



HAL
open science

Zones “ menottables ” sur un maillage 3D

Aldo Gonzalez-Lorenzo, Jean-Luc Mari

► **To cite this version:**

Aldo Gonzalez-Lorenzo, Jean-Luc Mari. Zones “ menottables ” sur un maillage 3D. Journées du Groupe de Travail en Modélisation géométrique (GTMG 2017), Mar 2017, Cachan, France. hal-01493023

HAL Id: hal-01493023

<https://hal.science/hal-01493023v1>

Submitted on 20 Mar 2017

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Zones « menottables » sur un maillage 3D

Aldo Gonzalez-Lorenzo et Jean-Luc Mari

Aix-Marseille Université, CNRS, LSIS UMR 7296, Marseille (France)

Résumé

Un objet peut contenir des zones autour desquelles on peut attacher une chaîne sans qu'elle puisse être enlevée. Le poignet ou le cou en sont des exemples sur le corps humain. Nous appelons ces zones « menottables ». Dans cet article nous formalisons mathématiquement cette notion sur des maillages 3D. Cette définition donne une visualisation naturelle des zones « menottables ». De plus, nous présentons une notion de persistance des zones « menottables » qui permet de distinguer les plus importantes et d'obtenir une signature géométrique de l'objet.

An object can contain zones where a chain can be tied without being removable. The wrist or the neck are examples in the human body. We call this zones “handcuffable”.

We formalize in this paper this notion over a three-dimensional mesh. This definition provides a natural visualization of the “handcuffable” zones. Moreover, we present a notion of persistence of “handcuffable” zones which allows us to distinguish the most relevant ones and to obtain a geometric signature of the object.

Mots-clés : maillage, zone menottable, persistance

1. Introduction

Quel est le point commun entre des menottes, une corde de pendu, une ceinture et un piercing ? Ce sont des objets non élastiques avec une partie circulaire attachée à une partie du corps depuis laquelle on ne peut pas les enlever. Nous appelons ces zones (poignet, cou, taille et orifice) « menottables » (voir la Figure 1).

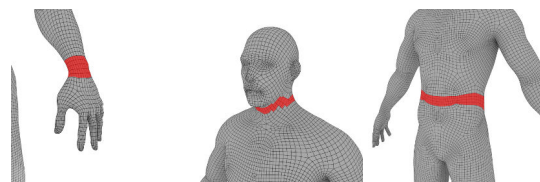


Figure 1: Trois zones menottable sur le corps humain : le poignet, le cou et la taille.

Considérons un objet plongé dans l'espace euclidien et une courbe fermée qui ne l'intersecte pas. Si on déplace cette courbe dans l'espace, sans changer sa longueur ni entrer dans l'objet, on pourra l'emmener arbitrairement loin à

moins qu'elle se trouve dans une zone menottable. On peut apprécier alors que la notion de « menottabilité » dépend d'un paramètre : la longueur de la courbe.

De plus, il est possible de mesurer la menottabilité d'une zone en considérant toutes les longueurs possibles. Il est plus difficile d'enlever une corde de pendu qu'une ceinture, puisqu'il faut un plus grand incrément de la longueur pour pouvoir l'enlever.

Ces notions peuvent avoir des applications en robotique pour détecter par où il faut tenir un objet. Elles peuvent aussi être utiles en conception assistée par ordinateur pour modéliser de pièces mécaniques qui doivent s'accrocher entre elles.

Dans la Section 2 nous présentons la définition de ces notions dans un contexte discret. Ensuite, nous illustrons ces définitions sur un objet 2D dans la Section 3. Finalement, nous présentons plusieurs heuristiques pour le calcul approché des zones menottables dans la Section 4.

2. Définitions

Soit $O \subset \mathbb{R}^3$ un espace borné par une surface triangulée connexe et sans bord. Cette surface est représentée par un maillage triangulaire, où chaque arête est partagée par exactement deux faces.

Au lieu de considérer des lacets dans le complémentaire de O , nous nous restreignons à sa surface S . Soit $G_O(V, E)$ le graphe tel que V est l'ensemble de sommets de S et deux sommets u et v sont liés si le segment $\langle u, v \rangle$ n'intersecte pas l'intérieur de l'objet. Autrement dit, $(u, v) \in E$ si v est visible depuis u . Notons que E inclut toutes les arêtes de S .

On rappelle qu'un *chemin* entre deux sommets u et v est une suite d'arêtes consécutives $\{(u, w_1), \dots, (w_n, v)\}$. Un chemin est un *cycle* si ses deux sommets extrémités coïncident. Un cycle est *simple* s'il ne passe pas deux fois par le même sommet. Un cycle simple est donc une courbe fermée sans auto-intersection.

Soit $\mathcal{C}(O)$ l'ensemble de cycles simples dans G_O . On définit maintenant une relation binaire entre les cycles simples qui permet de les *déplacer*. Soient $x, y \in \mathcal{C}(O)$, $x \Delta y$ si et seulement si leur différence symétrique est le bord d'un 2-simplexe $\langle u, v, w \rangle$ qui n'intersecte pas l'intérieur de l'objet. Comme ils sont tous les deux des cycles simples, le 2-simplexe doit partager au moins une arête avec x . On dit que y est une *déformation élémentaire* de x .

On définit la longueur d'un cycle simple x comme la somme des longueurs de ses arêtes, et on la dénote $|x|$. On appelle alors $\mathcal{C}_\lambda(O) = \{x \in \mathcal{C}(O) : |x| \leq \lambda\}$ l'ensemble de cycles simples avec longueur bornée par λ . La relation binaire Δ_λ est donc définie de façon similaire pour $x, y \in \mathcal{C}_\lambda(O)$.

On dénote Δ_λ^* la fermeture réflexive et symétrique de Δ_λ , donc elle est une relation d'équivalence. Remarquons que $x \Delta_\lambda^* y$ s'il existe une séquence de déformations élémentaires x, z_1, \dots, z_n, y et que tous ces cycles simples sont dans $\mathcal{C}_\lambda(O)$. On formalise ainsi la notion de déformation d'un cycle simple sur une surface.

2.1. Zones λ -menottables

Les classes d'équivalence de $\mathcal{C}_\lambda(O)/\Delta_\lambda^* = \{[x_1]_\lambda, \dots, [x_m]_\lambda\}$ correspondent à des ensembles de cycles simples qui sont séparés par la surface S . Alors, une *zone λ -menottable* est une classe d'équivalence $[x]_\lambda$ de $M_\lambda(O) := \mathcal{C}_\lambda(O)/\Delta_\lambda^*$ et $M_\lambda(O)$ est l'ensemble de zones λ -menottables de S .

Notons qu'une de ses zones est formée par tous les cycles qui peuvent se déformer vers un point. Soit y un cycle simple formé par les trois arêtes d'une face de S , on appelle $[y]_\lambda$ la zone λ -menottable *triviale*. Si la surface S est de genre 0 et λ est arbitrairement grand, $M_\lambda(O) = \{[y]_\lambda\}$ et donc $[y]_\lambda$ est la seule zone λ -menottable de l'objet.

2.2. Représentation

Une zone λ -menottable est un ensemble de cycles simples, mais il y a une façon naturelle de la représenter comme un ensemble de 2-simplexes. Étant donné que $x \Delta_\lambda y$

si l'un est obtenu à partir de l'autre en ajoutant le bord d'un 2-simplexe s , on définit $F(x, y) = s$. Alors, soit x un cycle simple, $F_\lambda(x) = \{F(y, z) : y, z \in [x]_\lambda, y \Delta_\lambda z\}$.

2.3. Persistance

Le nombre de zones λ -menottables dépend de λ . En fait, pour tout $\lambda' > \lambda$, si $x \Delta_\lambda^* y$ alors $x \Delta_{\lambda'}^* y$. Cela implique que, quand on fait augmenter le paramètre λ , les zones menottables peuvent se fusionner entre elles, elles peuvent disparaître (en se fusionnant avec la zone menottable triviale), mais il peut y avoir de nouvelles zones menottables. Ces phénomènes peuvent être reconnus grâce à la *persistance homologique* [EH10].

Soit $G_\Delta = (V, E)$ le graphe de la relation Δ , c'est-à-dire $V = \mathcal{C}(O)$ et $E = \{(x, y) : x \Delta y\}$. Considérons la filtration $f : G_\Delta \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = |x|$ pour $x \in V$ et $f(x, y) = \max(|x|, |y|)$ pour $(x, y) \in E$. Alors le diagramme de persistance homologique 0-dimensionnelle de cette filtration illustre la persistance des zones menottables de l'objet quand λ varie.

On peut aussi définir ce diagramme d'une façon moins algébrique. L'application $\iota_{\lambda, \lambda'} : M_\lambda(O) \rightarrow M_{\lambda'}(O)$, $\iota_{\lambda, \lambda'}([x]_\lambda) = [x]_{\lambda'}$ est bien définie quand $i \leq j$. Notons de plus que si $i < j < k$ alors $\iota_{\lambda_i, \lambda_j} \circ \iota_{\lambda_j, \lambda_k} = \iota_{\lambda_i, \lambda_k}$. Alors, étant donnée une séquence finie et croissante de valeurs $\{\lambda_i\}_{i=1}^n$, on considère la suite d'ensembles $\{M_{\lambda_i}(O)\}_{i=1}^n$ avec les applications $\{\iota_{\lambda_i, \lambda_{i+1}}\}_{i=1}^{n-1}$ entre eux et on définit les valeurs $n_{i,j} = |\text{im}(\iota_{\lambda_i, \lambda_j})|$, le nombre de zones λ_i -menottables qui persistent quand $\lambda = \lambda_j$. Donc, le nombre

$$p_{i,j} = n_{i,j} - n_{i,j+1} - n_{i-1,j} + n_{i-1,j+1}$$

représente le nombre de zones menottables qui apparaissent quand $\lambda = \lambda_i$ et qui disparaissent quand $\lambda = \lambda_j$.

La Figure 2 (gauche) montre une suite d'ensembles et d'applications entre eux. Les valeurs de $n_{i,j}$ et $p_{i,j}$ sont donc les suivantes :

$$N = (n_{i,j}) = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 5 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P = (p_{i,j}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Alors le diagramme de persistance de l'objet est le multi-ensemble P qui contient $p_{i,j}$ copies du point (λ_i, λ_j) . La Figure 2 (droite) montre un diagramme de persistance. Quand

on représente les éléments du diagramme sur le plan, on obtient typiquement beaucoup de points sur la diagonale $y = x$ et des points isolés dans le demi-plan $y \geq 0$. La distance d'un point (x, y) à la diagonale (donc $y - x$) permet de mesurer la persistance d'une zone menottable.

L'avantage principal de la persistance homologique est qu'elle apporte une description topologique d'un objet qui est robuste à la présence de bruit, ce qui permet de reconnaître ses caractéristiques principales. Cette propriété s'applique aussi dans notre contexte. Si deux objets sont similaires (c'est-à-dire si leur distance de Hausdorff est petite), leurs diagrammes de persistance des zones menottables sont similaires. Alors, les points qui se trouvent isolés dans le diagramme correspondent à des zones menottables bien différenciées.

Cet outil permet donc de distinguer les zones menottables importantes mais aussi d'obtenir une signature géométrique d'un objet qui est robuste au bruit, ce qui est extrêmement utile pour les applications.

3. Un exemple en 2D

La définition des zones menottables peut être facilement généralisée en dimension quelconque. Étant donné un objet $O \subset \mathbb{R}^n$ borné par une variété $(n - 1)$ -dimensionnelle M , les cycles simples sont alors des variétés $(n - 2)$ -dimensionnelles et les déformations élémentaires sont définies à partir des $(n - 1)$ -simplexes.

Dans cette section nous montrons un exemple pour un objet 2D représenté par une courbe fermée C . Les cycles simples ici sont des paires de sommets et ils sont déformés en ajoutant des arêtes qui n'intersectent pas l'intérieur de l'objet. Alors, si la courbe C est constituée de n sommets, $\mathcal{C}(O)$ contient $n(n - 1)/2$ cycles et on peut calculer ses zones menottables et son diagramme de persistance. La Figure 3 montre le diagramme de persistance des zones menottables de la lettre \aleph .

Les zones menottables avec une persistance plus petite que 1 ont été enlevées du diagramme de persistance pour avoir une meilleure visibilité. On peut remarquer quatre zones menottables clairement distinguées et une cinquième plus ambiguë (en rouge). On représente avec l'opérateur F ses zones menottables dans la Figure 4 en noir, avec le plus court cycle simple en rouge.

La quatrième zone menottable est la plus proche de la diagonale, et on peut remarquer qu'elle devient la cinquième avec un λ un peu plus grand. Cela sert d'exemple pour montrer pourquoi la persistance des zones menottables mesure leur importance.

Pour montrer la robustesse du diagramme de persistance des zones menottables, nous avons étudié quatre polices différentes pour \aleph dans la Figure 5. On peut vérifier que les quatre diagrammes sont similaires.

4. Calcul

Dans le cas bidimensionnel, le nombre de cycles simples est $\mathcal{O}(n^2)$ où n est le nombre de sommets de la courbe. Par contre, si S est une surface alors $\mathcal{C}(O)$ a un nombre exponentiel de cycles simples. Le calcul exact de ses zones menottables et de son diagramme de persistance est donc hors de portée, et on ne peut que calculer des approximations.

Chaque zone menottable dans le diagramme de persistance des zones menottables est engendrée par un cycle simple minimal, c'est-à-dire un cycle x tel que $|x| \leq |y|$ pour tout $y \triangle x$. Notre approche pour calculer le diagramme de persistance des zones menottables consiste essentiellement à :

1. trouver un sous-ensemble des cycles simples minimaux $\{x_i\}_{i=1}^n$ et
2. pour $\lambda = h, 2h, \dots$ (avec h suffisamment petit), calculer ses classes d'équivalence. Pour chaque λ , on *propage* les classes existantes, on efface celles qui ont été absorbées et on ajoute les possibles nouvelles classes.

On cherche à trouver un sous-ensemble de cycles simples minimaux qui engendrent des zones menottables persistantes. De plus, on ne veut pas trouver tous les cycles simples dans chaque classe d'équivalence, mais un sous-ensemble qui permet de la représenter avec l'opérateur F et de reconnaître les fusions entre les classes sans perturber en excès le diagramme de persistance des zones menottables.

Dans le reste de cette section nous présentons quelques heuristiques pour le calcul des zones menottables.

4.1. Disques géodésiques pour trouver des représentants

Soit v un sommet de la surface sur lequel on effectue une propagation géodésique. Chaque fois que deux fronts se rencontrent, on récupère un cycle simple. De cette façon on obtient un ensemble de cycles simples pour chaque sommet de S .

De plus, il semble que nous pouvons restreindre cette recherche aux sommets ayant une courbure gaussienne non positive.

4.2. Priorité aux arêtes sur la surface

Étant donné un représentant x , nous devons le déformer récursivement pour trouver ses classes d'équivalence $[x]_\lambda$ pour chaque valeur de λ . Si le cycle x contient m arêtes, et que toutes ses arêtes appartiennent à la surface, il est connecté à au plus $2m$ autres cycles puisque chaque arête appartient à deux faces. Par contre, si on considère aussi les 2-simplexes qui n'intersectent pas l'objet, ce nombre est $\mathcal{O}(mn)$, où n dénote le nombre de sommets dans S .

Il est nécessaire de considérer ces cycles qui *pendent* de la surface. Le cycle simple rouge de la Figure 6 ne peut pas devenir le bord d'un 2-simplexe de la surface à travers une

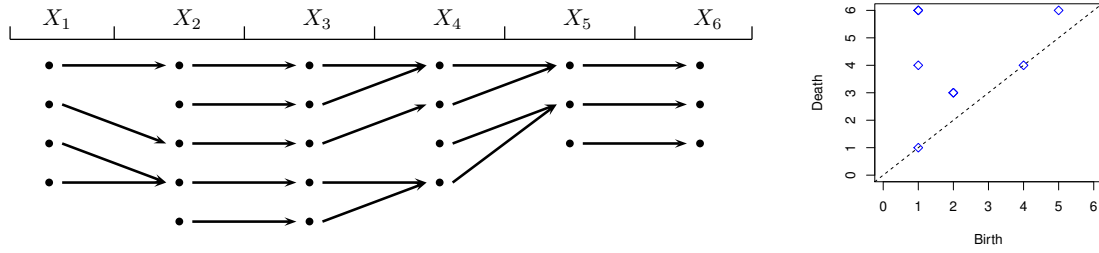


Figure 2: Une séquence d'ensembles X_i avec des applications f_i entre eux (gauche) et son diagramme de persistance correspondant (droite). Notons que les points $(1,6)$ et $(2,3)$ sont deux fois dans le diagramme.

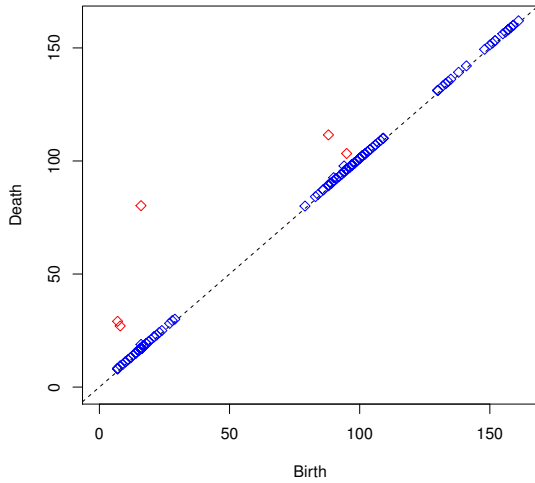


Figure 3: Un objet 2D (haut) et le diagramme de persistance de ses zones menottables (bas). Les cinq zones les plus persistantes sont affichées en rouge.

suite de déformations élémentaires en restant toujours sur la surface. Il doit nécessairement passer par un cycle comme le vert, avec des arêtes qui n'appartiennent pas à la surface.

Nous proposons de déformer chaque cycle d'abord à tra-

vers les 2-simplexes de la surface, et puis de considérer les autres seulement si cela réduit la longueur du cycle obtenu.

4.3. Propagation orientée

Puisqu'un cycle simple sur S (donc toutes ses arêtes sont des arêtes de S) sépare localement une surface en deux régions, on peut le déformer vers une seule de ces régions. À partir du représentant x on construit deux familles de cycles simples, chacune allant vers une direction différente. On évite ainsi les cycles qui intersectent le représentant, comme le cycle bleu dans la Figure 7.

4.4. Distance de Hausdorff géodésique

Soit $[x]_\lambda$ une zone menottable et $\partial[x]_\lambda = \{y \in [x]_\lambda : \exists z \triangle y, |z| > \lambda\}$ son bord, c'est-à-dire l'ensemble de cycles qui peuvent encore être déformés. Ces cycles ne se trouvent pas seulement dans le bord $F_\lambda(x)$, et la plupart d'entre eux se trouve à l'intérieur de $F_\lambda(x)$ (voir la Figure 7).

On peut éviter d'ajouter ce type de cycles en utilisant la distance de Hausdorff géodésique. Soit d_S la distance géodésique entre les sommets de S , la distance de Hausdorff géodésique d_S^H entre deux cycles simples est le maximum de la distance géodésique entre les sommets des deux cycles.

Alors, étant donné un cycle simple $y \in \partial[x]_\lambda$, on peut restreindre sa déformation vers les cycles z tels que $d_S^H(z, x) > d_S^H(y, z)$, ceux qui ne retournent pas vers x .

De plus, on peut aussi déformer un cycle y directement vers un autre z tel que $|z| \leq \lambda$ et $d_S^H(y, z) < \epsilon$ pour un ϵ assez petit. Si le maillage de la surface est assez régulier, on peut espérer que cela n'ait pas d'effet remarquable sur le diagramme de persistance obtenu.

4.5. Cycles parallèles

Une heuristique plus ambitieuse pour accélérer la propagation d'une classe consiste à déformer un cycle x directement vers ses cycles « parallèles ». On dit qu'un cycle y

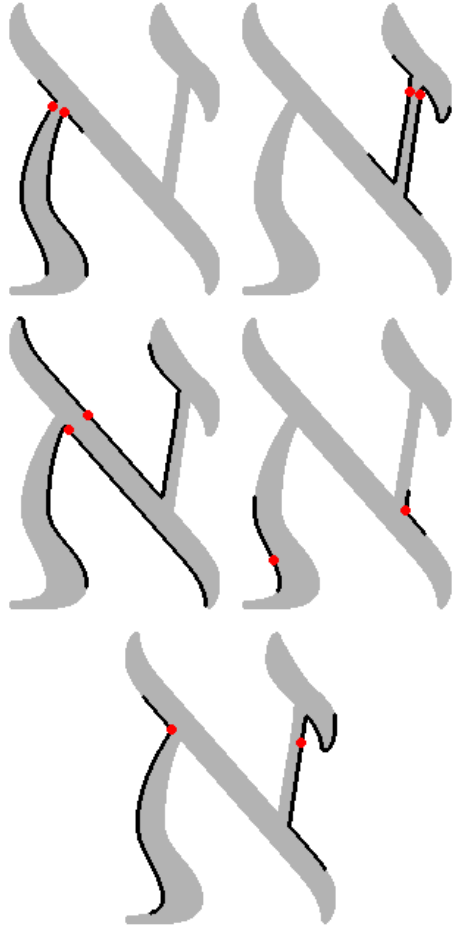


Figure 4: Les cinq zones menottables les plus persistantes de \aleph représentées avec l'opérateur F (en noir). Les plus courts cycles simples pour chaque zone menottable sont affichés en rouge.

est parallèle à x s'ils n'ont pas de sommet en commun et si chaque sommet de y est à une arête de distance d'un sommet de x . Cette notion est illustrée dans la Figure 8.

À partir d'un représentant x on peut alors ajouter dans sa classe tous ses cycles « parallèles » jusqu'à atteindre la borne sur la longueur, ce qui permet de faire avancer la classe de x sur la surface plus rapidement. On utilisera ensuite les autres heuristiques.

4.6. Éviter les cycles « tortueux »

On souhaite éviter les cycles simples trop tortueux. Soit $x = \{(v_1, v_2), \dots, (v_n, v_1)\}$ un cycle simple, on définit

$$\tau(v_i, v_j) = \frac{d_x(v_i, v_j)}{d_S(v_i, v_j)} - 1,$$

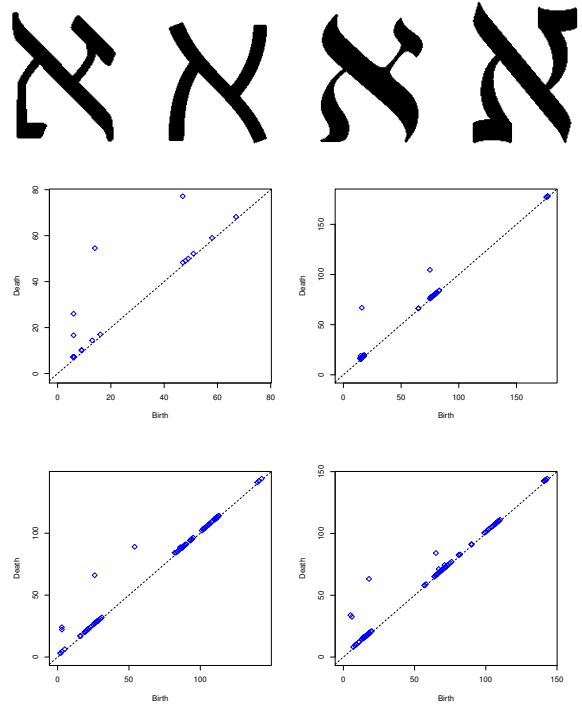


Figure 5: Quatre polices différentes pour \aleph avec leurs diagrammes de persistance de zones menottables correspondants.

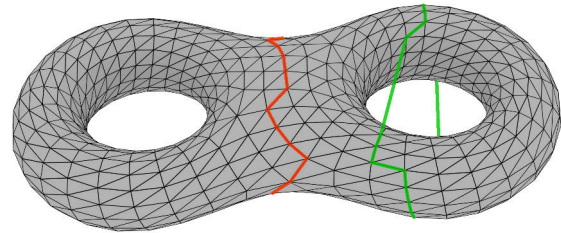


Figure 6: Le cycle rouge ne peut pas devenir trivial sans passer par un cycle comme le vert, avec des arêtes qui n'appartiennent pas à la surface.

la différence relative entre leur distance géodésique restreinte à x et leur distance géodésique sur S . Si le plus court chemin entre v_i et v_j dans x contient seulement des arêtes de S , alors $\tau(v_i, v_j) \geq 0$. Cette valeur est 2 pour les deux sommets rouges sur le cycle simple bleu de la Figure 9.

Soit x le cycle simple $\{(v_1, v_2), \dots, (v_n, v_1)\}$, son indice de tortuosité est

$$\tau(x) = \max \{ \tau(v_i, v_j) : 1 \leq i < j \leq n \}$$

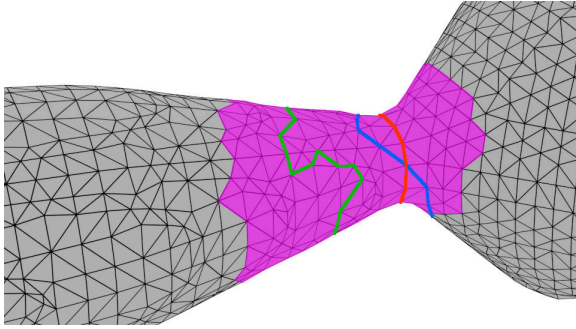


Figure 7: Une zone menottable (en violet), son représentant (rouge) et deux autres cycles (bleu et vert).

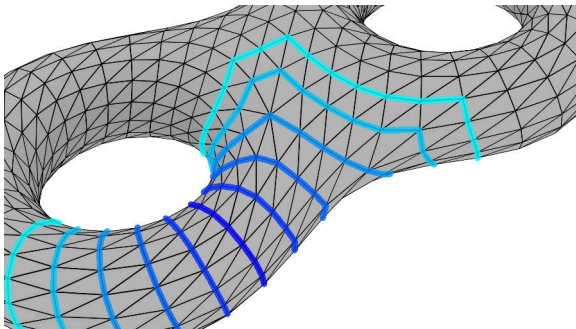


Figure 8: Une suite de cycles parallèles sur une surface.

Notons que $\tau(x) \geq 0$ si au moins une arête de x appartient à S . L'indice de tortuosité du cycle bleu de la Figure 9 est 3.

Donc, on peut ignorer les cycles $y \in \mathcal{C}(O)$ tels que $\tau(y) \geq K$ pour une constante K assez grande.

5. Conclusion

Cet article présente un travail en cours sur la définition et le calcul des zones dites « menottables ». Nous avons donné une définition simple et intuitive, qui dépend d'un paramètre correspondant à la longueur du cycle. De plus, ce concept de zone menottable est enrichi avec la notion de persistance pour avoir une image globale des zones menottables d'un objet, sans avoir à choisir une valeur concrète pour le paramètre.

Étant donné qu'un objet contient un nombre exponentiel de cycles sur sa surface, le calcul exact des zones menottables est impossible en pratique et nous devons calculer une approximation. Plusieurs heuristiques ont été données et, vu que le diagramme de persistance des zones menottables est robuste aux déformations de l'objet, nous espérons démontrer que ces techniques donnent une bonne approximation.

Dey et Sun ont introduit dans [DS06] la *fonction médiane*

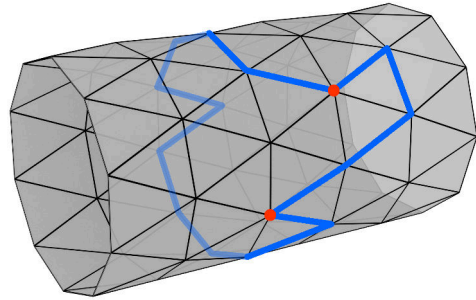


Figure 9: Un cycle simple (en bleu) sur un maillage avec toutes ses arêtes de longueur 1. La tortuosité entre les deux sommets rouges est de 2. L'indice de tortuosité du cycle est 3.

géodésique (*geodesic medial function*, en anglais), qui permet de définir mathématiquement un squelette curviligne pour un objet non nécessairement tubulaire. Nous voulons étudier si on peut utiliser cette fonction pour trouver des représentants de zones menottables ainsi que le diagramme de persistance.

Nous voulons aussi remarquer qu'on peut établir un graphe orienté sur le diagramme de persistance des zones menottables. Si une zone menottable est absorbée par une autre (non triviale), nous ajoutons une flèche entre leurs points dans le diagramme de persistance. Cela peut servir à distinguer si une zone menottable est peu persistante parce qu'elle devient triviale, ou si par contre elle devient une autre zone menottable qui est plus persistante.

Références

- [DS06] DEY T. K., SUN J. : Defining and computing curve-skeletons with medial geodesic function. In *Proceedings of the Fourth Eurographics Symposium on Geometry Processing, Cagliari, Sardinia, Italy, June 26-28, 2006* (2006), pp. 143–152.
- [EH10] EDELSBRUNNER H., HARER J. : *Computational Topology - an Introduction*. American Mathematical Society, 2010.