliser un tel comportement d'une manière plus prédictive, nous proposons une approche multi-échelle où l'interprétation des mécanismes anélastiques est cherchée à l'échelle micro. Une attention particulière est portée au cas où les échelles restent couplées, soit par manque de validité des hypothèses classiques concernant la taille du volume élémentaire représentatif, soit par la nécessité de prendre en compte un couplage avec des phénomènes autres que la mécanique.

La première partie de ce travail est consacrée aux problèmes de représentation de la microstructure, en prenant en compte les hétérogénéités. Nous avons exploré l'utilisation des modèles discrets (Ibrahimbegovic *et al.*, 2004) et des modèles éléments finis (Ibrahimbegovic *et al.*, 2007) qui sont avantageux par rapport aux modèles XFEM pour la représentation de la rupture des structures massives. Le problème choisi ici est un matériau modèle constitué de deux phases, une avec un comportement plastique et l'autre avec endommagement ou des vides.

Nous présentons finalement une approche stochastique (Colliat *et al.*, n.d.) pour modéliser la rupture des matériaux quasi fragiles capable de reproduire l'effet d'échelle avec les modes de rupture appropriés à chaque structure. Cette dernière nécessite un modèle adapté représentant à la fois la rupture localisée et diffuse (zone du processus de rupture) ainsi qu'une description probabiliste de l'hétérogénéité du matériaux par une longueur de corrélation.

2. Modèle plastique pour les matériaux hétérogènes

2.1. Modèle avec un maillage structuré

Dans le cas bidimensionnel on s'intéresse à un matériau hétérogène avec des inclusions (rigides ou vides). La position des inclusions est fixée ce que conduit à des positions connues pour les interfaces. Le figure 1 représente l'élément standard à trois noeuds avec deux phases. Pour représenter deux comportements diffé-

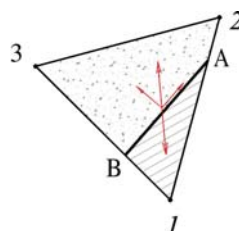


Figure 1. *Élément triangulaire à 3 noeuds avec deux phases.*

rents par un seul élément nous introduisons une discontinuité du champ de déformations. Ceci permet de prendre en compte un comportement élasto-plastique (du

type Drucker-Prager) pour la matrice et un comportement élastique pour les vides (ou rigide-endommageable pour les inclusions rigides). Pour représenter l'ouverture de l'interface entre les deux phases ou le glissement d'une phase par rapport à une autre (Simo *et al.*, 1993), nous introduisons une discontinuité du champ de déplacements. Ces deux discontinuités sont prises en compte par la Méthode des Modes Incompatibles (Wilson *et al.*, 1973), (Ibrahimbegovic *et al.*, 1991) qui conduit aux même nombre de degrés de liberté. Les enrichissements sont apportés à l'élément standard CST (Figure 1). Cet élément est divisé en deux sous-domaines par l'interface dont la position est définie en utilisant deux paramètres scalaires : $\theta_1, \theta_2 \in (0, 1)$.

L'introduction de ces discontinuités conduit à un enrichissement de l'interpolation du champ de déplacements en utilisant les modes incompatibles

$$\mathbf{u}^h(x, t) = \sum_{a=1}^3 N_a(x) \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{M}_I^\alpha(x) \alpha_I(t) + \mathbf{M}_I^\beta(x) \beta_I(t) + \mathbf{M}_{II}(x) \alpha_{II}(t) \quad [1]$$

La fonction de forme \mathbf{M}_I du premier mode incompatible (Figure 2a.) correspondant à la discontinuité du champ de déplacements (Ibrahimbegovic *et al.*, 2003a) peut être écrite :

$$\mathbf{M}_I(x, y) = H_{\Gamma_S} - \sum_{a \in \Omega^+} N_a \quad [2]$$

où N_a représente les fonctions de formes classiques pour l'élément CST et H_{Γ_S} est la fonction de Heaviside.

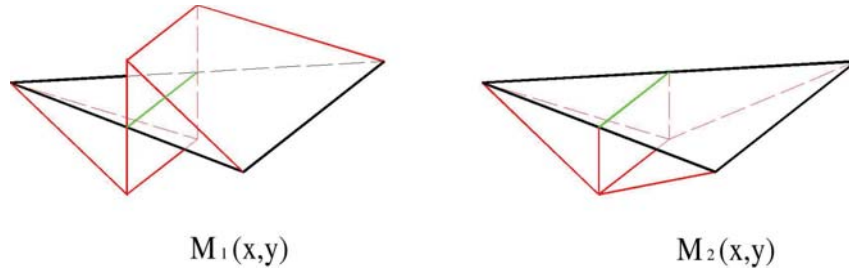


Figure 2. Modes incompatibles correspondant à la discontinuité du champ de déplacements a) et de déformations b) de l'élément CST

La fonction de forme \mathbf{M}_{II} du deuxième mode incompatible correspondant à la discontinuité du champ de déformations (voir Figure 2b.) est une fonction linéaire des deux coordonnées x et y (Ibrahimbegovic *et al.*, 2007)

Finalement, le champ de déformations se réécrit de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \varepsilon^h(x, t) &= \sum_{a=1}^3 \mathbf{B}_a(x) \mathbf{d}_a(t) + \mathbf{G}_{II}(x) \alpha_{II}(t) \\ &+ (\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{n}) \mathbf{G}_{I_r}^\alpha(x) \alpha_I(t) + \frac{1}{2} [\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m}^T \otimes \mathbf{n}] \mathbf{G}_{I_r}^\beta(x) \beta_I(t) \\ &= \mathbf{Bd} + \mathbf{G}_{II} \alpha_{II} + (\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{n}) \mathbf{G}_{I_r}^\alpha \alpha_I + \frac{1}{2} [\mathbf{n}^T \otimes \mathbf{m} + \mathbf{m}^T \otimes \mathbf{n}] \mathbf{G}_{I_r}^\beta \beta_I \end{aligned}$$

où $\mathbf{B}(x, y)$ est la dérivée des fonctions de formes de l'élément CST, $\mathbf{G}_I(x, y)$ sont les dérivées des fonctions de formes de premier mode incompatible et $\mathbf{G}_{II}(x, y)$ est la dérivée de deuxième mode.

2.2. Opérateur tangent pour la rupture à l'interface

Le système des équations d'équilibre contient quatre parties, où l'équation (3a) représente l'équilibre global et les équations (3b) à (3d) l'équilibre local. Les équations (3b) et (3c) sont résolues dans le cas où la discontinuité de déplacement serait activée dans la direction normale ou tangente.

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{e=1}^{nel} [f^{int} - f^{ext} = 0] \\ \mathbf{h}_I^{\alpha,e} = 0 \\ \mathbf{h}_I^{\beta,e} = 0 \\ \mathbf{h}_{II}^e = 0 \end{array} \right. \implies \left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \sigma d\Omega - \int_{\Omega^e} N^T b d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_{I_v}^{\alpha,T} \sigma d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_{I_v}^{\beta,T} \sigma d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega^e} \mathbf{G}_{II}^T \sigma d\Omega = 0 \end{array} \right. \quad [3]$$

Pour résoudre le système global (3) on utilise la condensation statique (Wilson, 1974). Les trois dernières équations sont résolues au niveau local, ce qui nous amène au même nombre d'inconnues globales.

3. Aspects probabilistes pour la rupture des matériaux hétérogènes

L'objectif principal de cette partie est de confirmer la robustesse des maillages structurés. Nous considérons un matériau hétérogène (par exemple une matrice à base cimentaire) à l'échelle meso. A cette échelle nous supposons que la microstructure est biphasique avec une phase solide et des vides. La réponse macroscopique est dépendante de la fraction volumique de vide (nombre et tailles des inclusions) ainsi que de la position des inclusions. Autrement dit les paramètres macroscopiques comme

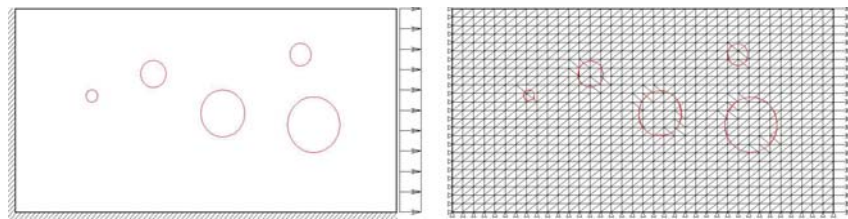


Figure 3. Structure à l'échelle meso avec les inclusions a) et le maillage correspondant b)

le module de Young ou la limite d'élasticité sont caractérisés à l'échelle meso. En particulier, la matrice est supposée modélisée par le matériau élastique-parfaitement plastique avec le critère de Drucker-Prager. Les vides sont purement élastiques et modélisés avec une faible valeur de module de Young.

3.1. Description de la géométrie à l'échelle meso et Intégration stochastique

Dans cette sous-partie nous présentons la description de la géométrie et les hypothèses principales. La taille du domaine d'étude micro est $3.6 \times 1.8 \text{ cm}^2$ et les inclusions sont positionnées suivant un processus de Gibbs. Pour des raisons de maillage, les rayons sont compris dans un intervalle entre 0.01 et 0.3 cm.

Pour caractériser les propriétés mécaniques du matériau on utilise une approche Bayésienne (Jaynes, 2003) en combinaison avec le principe de maximum d'entropie (Shannon, 1948). Dans ce cas les deux premiers moments statistiques de chacune des propriétés doivent être calculés. Le moment statistique d'une variable aléatoire représentant l'intégrale d'une fonctionnelle de cette variable aléatoire dans un espace probabiliste, nous avons utilisé la méthode de Monte Carlo (Caflisch, 1998) pour effectuer cette intégration.

3.2. Résultats numériques

Afin de réaliser l'intégration par la méthode de Monte-Carlo, nous avons procédé à $Z = 9999$ points d'intégration, chacun correspondant à une réalisation d'une meso-structure. Ces Z calculs ont été distribués entre 9 processeurs. La Figure 4 montre la

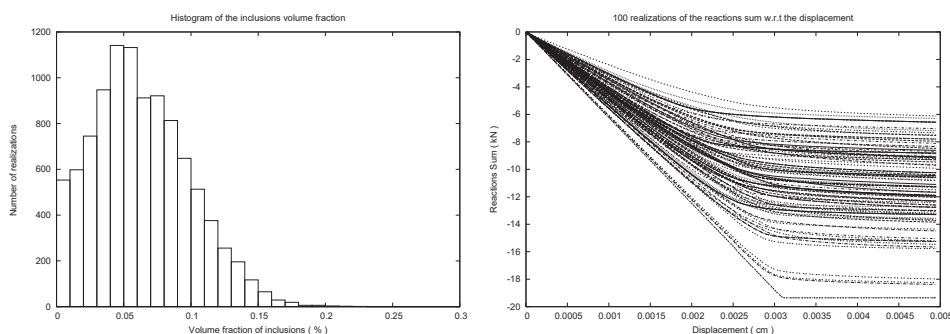


Figure 4. Histogramme de la fraction volumique a) et 100 réalisations particulières de calcul b)

répartition fréquentielle de la fraction volumique (le rapport de volume des vides sur le volume total) obtenue pour les Z réalisations. La Figure 4b présente un échantillon de 100 réponses macroscopiques.

4. Conclusion

La modélisation par Élément Finis d'une structure hétérogène conduit à des maillages complexes, avec dans la plupart des cas des éléments distordus. Ceci conduit à des matrices de raideur mal conditionnées et un temps de calcul important. Dans ce travail nous avons proposé d'utiliser des maillages structurés avec des éléments biphasiques. Pour cela nous nous basons sur l'élément standard CST avec une cinématique

enrichie en utilisant la Méthode de Modes Incompatibles. Ce type de maillage structuré est ensuite utilisé pour la modélisation d'une structure poreuse à l'échelle meso. Cette géométrie est obtenue en utilisant un processus de Gibbs modifié. Pour la résolution d'un tel problème et le calcul des moments statistiques nous avons recouru à la méthode de Monte Carlo en effectuant 9999 réalisations. Ce résultat nous permet de caractériser les propriétés macroscopiques de notre matériau.

5. Bibliographie

- Caffisch C. A., « Monte Carlo and quasi-Monte Carlo Methods », *Acta Numerica*, vol. 7, p. 1-49, 1998.
- Colliat J., Hautefeuille M., Ibrahimbegovic A., « Stochastic Approach to quasi-brittle failure and size effect », *submitted to Comput. Rend. Mech.*, n.d.
- Ibrahimbegovic A., Brancherie D., « Combined hardening and softening constitutive model of plasticity : precursor to shear slip line failure », *Comp. Mechanics*, vol. 31, p. 88-100, 2003a.
- Ibrahimbegovic A., Knopf-Lenoir C., Kucerova A., Villon P., « Optimal design and optimal control of elastic structures undergoing finite rotations and deformations », *Int. J. Numer. Methods Eng.*, vol. 61, p. 2428-2460, 2004.
- Ibrahimbegovic A., Markovic D., « Strong coupling methods in multiphase and multiscale modeling of inelastic behavior of heterogeneous structures », *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, vol. 192, p. 3089-3107, 2003b.
- Ibrahimbegovic A., Melnyk S., « Embedded discontinuity finite element method for modeling of localized failure in heterogeneous materials with structured mesh : an alternative to extended finite element method », *Comp. Mechanics*, 2007.
- Ibrahimbegovic A., Wilson E., « A modified method of incompatible modes », *Communications in Applied Numerical Methods*, vol. 7, p. 187-194, 1991.
- Jaynes E. T., *Probability Theory : the logic of a science*, Cambridge University Press, 2003.
- Shannon C. E., « Complementary energy based FE modeling of coupled elasto-plastic and damage behavior for continuum microstructure computations », *Bell System Technical Journal*, vol. 27, p. 379-423 and 623-656, 1948.
- Simo J., Oliver J., Armero F., « An analysis of strong discontinuity induced by strain softening solution in rate independent solids », *Comp. Mechanics*, vol. 12, p. 277-296, 1993.
- Wilson E., « The static condensation algorithm », *Int. J. Num. Meth. Eng.*, vol. 8, p. 199-203, 1974.
- Wilson E., Taylor R., Doherty W., Ghaboussi J., « Incompatible displacement models », *Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics*, vol. , p. 43-57, 1973.