



HAL
open science

Quels problèmes à l'école et au collège pour développer des compétences mathématiques ?

Christine Choquet

► **To cite this version:**

Christine Choquet. Quels problèmes à l'école et au collège pour développer des compétences mathématiques ?. Repères IREM, 2016, 105, pp.57-77. hal-01492480

HAL Id: hal-01492480

<https://hal.science/hal-01492480>

Submitted on 15 Mar 2020

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES ?

Christine CHOQUET
Formatrice ESPE, Académie de Nantes
Irem de Nantes, CREN¹

Cet article est également consultable en ligne sur le portail des IREM (onglet : Repères IREM) : <http://www.univ-irem.fr/>)

Résumé : Les instructions officielles de l'année 2015 amènent les professeurs des écoles des classes de CM1/CM2 et les professeurs de mathématiques des classes de 6ème de collège à travailler dans un même cycle 3. L'enjeu pour les élèves est la construction de connaissances et, surtout, le développement de six *compétences mathématiques* : *chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer*. Cet article propose une analyse de différents énoncés de problèmes s'inspirant d'une même situation (*La chèvre*, MEN 2011), ces énoncés ayant été relevés dans diverses ressources disponibles. Les résultats montrent qu'ils ne conduisent pas à développer les mêmes compétences chez les élèves, ce qui permet d'attirer l'attention des enseignants des premier et second degrés sur la nécessité d'une analyse *a priori* des problèmes avant de les choisir pour la classe. Une expérimentation dans une classe de CM2 permet d'appuyer ces résultats et de repérer les difficultés rencontrées par les élèves et leur professeur lors de la résolution d'un problème de ce type.

Introduction

En 2015, la réforme du collège en France propose de regrouper les niveaux scolaires des cours moyens de première et deuxième années (CM1/CM2) et de la classe de sixième en un même cycle 3² (MEN, 2015). Ce regroupement est accompagné d'instructions officielles pour l'enseignement des mathématiques destinées à la fois aux professeurs des écoles et aux professeurs de mathématiques. Ces programmes officiels centrent l'enseignement des mathématiques sur la résolution de problèmes qui « [...] constitue le critère principal de la maîtrise des

connaissances dans tous les domaines des mathématiques, elle est également le moyen d'en assurer une appropriation qui en garantit le sens » (MEN, 2015, p. 198). Cette demande n'est pas nouvelle pour les enseignants des premier et second degrés. En effet, la résolution de problèmes était déjà au cœur des pro-

1 Centre de Recherche en Education de Nantes

2 Le cycle 2 regroupe les niveaux de la classe préparatoire (CP) et des cours élémentaires de première et deuxième années (CE1/CE2) de l'école élémentaire. Le cycle 4 regroupe les classes de cinquième, quatrième et troisième du collège.

 QUELS PROBLÈMES À L'ÉCOLE ET AU COLLÈGE POUR DÉVELOPPER DES COMPÉTENCES MATHÉMATIQUES ?

grammes de mathématiques des années 2002 et 2008. En revanche, en 2015, l'accent est particulièrement mis sur le développement chez tous les élèves « *des six compétences majeures des mathématiques : chercher, modéliser, représenter, calculer, raisonner et communiquer* » (Ibid., p. 198). Celles-ci sont déclinées sous forme d'une liste de verbes et sont explicitées pour le cycle 3 (Cf. annexe 1) ; il nous semble par ailleurs important de noter que les mêmes verbes sont utilisés dans les programmes de mathématiques du cycle 2 aux classes de lycée afin de garantir une continuité dans leur développement tout au long de la scolarité obligatoire (MEN, 2015).

Le développement de ces compétences liées à l'enseignement des mathématiques est, depuis quelques années, à l'origine de nombreuses recherches. Plusieurs groupes Irem (dont le groupe DiTacTic³ auquel nous participons) travaillent à l'élaboration et à la mise en œuvre de situations permettant de les développer à l'école élémentaire comme au collège (Cabassut, 2010 ; Paillet, 2011 ; Le Beller et Lebaud, 2014).

L'objet de cet article est de s'interroger sur des moyens de développer ces compétences au cycle 3 (MEN, 2015). Il s'agit pour nous d'attirer l'attention des professeurs (des écoles et de mathématiques de collège) sur l'importance du choix des problèmes permettant ce développement et sur leur mise en œuvre en classe. Pour cela, nous avons poursuivi l'analyse d'éléments présentés dans un atelier⁴ lors des journées académiques de l'Irem de Nantes (Avril 2014) en nous appuyant sur des ressources facilement disponibles pour les enseignants des premier et second degrés ainsi que sur une expérimentation menée dans une classe de CM2.

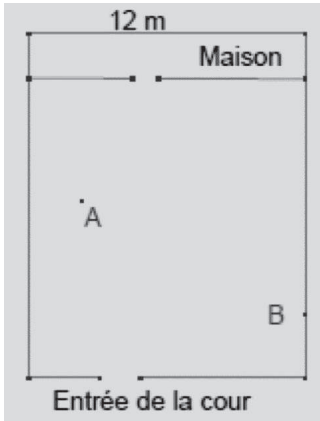
3 Groupe piloté par M. Hersant et associé au CREM de Nantes.

4 Atelier animé par C. Choquet, S. Grau.

Dans la première partie de l'article, nous revenons sur deux problèmes proposés dans des documents d'accompagnement des programmes du collège (MEN, 2007, 2011) et identifions les connaissances et compétences mathématiques en jeu dans leur recherche/résolution. La deuxième partie est dédiée à l'étude comparative de différents énoncés proches de ces deux problèmes, repérés dans des manuels pour la classe de 6ème, des sites Internet et deux documents pédagogiques destinés aux professeurs. La troisième partie présente l'analyse d'une expérimentation menée dans une classe de CM2. Nous identifions notamment les difficultés rencontrées par les élèves lors de la recherche/résolution du problème ainsi que celles rencontrées par l'enseignant(e) lors de la mise en commun des productions et la synthèse de la séance. La conclusion permet de revenir sur les *compétences mathématiques* présentées dans les programmes du cycle 3 (MEN, 2015) et de proposer des moyens permettant aux professeurs des écoles comme aux professeurs de mathématiques de collège de les développer chez des élèves de 8-11 ans.

Un même type de problème dans les instructions officielles

Nous avons repéré, dans deux documents d'accompagnement des programmes de mathématiques du collège (MEN, 2007 et 2011), deux problèmes visant sensiblement les mêmes connaissances et les mêmes compétences mathématiques. Notre expérience de professeur de mathématiques de collège et de formateur d'enseignants des premier et second degrés nous a permis de constater que les professeurs des écoles et les professeurs de mathématiques de collège les connaissent bien. Ils ont, pour beaucoup d'entre eux, eu l'occasion de proposer à leur classe un problème dont l'énoncé est quasiment analogue à ceux présentés dans les documents d'accompagnement. Cette partie est



Sophie doit aller chercher du lait à la ferme dont la cour est représentée par le schéma ci-contre. (Feuille donnée aux élèves).

*En A et B sont attachés deux chiens.
En A, Azor avec une chaîne de 6 mètres.
En B, Balthazar avec une chaîne de 5 mètres.*

Sophie pourra-t-elle aller jusqu'à la porte de la ferme sans se faire mordre ?

consacrée à une description et une analyse de ces deux problèmes en termes de connaissances et de compétences mathématiques (MEN, 2015).

Le problème Les deux chiens

Ce problème (encadré ci-dessus), intitulé *Les deux chiens*, est proposé dans le document d'accompagnement des programmes de mathématiques du collège « *Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège – Géométrie au collège* » (MEN, 2007, p. 3).

L'objectif annoncé est « *de mettre en place la caractérisation des points d'un cercle* ». Il est précisé que ce problème « *permet de travailler une nouvelle conception du cercle illustrée par le passage d'une ligne tracée au compas à une figure constituée de points ayant une même caractéristique* », mais qu'il peut également être utilisé lors du « *réinvestissement de la même propriété (l'ensemble des points équidistants d'un point donné est le cercle...)* après sa mise en place » (Ibid., p. 4).

Les connaissances mathématiques abordées sont ainsi clairement explicitées. Cepen-

dant, même si l'exemple d'une production d'un élève commentée est donné aux enseignants (Cf. annexe 2), les compétences mathématiques pouvant être développées lors de la recherche/résolution de ce problème par un élève de 6ème ne sont pas clairement identifiées dans le document d'accompagnement.

Le commentaire annonce une modélisation envisageable chez des élèves. Or, pour y répondre, cet élève doit également faire preuve d'initiative, il doit transformer le problème de Sophie en celui de la recherche de la zone parcourue par les deux chiens. Puis, à partir du schéma proposé avec l'énoncé, il doit représenter la situation réelle et la zone parcourue pour enfin conclure en répondant par oui ou non à la question posée. D'après nous, la résolution de ce problème nécessite de mobiliser cinq des six compétences mathématiques citées dans les programmes de l'année 2015. Il s'agit en effet pour les élèves de : « **chercher** (*s'engager dans une démarche [...] en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle[...]*), **modéliser** (*utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quoti-*

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES ?

diennne [...]), **représenter** (utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, [...]), **raisonner** [...] en géométrie, [...] amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets, **communiquer** (utiliser progressivement un vocabulaire adéquat [...] pour décrire une situation. [...] Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications de l'autre et argumenter dans l'échange » (MEN, 2015, p. 190).

L'analyse de ce problème en termes de connaissances et de compétences mathématiques montre qu'il est tout à fait en adéquation avec le travail en classe de cycle 3 encouragé par les instructions officielles de l'année 2015.

Le problème La chèvre

En 2011, une « banque de situations d'apprentissage et d'évaluation pour la compétence 3 »⁵ propose, sous forme de fiches, un ensemble de problèmes destinés à la construc-

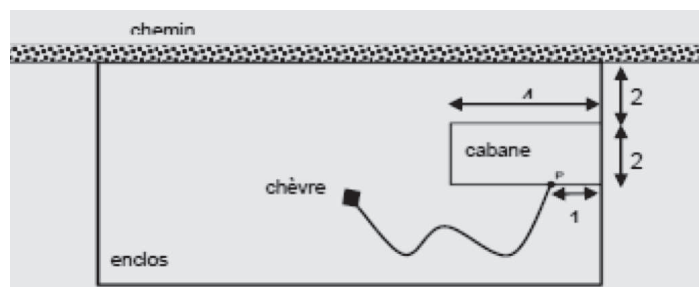
tion et l'évaluation de connaissances et compétences issues du socle commun à atteindre par tous les élèves du niveau collège (MEN, 2007). Une fiche intitulée *La chèvre* propose le problème ci-dessous...

Le document précise les connaissances mathématiques abordées par le problème : pour des élèves de 6ème, il s'agit d'une « consolidation du lien entre distance et cercle » et de la définition suivante : « tout point situé à une distance donnée d'un point est sur un cercle ». Des compétences mathématiques en jeu sont également précisées : il s'agit d'amener les élèves à « pratiquer une démarche scientifique », autrement dit à « [...] extraire et organiser l'information utile, [...], réaliser, manipuler, mesurer, [...], raisonner, [...] présenter la démarche suivie, [...] ». De plus, l'exemple d'une production d'un élève de 6ème est donné et les commentaires qui l'accompagnent permettent également de préciser des compétences mathématiques en jeu. Afin de résoudre ce problème, un élève

Un plan détaillé et commenté de l'enclos de la chèvre.

Le schéma ci-dessous représente l'enclos et la zone hachurée correspond au parterre de fleurs le long du chemin. La chaîne de la chèvre est attachée à un piquet au point P.

Les distances sont exprimées en mètres.



Sachant que la chèvre est attachée à une chaîne de 8 m, détermine la partie de la clôture que le propriétaire doit renforcer et la longueur de celle-ci. Tu expliqueras clairement ta démarche.

⁵ Disponible à l'adresse :

<http://eduscol.education.fr/cid55510/banque-situations-apprentissage-competence.html>, consulté le 11 février 2016.

de 6ème doit faire preuve d'initiative en ramenant l'identification de la partie de la clôture à renforcer au problème de la recherche d'une zone que peut parcourir la chèvre puis, à partir du schéma proposé, déterminer et représenter cette zone avant de se ramener à la question sur la clôture. Les compétences mathématiques en jeu sont identiques à celles que nous identifions dans le problème *Les deux chiens* : chercher, modéliser, représenter et raisonner.

Ces deux problèmes permettent donc d'envisager un travail sur le développement des mêmes compétences mathématiques. Ils amènent les élèves, afin de répondre à la question initiale, à construire un sous-problème, à modéliser la situation réelle pour en faire un problème mathématique. Nous considérons alors que ces problèmes amènent les élèves à problématiser une situation.

Par ailleurs, ces deux problèmes sont présents dans de nombreux manuels destinés aux élèves de 6ème et sur de nombreux sites Internet, selon des énoncés différents. Après avoir repéré dans diverses ressources ces énoncés qui, au premier abord, semblent similaires, nous nous sommes interrogés sur leurs différences. En effet, même si les différents énoncés s'appuient sur une situation réelle quasiment identique, les questions posées aux élèves ne sont pas toujours les mêmes et, de ce fait, l'enjeu en termes de développement de compétences mathématiques nous semble assez différent. Nous proposons dans la deuxième partie un recensement et une analyse de ces différents énoncés.

Différents énoncés et comparaison

D'un point de vue méthodologique, pour mener à bien cette étude, nous avons répertorié diverses ressources facilement disponibles pour des professeurs : dix manuels scolaires des-

tinés aux élèves de 6ème, dix sites Internet et deux documents pédagogiques destinés aux enseignants (et à la formation). Concernant le repérage des problèmes dans chacun des manuels et dans les deux documents pédagogiques, nous avons regardé tous les problèmes du chapitre dédié à l'étude du cercle et concernant les sites Internet, nous avons regardé tous les sites affichés avec les mots-clés suivants *géométrie collège le chien* et *géométrie collège la chèvre*.

Afin de comparer les problèmes ainsi repérés, nous les avons classés selon l'objectif visé : amener ou non les élèves à problématiser la situation.

Nous détaillons ci-après nos résultats.

Des problèmes permettant de problématiser

— Dans les manuels

Parmi les dix manuels étudiés, trois d'entre eux proposent des problèmes amenant effectivement les élèves à problématiser tel que nous l'avons défini dans la première partie. Les énoncés de ces problèmes, à l'image du premier qui suit, ne demandent pas aux élèves de représenter une zone, mais leur demande de réfléchir aux endroits les plus intéressants pour placer un (ou des) piquet(s) selon les contraintes imposées par l'énoncé. La démarche qui consiste à se poser la question d'une zone pouvant être parcourue et de sa représentation est laissée à l'initiative des élèves.

Notre analyse des manuels nous a permis de remarquer également que ces trois problèmes ne sont pas placés parmi les exercices et problèmes courants du chapitre mais sont repérés (pour les enseignants sans doute) comme étant un « défi », un « jeu », un « casse-tête » ou, comme pour le problème du chien Titan proposé comme « devoir à la maison ».

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHEMATQUES ?

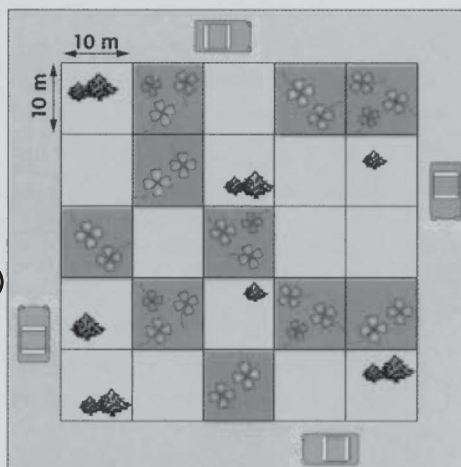
44 Casse-tête dans le jardin

Vinciane fait brouter sa chèvre Blanquette dans l'immense jardin de son grand-père, attachée à un piquet par une corde de 10 m de longueur. Vinciane a planté ce piquet quelque part, sur le contour de l'une des 25 parcelles carrées de 10 m de côté constituant le jardin.

A toi de trouver

Où Vinciane a-t-elle pu planter ce piquet, sachant que :

- ~~Blanquette ne doit pas pouvoir se rendre sur la chaussée bordant le grand jardin.~~
- ~~Blanquette ne peut brouter que dans une seule des 10 parcelles à trèfle (en vert) ?~~



Jeu n°2 Attention aux chiens !

Donia doit aller chercher du lait à la ferme dont la cour est représentée sur le schéma ci-dessous.

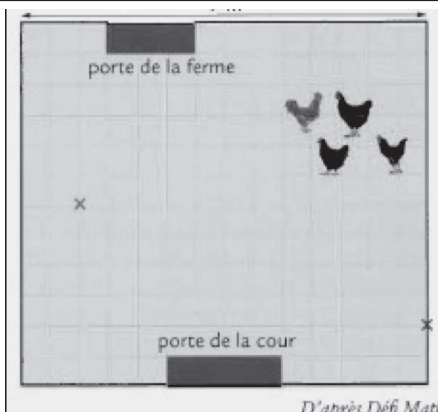
En B et N sont attachés deux chiens féroces :

- En B, Brutus avec une chaîne de 2 m.
- En N, Néron avec une chaîne de 4 m.

Les deux points marqués indiquent B et N, sans préciser lequel est B et lequel est N.

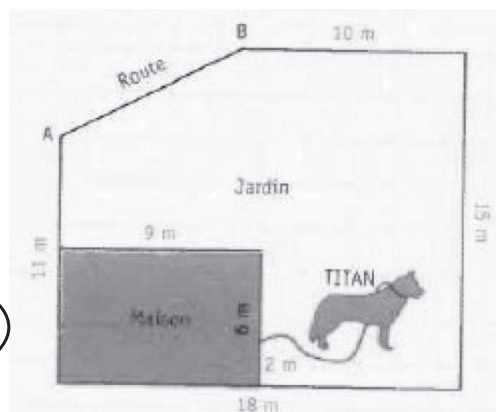
Reproduire le schéma ci-dessous.

Où doivent se situer Brutus et Néron pour que Donia puisse atteindre la porte de la ferme sans se faire mordre ?



45 Titan est un bon chien de garde. Il veut surveiller les allées et venues sur la route qui passe devant chez lui. Il a donc décidé de se positionner aussi près que possible de la route, tout en étant à la même distance des points A et B. Mais il est attaché à une corde qui mesure 10 m.

Reproduis cette figure sur du papier quadrillé, en prenant 1 carreau pour 1 m, et dessine l'emplacement idéal pour Titan.



— Dans un document pédagogique

Le DVD *Enseigner les mathématiques au cycle 3⁶* propose aux professeurs des écoles la construction d'une séquence sur le cercle, composée de huit séances. Le document pédagogique accompagnant le DVD permet aux enseignants d'avoir accès à une analyse détaillée des séances mises en œuvre et à des extraits vidéo de certaines de ces séances. Le problème *La mangeoire des chèvres* est proposé lors de la quatrième séance :

Dans un pré, deux chèvres sont attachées chacune, par une corde, à un piquet différent. Le fermier ne dispose, comme mangeoire, que d'un petit seau pour nourrir ses animaux. Il se demande où il pourrait le placer pour que ses deux chèvres puissent aller y manger en même temps. Pourriez-vous l'aider ?

Voici des informations :

Les deux piquets sont espacés de 16 mètres. La corde d'une des chèvres est longue de 9 mètres et l'autre corde est longue de 10 mètres. En utilisant l'échelle des longueurs ci-dessous, faire un croquis précis qui donne les emplacements possibles de la mangeoire.



Il s'agit d'après les auteurs de « *faire découvrir l'usage du cercle et l'usage du disque pour*

⁶ Le document pédagogique accompagnant le DVD est disponible à l'adresse http://www.ac-grenoble.fr/ien.bourgoin1/IMG/pdf_sequence.pdf, consulté le 11 février 2016.

résoudre des problèmes d'équidistance [...] Le cercle étant un outil pour modéliser des situations de la réalité » (p. 36).

Comme dans les trois problèmes précédents, la démarche est à la charge des élèves. Le problème nécessite de leur part de modéliser la situation réelle décrite dans l'énoncé afin de la résoudre, en utilisant les notions de cercle et de disque.

Des problèmes ne permettant pas de problématiser

— Dans les manuels

Dans sept des dix manuels que nous avons analysés, les énoncés proposés ne conduisent pas les élèves à problématiser la situation. Autrement dit, ils ne conduisent pas à se poser des questions sur la démarche à utiliser et à construire des sous-problèmes permettant d'avancer vers une solution.

L'énoncé leur impose la procédure de résolution : tracer une zone de déplacement. Pour imaginer cette zone et la tracer, deux possibilités s'offrent à eux : raisonner en restant dans la situation réelle qu'ils réussissent facilement à imaginer ou raisonner en modélisant la situation réelle et utiliser une définition du cercle. Il ne s'agit plus de construire cette définition, mais bien de l'utiliser pour représenter une situation.

Il est clair que les compétences mathématiques en jeu ne sont pas les mêmes que dans les énoncés précédents même si la situation réelle décrite est très proche.

Nous proposons (voir page suivante) quelques exemples recensés dans les ressources étudiées...

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHEMATIQUES ?

55 Le chien Joby
L'attache de la laisse du chien Joby peut coulisser sur une tringle entre le coin A et le coin B de la maison :

a) Tracer le schéma avec les grandeurs indiquées.
b) Colorier la zone que Joby peut parcourir.

107 L'espion Jim Bang doit pénétrer dans une salle aux trésors de 8 m sur 10 m sans déclencher l'alarme. Celle-ci se déclenche s'il passe à moins de 3 m du diamant noir, et à moins de 2,5 m du rubis violet. Le dessin représente la salle aux trésors, rectangulaire.

1/ Reproduire le dessin à l'échelle 1 cm pour 1 m puis colorier la zone dans laquelle peut circuler l'espion.
2/ Tracer un chemin qui peut mener Jim de l'entrée à la topaze sacrée.

79 SC3 Anis, Batman et Cool sont trois chevrettes qui broutent l'herbe d'un pré clôturé. Ce pré a la forme d'un rectangle PREB de dimensions 10 m par 12 m. Anis est attachée au piquet A par une corde de longueur 3 m. Batman est attachée au piquet B par une corde de longueur 8 m. Cool est attachée au piquet C par une corde de longueur 5 m.

1) Reproduire le schéma en prenant 1 cm pour 1 m.
2) Pour chacune des chevrettes, tracer le contour de l'espace d'herbe qu'elle peut brouter.
3) Colorier en vert l'espace brouté par aucune chevrete, en marron l'espace brouté par au moins deux chevrettes, en jaune l'espace brouté par une seule chevrete.

— Dans un document pédagogique

L'ouvrage *Des maths ensemble et pour chacun 6ème* (2014) propose également un problème analogue intitulé *Les aventures de Blanquette la biquette*. Ce problème est proposé au début d'une séquence dédiée à l'étude de *problèmes de distances*. Les élèves sont amenés à remobiliser des connaissances acquises précédemment (à l'école primaire, en CM1 et/ou CM2). Les auteurs précisent bien qu'il s'agit de « réinstaller (une) propriété caractéristique des points d'un disque et d'un cercle » (p. 287). Ils ne font mention d'aucune compétence mathématique en jeu dans la résolution de ce problème.

— Dans les sites Internet

Tous les sites Internet que nous avons consultés, répondant aux mots-clés *géométrie*

collège le chien ou géométrie collège la chèvre, proposent des problèmes demandant aux élèves de représenter une zone. Nous donnons ici quelques exemples que le lecteur retrouvera facilement sur Internet. Dans le problème *La chèvre de M. Seguin* issu du site Irem Paris-Nord⁷, il est demandé aux élèves de « hachurer la zone... ». Le site *Matoumatheux*⁸ propose de représenter des zones parcourues par un chien *Bébert* selon plusieurs niveaux. De nombreux sites dédiés à des rallyes mathématiques reprennent également régulièrement ce type de problèmes. Par exemple, le rallye mathématique des collèges de Saône et Loire demande aux classes de début de collège de résoudre le problème suivant :

Gaston a un pré *ENCLOS* représenté ci-dessous.
 On donne $NC = 40$ m, $LO = 40$ m, $LC = 60$ m et $EN = 60$ m.
 Tous les angles de la figure sont des angles droits.
 Il y met une chèvre qu'il attache au piquet N du pré, avec une corde de 60 m, pour qu'elle ne puisse pas brouter toute l'herbe la même semaine.
 1. Sur une feuille, tracer la figure à l'échelle 1/1000 et colorier la surface que la chèvre peut brouter.
 2. La chèvre, très gourmande, sera malade si elle broute une surface supérieure à 3000 m² dans la semaine. La corde de Gaston est-elle assez courte ?

Même si la question 2 concernant une aire maximale à ne pas dépasser permet de faire intervenir des calculs et un raisonnement permettant de mener à bien ces calculs, la question 1 impose aux élèves une démarche passant par le coloriage d'une zone et ne permet donc pas de leur laisser l'initiative de celle-ci.

Afin d'illustrer nos propos concernant l'étude des ressources disponibles et les différences observées en termes de compétences mathématiques en jeu dans la résolution des divers problèmes, nous avons étudié une séance dédiée à un problème de ce type choisi par un enseignant de CM2. Cette expérimentation permet également de repérer les difficultés éventuelles de leur mise en œuvre dans des classes de cycle 3 (MEN, 2015).

Etude d'une expérimentation en classe de CM2

Dans le cadre d'une étude sur les pratiques de professeurs des écoles dédiant des séances de mathématiques à la résolution de problèmes ouverts (Choquet, 2014), nous avons observé, dans une classe de 16 élèves de CM2, une séance dédiée au problème⁹ représenté en haut de la page suivante.

Analyse du problème

Notre analyse *a priori* du problème montre que ce problème ne permet pas aux élèves de problématiser la situation. Les élèves n'ont pas à construire de sous-problèmes. Il s'agit pour

⁷ http://www-irem.univ-paris13.fr/site_spip/spip.php?article486, consulté le 14 février 2016.

⁸ <http://matoumatheux.ac-rennes.fr/sommaire.php?niv=6>, consulté le 14 février 2016.

⁹ Ce problème est extrait du fascicule « Enseigner les maths autrement en sixième », Irem des Pays de La Loire, 1999.

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHEMATQUES ?

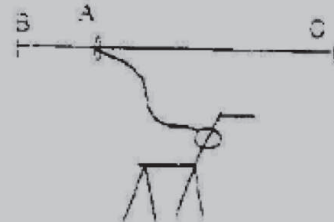
Enoncé 1 : Le chien 1

Un chien est attaché avec une chaîne à un poteau. Représente et colorie la surface sur laquelle peut se déplacer le chien. Attention, les mètres sont représentés en centimètres. 1m : 1cm (la chaîne mesure 8 m)



Enoncé 2 : Le chien 2

On change de place le chien. La chaîne du chien mesure 2 mètres mais il n'est pas attaché à un poteau mais à une barrière le long de laquelle il peut se déplacer. La barrière mesure 8 m et 8m : 8 cm Représente et colorie la surface sur laquelle il peut se déplacer.



eux de répondre à une commande « *représente et colorie* ». Trois procédures sont pour cela envisageables pour des élèves de cycle 3. Ils peuvent procéder :

- par intuition, directement en faisant appel à des connaissances de la « vie courante », à une conception du cercle acquise de l'expérience quotidienne (Artigue et Robinet, 1992).
- par tâtonnements, avec ou sans matériel, en imaginant plusieurs endroits sur la figure où le chien peut se trouver ; une figure apparaît et est reconnue.
- par modélisation de la situation.

Il est donc attendu des élèves qu'ils mobilisent des connaissances mathématiques telles que la notion de distance d'un point par rapport à un autre point ou à un segment, ainsi que différentes *conceptions du cercle* (Artigue et

Robinet, 1982) :

- une définition du cercle et du disque en termes d'ensemble de points et de distances,
- une définition du cercle comme circonférence du disque, comme courbe qui représente la « frontière », la limite du disque,
- une définition du disque comme l'intérieur du cercle avant de considérer la circonférence.

Par ailleurs, afin de répondre à la consigne, en plus de faire appel à des connaissances sur le cercle et le disque, il est attendu une modélisation d'une situation issue de la réalité et une représentation utilisant des outils mathématiques tels que le point (représentant le chien, l'extrémité de la chaîne accrochée au poteau ou à la barrière) et le segment (représentant la chaîne tendue).

Présentation de la séance et objectifs de l'enseignant

Lors de deux entretiens, avant et après la séance observée, l'enseignant précise que, pour lui, l'enjeu principal de la séance, tout en réutilisant ce qui a été vu sur le cercle auparavant, est de mobiliser des capacités de recherche dans un problème qu'il considère comme ouvert. Il prévoit donc de faire travailler les élèves en petits groupes et, surtout, de les laisser chercher, de ne pas intervenir afin d'éviter de leur donner des pistes de résolution.

La séance observée, d'une durée de cinquante-cinq minutes, est dédiée à l'étude des deux énoncés *Le chien 1* et *Le chien 2*. Elle fait suite à deux séances pendant lesquelles le vocabulaire adapté au cercle et l'utilisation du compas pour des tracés simples ont été étudiés.

Cette séance s'organise, comme suit, en deux temps.

- Trente minutes sont d'abord consacrées à l'énoncé 1 : l'enseignant présente l'activité et organise une lecture collective de l'énoncé (5 min), une recherche individuelle puis en petits groupes de trois élèves est ensuite demandée (15 min), une mise en commun (que nous notons mise en commun 1) et une discussion autour de deux productions sont organisées pendant lesquelles la réponse correcte est donnée (10 min).
- Puis vingt-cinq minutes sont dédiées à l'énoncé 2 selon la même organisation : après une lecture collective de quelques minutes, les élèves font des recherches dans les mêmes petits groupes (12 min) et une mise en commun (mise en commun 2) autour de la solution d'un élève est menée (10 min).

Lors de la lecture collective des deux énoncés, l'enseignant s'assure rapidement que le vocabulaire utilisé est connu puis que chaque élève comprend les situations exposées, notamment le fait qu'une extrémité de la chaîne, dans l'énoncé 2, coulisse le long d'une barrière.

Pendant les phases de recherche, individuelle et en petits groupes, il circule entre les élèves. Il s'assure ainsi que tous les élèves sont en activité et, surtout, il observe le travail de chaque groupe afin de repérer les procédures mises en œuvre et les difficultés rencontrées. Il fait le choix pendant cette séance de ne pas intervenir dans les recherches des groupes, de ne pas les aider même si certains groupes (et nous le constatons dans certaines productions finales) se trouvent éloignés de la solution attendue. Nos entretiens ont permis de préciser que cette observation lui permet de préparer (rapidement) les deux mises en commun en choisissant quelques productions qui sont exposées et discutées avec la classe et en repérant les difficultés rencontrées par les élèves.

Productions des élèves (voir page suivante)

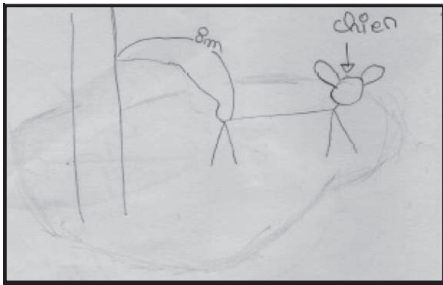
Pour l'énoncé 1

Afin de résoudre l'énoncé 1, sept élèves sur seize ne dépassent pas le dessin naïf, deux élèves tentent une schématisation et sept élèves sur seize tracent un cercle avec le compas et le colorie. Une hiérarchisation des procédures permet de les regrouper selon trois productions-types, présentées ci-après : Production 1, Production 2 et Production 3.

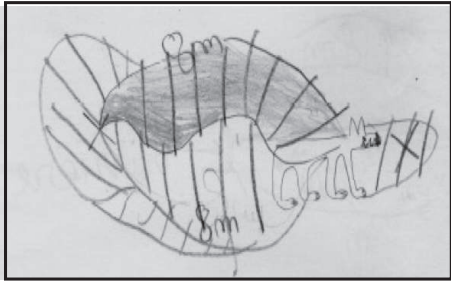
Pour l'énoncé 2

Lors de la résolution de l'énoncé 2, six élèves sur seize en restent au dessin naïf (productions 4 et 5), trois élèves tracent un segment de huit centimètres représentant la bar-

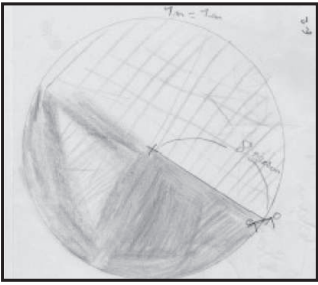
QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES ?



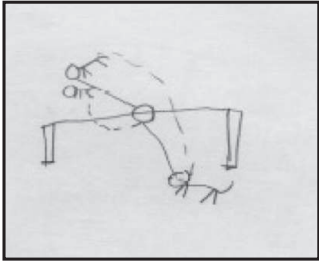
Production 1



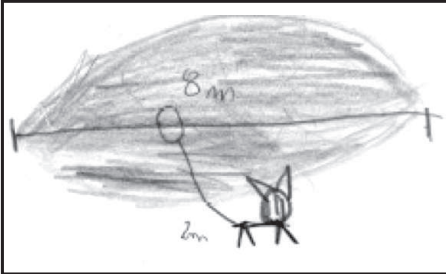
Production 2



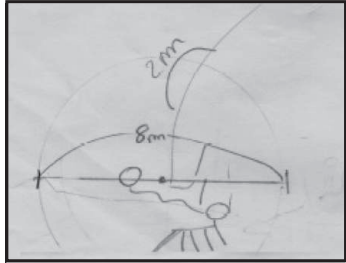
Production 3



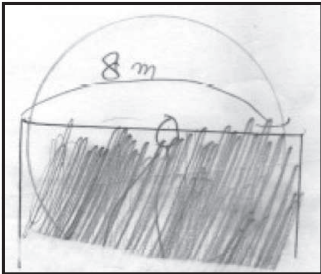
Production 4



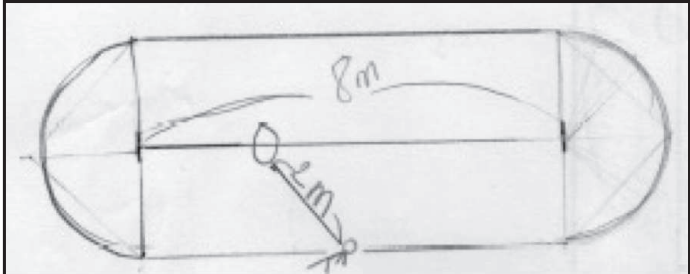
Production 5



Production 6



Production 7



Production 8

rière et un cercle de centre le milieu de ce segment (production 6), quatre élèves tracent un segment de huit centimètres, deux autres segments perpendiculaires au premier en ses deux extrémités et une zone est coloriée (production 7), un élève trace une figure qui convient (production 8).

Analyse de ces productions

L'analyse des productions des élèves montre un écart important entre leurs résultats et les solutions attendues. Cet écart révèle des difficultés non surmontées par la plupart des élèves de cette classe : des difficultés liées, pour des élèves de cet âge, à la conception du cercle (Artigue et Robinet, 1982) et des difficultés liées à la modélisation d'une situation issue de la réalité. En effet, des élèves représentent la situation telle qu'ils la voient, comme si elle se présentait devant eux et qu'ils y participaient (Productions 1 et 4). D'autres élèves représentent la situation vue « de dessus », comme s'ils l'observaient, en reprenant leurs mots, « d'en haut » (Productions 2, 5, 6 et 7). Un seul élève réussit à prendre du recul par rapport au contexte, il réussit à modéliser le chien par un point, la chaîne tendue par un segment et la zone parcourue par le chien par une figure géométrique (Production 8).

Mise en commun des productions des élèves

Après les deux temps de recherche en groupes, l'enseignant propose aux élèves de mettre en commun leurs solutions et d'échanger sur leurs difficultés éventuelles.

De l'énoncé 1

Il débute la mise en commun 1 en présentant à la classe la production 3 comme la solution attendue puis il affiche la production 2 afin de revenir sur les difficultés rencontrées par

un nombre important d'élèves. Cependant les échanges entre lui et les élèves montrent qu'il ne réussit pas à extraire des diverses solutions erronées les éléments importants en termes de connaissances (sur le cercle) et de compétences mathématiques (telles que *modéliser*), éléments qui auraient pu faire l'objet d'une institutionnalisation en fin de séance.

En effet, étant donné que l'enseignant et beaucoup d'élèves n'ont pas compris que la production 2 vise à représenter la chaîne s'enroulant autour du poteau, un élève va expliquer à la classe le schéma : « *quand il [le chien] tourne, elle [la chaîne] s'entoure autour du poteau, ça fait qu'il y a moins de corde* ». L'enseignant ne va pas reprendre ce schéma pour insister, par exemple, sur la nécessité de s'éloigner du vécu (une chaîne qui s'emmêle autour d'un poteau) ou pour faire identifier, par les élèves, les différents points de vue utilisés pour représenter la situation (vue « de côté », « de dessus », etc.). L'enseignant va rapidement clore les échanges en annonçant : « *alors, on ne va pas parler de leur explication car de toute façon, c'est pas facile à expliquer [...]* ».

De l'énoncé 2

Lors de la mise en commun 2, le seul élève *Téo* ayant produit une solution correcte vient au tableau présenter son raisonnement en refaisant la figure suivante :



A la demande de l'enseignant, il explique sa construction :

 QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHEMATQUES ?

« [...] Après, avec la règle, j'ai mesuré 2 cm. Là, là, là et là. [...] Après, j'ai ... ça c'était 2 cm et là aussi... alors après je les ai reliés... comme ça. »

Puis il affiche sa feuille (production 8) et reprend son explication :

« En fait, je croyais que c'était... c'était comme ça (il montre un demi-cercle) et en fait, ... non, c'est... faux que ce soit 2 mètres parce que la laisse fait 2 mètres. Moi, j'ai raté, parce que là ça fait moins de 2 mètres (il montre l'intérieur d'un demi-cercle)... Le chien, il pourrait pas aller à plus de 2 mètres... il y a un doute : pourquoi ces... tous ces segments d'au maximum 2 mètres, ça ferait un cercle ? »

Pendant son explication, Téo transforme sa figure :



Pour finir avec :



L'enseignant ne réussit pas ici à trouver les arguments pour convaincre la classe du fait que la solution produite initialement par Téo (production 3) est correcte, Téo lui-même remettant en cause cette solution. En effet, même si l'enseignant essaie de tendre vers une modélisation de la situation en utilisant le vocabulaire associé au cercle et en demandant par exemple : « est-ce

que vous savez pourquoi Téo a fait un demi-cercle ? ». Les élèves, quant à eux, restent focalisés sur le chien et l'imaginent se déplaçant au bout de la barrière : « Téo a fait des bouts de demi-cercles pour savoir la limite du chien, là où il peut aller ». Ni l'enseignant, ni les élèves ne vont parler, par exemple, de segments représentant la chaîne tendue, d'une distance maximale par rapport à un point situé à l'extrémité de la barrière (elle-même représentée par un segment). Nous pouvons penser que les difficultés rencontrées ici par l'enseignant sont liées à une maîtrise insuffisante de la caractérisation du cercle mise en jeu dans ce problème.

Conclusion

Nécessité d'une analyse a priori

Les résultats que nous venons de présenter concernent l'analyse de différents énoncés inspirés de deux problèmes *Les deux chiens* et *La chèvre* (MEN, 2007 et 2011) et de la séance observée en classe de CM2. Ils montrent que le choix d'un énoncé de problème pour la classe est un exercice difficile pour un enseignant. Ce choix nécessite d'être longuement réfléchi et effectué en lien avec les connaissances et les compétences mathématiques explicitement visées pour la séance et/ou la séquence. En effet, nous avons vu qu'en fonction du choix de la situation et de la tâche confiée aux élèves, les mêmes compétences mathématiques ne sont pas travaillées et les élèves ne sont pas confrontés aux mêmes mathématiques. De ce fait, une analyse *a priori* du problème choisi est primordiale afin de repérer les éléments sans lesquels la séance risque de ne pas mener les élèves vers des apprentissages : tout d'abord, il est nécessaire d'identifier avec précision les connaissances et les compétences mathématiques en jeu dans sa recherche/résolution. Ensuite, il est important également de repérer les procédures possibles des élèves afin d'anti-

ciper d'éventuelles difficultés, cette anticipation étant une des garanties d'une séance réussie en termes d'apprentissages pour les élèves.

Perspectives pour le cycle 3

Les instructions officielles de l'année 2015 demandent aux professeurs des écoles de CM1/CM2 et aux professeurs de mathématiques de sixième de s'associer, en quelque sorte, dans un même cycle 3 pour mener à bien des apprentissages. Des liaisons école-collège, des conseils école-collège existent déjà depuis plusieurs années et un certain nombre d'enseignants du primaire et du secondaire ont l'habitude de se rencontrer et de travailler ensemble. Nous sommes d'avis que la mise en œuvre des programmes de mathématiques (et évidemment des autres disciplines) du cycle 3 va être l'occasion (ou va nécessiter) de mener un travail spécifique en commun selon deux axes : le premier concerne les connaissances et compétences mathématiques, le second les pratiques des enseignants.

— Développer des compétences mathématiques

Un travail commun autour des connaissances à acquérir tout au long du cycle et surtout des compétences mathématiques semble incontournable afin qu'on comprenne bien de quels apprentissages il s'agit et afin d'envisager des moyens de les développer. Nous pensons, notamment suite aux recherches que nous avons réalisées, que des énoncés amenant les élèves à problématiser des situations sont un moyen de travailler et d'atteindre le développement de ces compétences chez tous les élèves du cycle 3 (Choquet, 2014). L'analyse des trois productions-types permet de repérer, par exemple, ce que les élèves (de cette classe et de cycle 3 plus généralement) sont capables de remobiliser parmi leurs connaissances sur le cercle et

renseigne sur leur difficulté à modéliser une situation issue de la vie courante. Il reste aux professeurs des écoles et aux professeurs de collège à s'emparer de ce type de problèmes, ensemble et non de manière isolée. Le professeur des écoles doit savoir comment ces compétences vont être développées au collège et quels problèmes vont être étudiés en classe de 6ème. Et, de même, pour l'enseignant de 6ème, il est nécessaire de connaître les compétences mathématiques que les élèves, arrivant d'une classe de CM2, ont appris à développer et quels problèmes ils ont été amenés à résoudre.

— Harmoniser des pratiques

Par ailleurs, au-delà du choix des problèmes, notre étude met à jour également des difficultés rencontrées par l'enseignant lors des mises en commun. Elle montre, par exemple, qu'un travail de réflexion sur les pratiques, sur des manières de développer la compétence *modéliser* chez leurs élèves est à mener.

Cette réflexion doit envisager une harmonisation des pratiques liées à l'enseignement des mathématiques. Pour être efficace, l'enseignant de CM1 et/ou CM2 a besoin de savoir comment le professeur de 6ème s'empare de tel ou tel problème avec une classe et pourquoi il le fait. De même, le professeur de 6ème a besoin de savoir quels problèmes ont été étudiés en CM1 et/ou CM2 et comment ce travail a été mené par le professeur des écoles. Un temps d'échanges sur les pratiques de préparation, sur les ressources utilisées ainsi que sur des mises en œuvre dans les classes est à envisager.

Ces deux axes peuvent constituer des sujets d'étude lors des conseils école-collège à venir et surtout lors de formations continues à élaborer mutuellement entre des professeurs des écoles et des professeurs de mathématiques de collège.

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES ?

ANNEXE 1

Programmes pour le cycle 3 (MEN, 2015, p. 190)

Compétences travaillées

Chercher

- » Prélever et organiser les informations nécessaires à la résolution de problèmes à partir de supports variés : textes, tableaux, diagrammes, graphiques, dessins, schémas, etc.
- » S'engager dans une démarche, observer, questionner, manipuler, expérimenter, émettre des hypothèses, en mobilisant des outils ou des procédures mathématiques déjà rencontrées, en élaborant un raisonnement adapté à une situation nouvelle.
- » Tester, essayer plusieurs pistes de résolution.

Domaines du socle : 2, 4

Modéliser

- » Utiliser les mathématiques pour résoudre quelques problèmes issus de situations de la vie quotidienne.
- » Reconnaître et distinguer des problèmes relevant de situations additives, multiplicatives, de proportionnalité.
- » Reconnaître des situations réelles pouvant être modélisées par des relations géométriques (alignement, parallélisme, perpendicularité, symétrie).
- » Utiliser des propriétés géométriques pour reconnaître des objets.

Domaines du socle : 1, 2, 4

Représenter

- » Utiliser des outils pour représenter un problème : dessins, schémas, diagrammes, graphiques, écritures avec parenthésages, ...
- » Produire et utiliser diverses représentations des fractions simples et des nombres décimaux.
- » Analyser une figure plane sous différents aspects (surface, contour de celle-ci, lignes et points)
- » Reconnaître et utiliser des premiers éléments de codages d'une figure plane ou d'un solide.
- » Utiliser et produire des représentations de solides et de situations spatiales.

Domaines du socle : 1, 5

Raisonner

- » Résoudre des problèmes nécessitant l'organisation de données multiples ou la construction d'une démarche qui combine des étapes de raisonnement.
- » En géométrie, passer progressivement de la perception au contrôle par les instruments pour amorcer des raisonnements s'appuyant uniquement sur des propriétés des figures et sur des relations entre objets.
- » Progresser collectivement dans une investigation en sachant prendre en compte le point de vue d'autrui.
- » Justifier ses affirmations et rechercher la validité des informations dont on dispose.

Domaines du socle : 2, 3, 4

Calculer

- » Calculer avec des nombres décimaux, de manière exacte ou approchée, en utilisant des stratégies ou des techniques appropriées (mentalement, en ligne, ou en posant les opérations).
- » Contrôler la vraisemblance de ses résultats.
- » Utiliser une calculatrice pour trouver ou vérifier un résultat.

Domaine du socle : 4

Communiquer

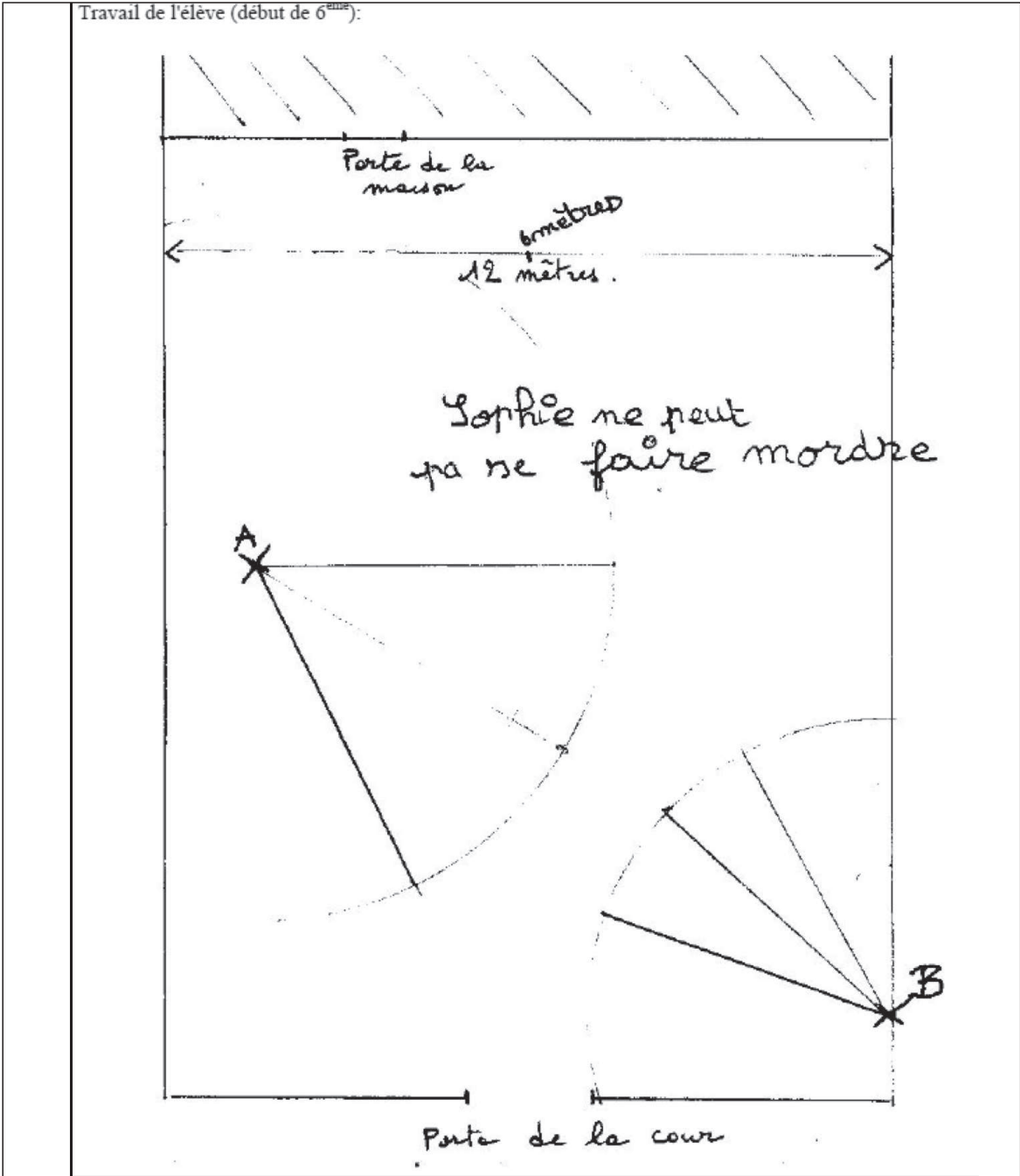
- » Utiliser progressivement un vocabulaire adéquat et/ou des notations adaptées pour décrire une situation, exposer une argumentation.
- » Expliquer sa démarche ou son raisonnement, comprendre les explications d'un autre et argumenter dans l'échange.

Domaines du socle : 1, 3

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHÉMATIQUES ?

ANNEXE 2

« Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège – Géométrie au collège » (MEN, 2007, p. 4)



Une étape initiale (qui n'est pas demandée à l'élève) consiste à utiliser un "plan" pour représenter la cour de ferme. Ce plan est fourni à l'élève. L'échelle (1 cm pour 1 m) n'est pas indiquée mais peut être déterminée à partir de la donnée de la largeur de la cour. La notion de longueur d'un segment est déjà installée.

Il est possible de remarquer deux étapes successives de modélisation :

1- l'élève modélise la chaîne tendue par un simple segment (dessiné dans plusieurs positions). L'objet est encore matériel même s'il "possède" une longueur, propriété bien mathématique. Les chiens sont aussi réduits à des points, ce qui semble mettre en évidence chez cet enfant le début d'une mathématisation de la situation.

2- les arcs de cercles marquent une étape caractérisée par une nouvelle modélisation faisant intervenir le cercle du point de vue d'une propriété caractéristique de ses points.

Cet exemple montre ainsi un premier pas vers la mise en place conceptuelle de la propriété caractéristique des points d'un cercle à partir d'une vision concrète et intuitive de l'enfant. Il est possible que le cercle n'apparaisse qu'après que l'élève a tracé plusieurs segments dont il "voit" alors que les extrémités semblent appartenir à une figure connue.

ANNEXE 3

Extraits de la fiche *La chèvre*
issue de la *banque de situations* (MEN, 2011)

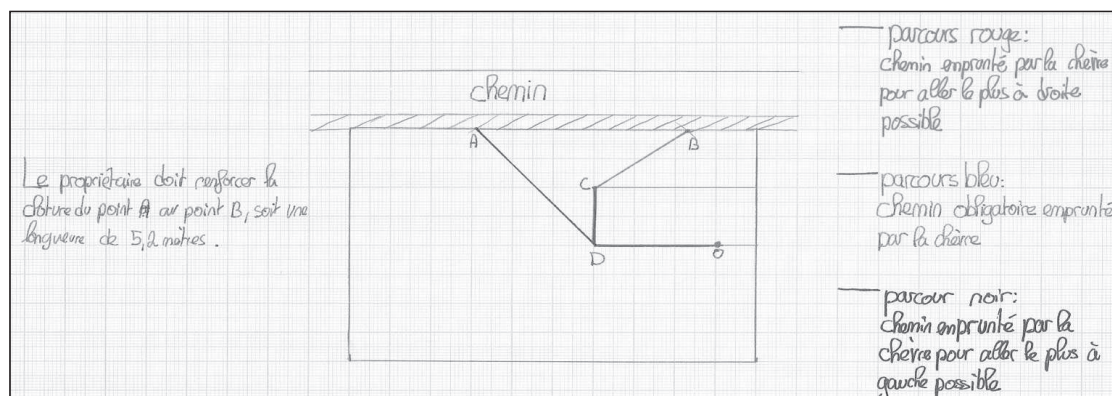
Pratiquer une démarche scientifique ou technologique	Capacités susceptibles d'être évaluées en situation	Exemples d'indicateurs de réussite
<i>Rechercher, extraire et organiser l'information utile.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Extraire les informations utiles et les organiser pour les exploiter. 	<ul style="list-style-type: none"> • Prendre en compte les longueurs indiquées sur le schéma et les angles droits.
<i>Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes</i> <i>Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Construire un schéma • Effectuer un calcul. • Proposer une méthode de résolution. 	<ul style="list-style-type: none"> • Construire une représentation géométrique de la solution. • Déterminer les longueurs par mesures (6^e et 5^e), par calculs (4^e et 3^e). • Identifier le segment solution. • Utiliser correctement le théorème de Pythagore (4^e et 3^e).
<i>Présenter la démarche suivie, les résultats obtenus, communiquer à l'aide d'un langage adapté.</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Présenter sous une forme adaptée une solution. 	<ul style="list-style-type: none"> • Expliquer et justifier la démarche, par écrit ou oralement.

QUELS PROBLEMES A L'ECOLE ET AU COLLEGE POUR DEVELOPPER DES COMPETENCES MATHEMATQUES ?

Production

Cet élève a proposé une solution géométrique. Il a réalisé un dessin à l'échelle sur papier millimétré. La précision de son dessin lui offre une bonne approximation de la solution, au dixième près, obtenue par simple mesure. (Ce qu'il n'a pas expliqué).

La démarche experte, utilisant le théorème de Pythagore pour obtenir un résultat exact, n'est pas exigible ici. L'élève s'est inscrit dans une démarche expérimentale. Les items « Rechercher, extraire et organiser l'information utile », « Réaliser, manipuler, mesurer, calculer, appliquer des consignes », « Raisonner, argumenter, pratiquer une démarche expérimentale ou technologique, démontrer » et « géométrie » peuvent être évalués positivement.



REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

ARTIGUE, M., ROBINET, J. (1982) Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.3 n°2, 5-64, La Pensée Sauvage.

CABASSUT, R. (2010) Des ressources pour enseigner la modélisation : le projet européen LEMA, *MathTICE*, 22, disponible à l'adresse :

<http://revue.sesamath.net/spip.php?article308>, consulté le 14 février 2016.

CHOQUET, C. (2014) Une caractérisation des pratiques de professeurs des écoles lors de séances de mathématiques dédiées à l'étude de problèmes ouverts au cycle 3, Thèse de doctorat, Nantes, disponible à l'adresse :

<https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-01185671/file/CHOQUET%20Christine%20Th%C3%A8se%20oct2014.pdf>, consulté le 14 février 2016.

LE BELLER, C., LEBAUD, M.-P. (2014) Mettre en œuvre l'investigation en classe à partir d'une «vraie question» : l'exemple de l'alignement du XXème siècle, *Repères IREM*, 97, 7-23, Topiques éditions, Nancy.

MEN (2007) *Ressources pour les classes de 6ème, 5ème, 4ème et 3ème du collège – Géométrie au collège*, disponible sur le site :

http://cache.media.eduscol.education.fr/file/Programmes/17/0/doc_acc_clg_geometrie_109170.pdf, consulté le 14 février 2016.

MEN (2011) *Banque de situations d'apprentissage et d'évaluation de la compétence 3*, disponible à l'adresse :

<http://eduscol.education.fr/cid55510/banque-situations-apprentissage-competence.html>, consulté le 14 février 2016.

MEN (2015) Programmes d'enseignement de l'école élémentaire et du collège, *Bulletin Officiel*, spécial n°11 du 26 novembre 2015.

PAILLET, V. (2011) Où sont les Maths ?, *Repères IREM*, 82, 5-21, Topiques éditions, Nancy.

STAÏNER, H., ROUQUÈS, J.-P., BONJEAN-LE BÉCHEC, G., BURBAN, A., MUNCK, F. (2014) *Des maths ensemble et pour chacun 6ème*, Scéren éditions.