
Identification des Paramètres Thermiques de Polymères par Lecture Inverse de la Méthode des Eléments Finis

K. Atchonouglo* — C. Vallée* — J.-C. Dupré* — Z.-Q. Feng**

** Laboratoire de Mécanique des Solides
Université de Poitiers
Bd Marie et Pierre Curie
86962 Futuroscope Chasseneuil Cedex
{atchonouglo, vallee, dupre}@lms.univ-poitiers.fr*

*** Laboratoire de Mécanique et d'Energétique d'Evry
Université d'Evry-Val d'Essonne
40 rue du Pelvoux, 91020 Evry, France
zhi-qiang.feng@iup.univ-evry.fr*

RÉSUMÉ. Ce papier présente une méthode d'identification de la conductivité λ et de la chaleur volumique ρc d'un polymère par une approche inverse de la méthode des éléments finis. L'étude du système linéaire obtenue par la méthode des moindres carrés permet de conclure sur la possibilité de l'identification. L'acquisition du champ de températures par caméra infra-rouge de pas spatial égal à un pixel permet d'obtenir des résultats très précis.

ABSTRACT. This paper sets out an identification method for the Fourier's conductivity λ and the heat capacity per unit volume ρc of a polymer material. An inverse reading of the F.E.M. allows to perform this identification by solving a linear algebraic system coming from a least square method. The temperatures field acquired by a one pixel spartial step infrared camera leads to very accurate results.

MOTS-CLÉS : Conduction de la Chaleur, Identification en Thermique, Éléments finis, Méthode Inverse

KEYWORDS: Heat Conduction, Thermal Identification, Finite Elements, Inverse Method

1. Introduction

Lorsqu'un matériau subit une sollicitation mécanique il subit aussi une variation de la température. Les processus de déformation induisent des effets thermiques et énergétiques qui doivent être correctement prédits afin de bien modéliser le comportement mécanique. Pour des essais quasi-statiques, les variations de température induites par la déformation restent souvent faibles. Le fait de négliger ces variations élimine toute possibilité d'effectuer un bilan d'énergie complet puisque ces petites variations de température induisent de grandes variations d'énergie. Pour obtenir des informations complémentaires à la réponse mécanique, il est nécessaire d'effectuer un bilan énergétique en s'appuyant sur la thermodynamique des processus irréversibles. Ce bilan énergétique nécessite la connaissance de la conductivité λ et de la chaleur spécifique ρc intervenant dans la conduction de la chaleur (Germaneau *et al.*, 2005).

Les études des phénomènes photoacoustiques par Bell en 1880, reprises par Parker dans la méthode flash, ont été les premières investigations pour identifier la diffusivité thermique. Depuis les années 1980, plusieurs études ont donné un élan considérable aux méthodes inverses en thermique : Hensel applique les théories inverses à l'ingénierie (Hensel, 1978), Kurpysz détermine le flux de chaleur (Kurpysz *et al.*, 1995), Baillis mesure la diffusivité thermique $\lambda/\rho c$ de mousses cellulaires de carbone (Baillis *et al.*, 2000). Quelques auteurs ont étudié la sensibilité des paramètres λ et ρc (Baillis *et al.*, 2000, Ammous *et al.*, 2003, Vozar *et al.*, 1997). Dans la littérature, peu de travaux sont destinés à l'identification simultanée de la conductivité et de chaleur spécifique.

Dans cet article, nous utilisons une approche inverse de la méthode des éléments finis. Les matrices élémentaires sont calculées sans approximation. L'algorithme d'identification est validé à partir de champs de température simulés. L'identification des paramètres thermiques d'un polymère est réalisée à partir d'un champ de température acquis par caméra infra-rouge. L'acquisition par caméra infra-rouge permet d'obtenir un maillage éléments finis beaucoup plus fin que ne le permet une série de thermocouples.

2. Problème Directe

Dans une plaque de faible épaisseur, nous étudions la propagation de la chaleur suivant un segment rectiligne de longueur L . Nous nous limitons donc à une étude thermique monodimensionnelle. L'abscisse sur la ligne est notée x , λ désigne la conductivité thermique, c est la chaleur spécifique et ρ la masse volumique.

Le champ de températures $T(x, t)$ est régi par l'équation

$$\rho c \frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} \quad x \in [0, L] \quad [1]$$

satisfaisant à chaque instant t . Les conditions aux limites sont

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial x}(0, t) = q(t) \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial x}(L, t) = r(t) \quad [2]$$

La condition initiale est $T(x, 0) = T_0(x)$ $x \in [0, L]$

Une solution approchée du problème direct peut être obtenue en appliquant la méthode des éléments finis (Bergheau *et al.*, 2004).

Pour fixer les notations, rapellons brièvement sa mise en oeuvre en dimension 1. La discrétisation par éléments finis s'appuie sur un découpage du segment $[0, L]$ en n éléments égaux de longueur $p = L/n$. On définit $n + 1$ fonctions test $\phi_i(x)$, $i = 0, \dots, n$.

La méthode consiste à interpoler linéairement le champ de température à chaque instant t : $T(x, t) = \sum_{i=0}^n \theta_i(t) \phi_i(x)$. Les coefficients $\theta_i(t)$ s'interprètent directement comme la valeur numérique approchée de $T(x, t)$ en $x = ip$. En projetant l'équation [1] sur les fonctions de bases $\phi_i(x)$, puis en intégrant sur l'intervalle $[0, L]$, on aboutit à une équation différentielle linéaire satisfaite par le vecteur température $\theta(t) = [\theta_0(t) \ \theta_1(t) \ \dots \ \theta_n(t)]^T$:

$$\rho c C \frac{d\theta}{dt} + \lambda K \theta(t) = F(t) \quad [3]$$

où les matrices C et K , le vecteur flux $F(t)$ ont pour composantes :

$$C_{ij} = \int_0^L \phi_i(x) \phi_j(x) dx, \quad K_{ij} = \int_0^L \phi'_i(x) \phi'_j(x) dx, \quad F(t) = [q(t) \ 0 \ \dots \ 0 \ -r(t)]^T.$$

REMARQUE. — La matrice C est symétrique, tridiagonale et défini-positive. La matrice K est symétrique, tridiagonale et positive (Kurpisz *et al.*, 1995).

Le noyau de K est constitué des vecteurs colinéaires au vecteur $[1 \ 1 \ \dots \ 1]^T$.

Le problème direct consiste à trouver $\theta(t)$ solution de [3] pour la condition initiale

$$\theta(0) = [T_0(0) \ T_0(p) \ \dots \ T_0(ip) \ \dots \ T_n(L)]^T \quad [4]$$

3. Problème Inverse

Le vecteur température $\theta(t)$ et le vecteur flux $F(t)$ sont enregistrés au cours d'une expérience de durée t_f ; il s'agit de trouver les valeurs optimales des paramètres λ et ρc pour lesquelles le système linéaire [3] est satisfait.

3.1. Méthode des moindres carrés

Pour identifier λ et ρc , nous minimisons la forme quadratique

$$J(\lambda, \rho c) = \frac{1}{2} \int_0^{t_f} \left\| \rho c C \frac{d\theta(t)}{dt} + \lambda K \theta(t) - F(t) \right\|^2 dt$$

par rapport à λ et ρc . Ceci revient à résoudre le système linéaire

$$\left(\int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \rangle & \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle \\ \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle & \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \right) \begin{bmatrix} \rho c \\ \lambda \end{bmatrix} = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \langle C \frac{d\theta}{dt}, F \rangle \\ \langle K\theta, F \rangle \end{bmatrix} dt$$

Notons A la matrice symétrique du système linéaire et f le vecteur du second membre

$$A = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \langle C \frac{d\theta}{dt}, C \frac{d\theta}{dt} \rangle & \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle \\ \langle C \frac{d\theta}{dt}, K\theta \rangle & \langle K\theta, K\theta \rangle \end{bmatrix} dt \quad f = \int_0^{t_f} \begin{bmatrix} \langle C \frac{d\theta}{dt}, F \rangle \\ \langle K\theta, F \rangle \end{bmatrix} dt$$

Identifier les paramètres thermiques λ et ρc revient à déterminer le vecteur $u = [\rho c \ \lambda]^T$ solution de l'équation linéaire

$$Au = f \quad [5]$$

REMARQUE. — L'équation [5] est mal conditionnée. Les composantes A_{11} , A_{12} et A_{22} de la matrice A sont respectivement homogènes à $L^2\theta^2/t_f$, θ^2/t_f et $\theta^2 t_f/L^2$. Il en est de même pour les vecteurs u et f . Par changement d'échelle, nous avons rendu homogène la matrice A , les vecteurs u et f .

3.2. Existence et unicité de la solution

Propriété : La matrice symétrique A du système linéaire [5] est défini-positive.

En effet, pour $V \in \mathbb{R}^2$, $\langle AV, V \rangle = \int_0^{t_f} \|V_1 C \frac{d\theta}{dt} + V_2 K\theta\|^2 dt$.

Par suite $\langle AV, V \rangle = 0 \Leftrightarrow \forall t \in [0, t_f], \exists V \in \mathbb{R}^2, V_1 C d\theta/dt + V_2 K\theta = 0$. Le vecteur $\theta(t)$ étant solution de [3], on en déduit que $V_1 = V_2 = 0$.

La matrice A est donc défini-positive, et le système [5] admet une et une seule solution. La résolution de [5] par des méthodes classiques de résolution de systèmes linéaires permet de déterminer le vecteur u et, par suite, les paramètres thermiques λ et ρc .

4. Validation de l'algorithme

Pour valider l'algorithme, nous simulons le vecteur température $\theta(t)$ et le vecteur flux $F(t)$ par résolution du [3] pour des conditions initiales [4] bien. Nous avons choisi $\lambda = 0.4 W.m^{-1}.^\circ C^{-1}$ et $\rho c = 1.625 \cdot 10^6 J.m^{-4}.^\circ C^{-1}$. Le flux $r(t)$ a été choisi nul et le flux $q(t)$ a été choisi constant $q = 397 W.m^{-2}$, $L = 0.04 m$. Un bruit blanc d'écart-type $\sigma = 0.02^\circ C$ est imposé sur le vecteur température conformément aux précisions des caméras infra-rouges actuelles et une erreur systématique $\Delta q = 39.7 W.m^{-2}$ sur le flux qui est lié à la puissance fournie à l'éprouvette dans les conditions expérimentales.

Tableau 1. Résultats de la Simulation

Nbre de noeuds	Simulation non brutée		Simulation brutée			
$n + 1$	λ	$\rho c(10^6)$	λ	$\Delta\lambda$	ρc	$\Delta\rho c(10^6)$
61	0.4	1.631	0.405	± 0.018	1.667	± 0.049
71	0.4	1.632	0.396	± 0.016	1.652	± 0.056
81	0.4	1.632	0.386	± 0.028	1.618	± 0.07

Les conditions de stabilité imposent une relation entre le pas temporel Δt et le pas spatial p (Bergheau *et al.*, 2004, Greenberg, 1978, Kurpisz *et al.*, 1995) :

$$p^2 \leq \frac{3\lambda\Delta t}{\rho c}$$

Les résultats obtenus pour les valeurs identifiées sont donnés par le tableau 1. On en déduit que les estimations sont plus précises pour $n = 70$.

5. Identification à partir de champs de température expérimentaux

Le spécimen est constitué de deux plaques de propriétés thermiques, de nature et de dimensions identiques. Une résistance chauffante est confinée entre les deux plaques. Vu l'homogénéité des deux éprouvettes, une seule zone sera étudiée. Une caméra de type FLIR SC3000 à matrice de détecteurs QWIP refroidie par cycle Stirling est utilisée pour l'acquisition du champ de températures. Le domaine spectral est de 8 à 9 μm , la sensibilité d'après les données techniques est inférieure à $0.02^\circ C$

Le spécimen est peint en noir mat afin de le considérer comme un corps noir avec une émissivité égale à 1. Les éprouvettes sont suffisamment longues pour que le flux en $x = L$ soit considéré comme nul. Dans ces conditions expérimentales, le flux est la puissance fournie par le générateur électrique, donc $q(t)$ est constant.

Deux éprouvettes ont été testées. L'une de polyéthylène semi-amorphe ($\lambda = 0.4 W.m^{-1}.^\circ C^{-1}$ et $\rho c = 1.625 \cdot 10^6 J.m^{-4}.^\circ C^{-1}$) de 1mm d'épaisseur et l'autre de polycarbonate ($\lambda = 0.19 W.m^{-1}.^\circ C^{-1}$ et $\rho c = 1.66 \cdot 10^6 J.m^{-4}.^\circ C^{-1}$) d'épaisseur 6mm.

La carte thermique du polyéthylène est donnée par la figure 1.

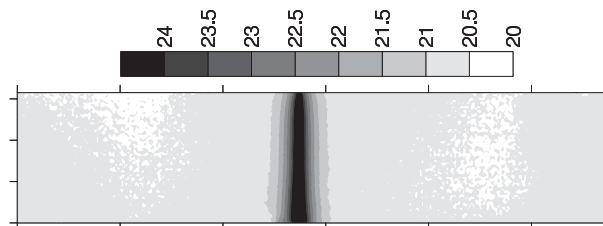


Figure 1. Carte thermique du polyéthylène semi-amorphe

Tableau 2. Résultats Expérimentaux

matériaux testés	λ Identifié	$\rho c(10^6)$ Identifié
Polyéthylène semi-amorphe	0.41 ± 0.015	1.641 ± 0.09
Polycarbonate	0.18 ± 0.017	1.710 ± 0.07

6. Conclusion

L'acquisition par caméra infrarouge permet d'avoir une bonne mesure du champ de température et par suite d'avoir de bonnes estimations de λ et ρc par la méthode inverse. Les paramètres sont déterminés même pour des variations de températures très faibles. Les études de précisions ont montré la stabilité de la méthode d'identification.

7. Bibliographie

- Ammous A., Sellami F., Ammous K., Morel H., Allard B., Chante J.-P., « Developing an equivalent thermal model for discrete semiconductor packages », *International Journal of Thermal Sciences*, vol. 42, p. 533-539, 2003.
- Baillis D., Laurent M., Raynaud M., Gervais P., « Méthode Flash appliquée aux mousses de carbone », *Congrès Français de Thermique*, Lyon, 15-17 mai, 2000.
- Bergheau J.-M., Fortunier R., *Simulation numérique des transferts thermiques par éléments finis*, Editions Hermès, Paris, 2004.
- Germaneau A., Dupré J.-C., « Etude des dissipations thermiques sur polymères, application aux couplages thermomécaniques », *Congrès Français de Mécanique*, Troyes, septembre, 2005.
- Greenberg M. D., *Foundation of applied mathematics*, Prentice-Hall INC, Englewood Cliffs, N. J., 1978.
- Hensel E., *Inverse theory and applications for engineers*, Prentice-Hall INC, Englewood Cliffs, N. J., 1978.
- Kurpisz K., Nowak A. J., *Inverse Thermal Problems*, Computational Mechanics, 1995.
- Vozàr L., Srámková T., « Two data reduction methods for evaluation of thermal diffusivity from step-heating measurement », *Int. J. Heat Mass Transfert*, vol. 40, n° 7, p. 1647-1657, 1997.