

---

# Utilisation de champs de déplacements pour l'identification de propriétés élastiques en milieux hétérogènes

**Laurent Crouzeix\*** — **Jean Noël Périé\*** — **Bernard Douchin\*** — **Philippe Marguerès\*** — **Michel Fournié\*\*** — **Francis Collombet\***

\* *Laboratoire de Génie Mécanique de Toulouse, équipe PRO<sup>2</sup>COM, IUT Paul Sabatier, 133 C avenue de Rangueil, 31077 Toulouse CEDEX4*

\*\* *Laboratoire de Mathématiques pour l'Industrie et la Physique, Université Paul Sabatier, Toulouse III, 31062 Toulouse Cedex.*

*laurent.crouzeix@iut-tlse3.fr*

---

*RÉSUMÉ. Une méthode d'identification et de suivi de champs de propriétés élastiques basée sur l'exploitation de champs de déplacements et l'«Equilibrium Gap Method» est développée dans le cas de matériaux isotropes. La démarche est tout d'abord validée par l'utilisation de champs de déplacements issus de simulations Eléments Finis (E.F.) pour lesquelles l'hétérogénéité est maîtrisée. L'approche est ensuite appliquée à des éprouvettes de matériau composite «Sheet-Molding Compound» (SMC) sollicitées en traction et multi instrumentées. Les cartes de modules d'Young identifiées sont présentées et confrontées à des mesures ultrasons (US).*

*ABSTRACT. A procedure for identifying and monitoring elastic properties based on the «Equilibrium Gap Method» and full field measurements is developed for isotropic materials. The procedure is first validated using displacement fields retrieved from Finite Element Methods (F.E.) simulations in which the heterogeneity map is imposed. This approach is then applied to tensile tests performed on multi instrumented «Sheet-Molding Compound» SMC composite coupons. The identified Young modulus maps are presented and compared to ultrasonic measurements.*

*MOTS CLÉS : identification, champs de propriétés élastiques, mesures de champs, « Méthode de l'écart à l'équilibre », structures composites*

*KEYWORD: identification, fields of elastic properties, full field measurements, « Equilibrium Gap Method », composite structures*

---

## 1. Introduction

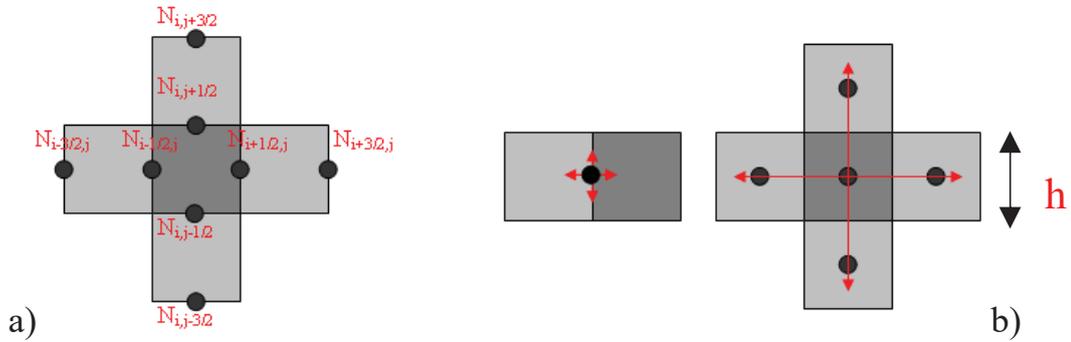
La notion de matériau composite est indissociable de l'aspect structure et son état dépend des conditions d'élaboration. Les structures composites présentent ainsi une hétérogénéité à diverses échelles, y compris parfois à l'échelle de la structure. La capacité d'étudier les variations de propriétés mécaniques du composite au sein même de structures est donc cruciale pour le développement du calcul de ce type de structures hétérogènes. Les récents progrès des techniques de Mesures de Champs (MdC) de déplacements ouvrent des perspectives pour la détection des variations de propriétés, en permettant notamment de changer d'échelle. Différents auteurs proposent des méthodes inverses pour identifier des propriétés mécaniques à partir de ces mesures (Bonnet *et al*, 2003) (Grédiac *et al*, 2002) (Molimard *et al*, 2005). La plupart d'entre elles considèrent le matériau comme homogène. Ces méthodes ne permettent donc pas, en l'état de leur développement, de détecter des variations locales de propriétés et l'apparition de dommages.

## 2. « Equilibrium Gap Method » écrite en différences finies

Les travaux présentés ci après sont basés sur l'« Equilibrium Gap Method » (Claire *et al*, 2004). Cette méthode, pour l'instant déclinée pour des matériaux isotropes, permet de suivre l'apparition et le développement de l'endommagement au cours d'un essai mécanique. La méthode conduit à la résolution d'un système d'équations linéaires où les inconnues sont les modules d'élasticité et les données les champs de déplacements. Les équations découlent de l'écriture de l'équilibre sous une forme faible (discrétisation par E.F.). Dans l'approche proposée ici, l'écriture des équations traduisant l'équilibre est réalisée à l'aide d'une approche différences finies. Ce choix est principalement motivé par la volonté de simplifier l'écriture du problème ainsi que sa résolution, et d'étendre ensuite la démarche aux matériaux orthotropes (e.g. les composites). Dans un premier temps toutefois, cette approche est testée dans le cas d'un matériau supposé isotrope dans le plan, mais initialement hétérogène.

On s'intéresse à des éprouvettes planes sollicitées dans leur plan. Les données du problème sont, outre le chargement, le champ des déplacements mesurés à la surface du spécimen. Les MdC sont exploitées pour former une grille permettant de délimiter des éléments et de définir des nœuds. Comme dans (Claire *et al*, 2004), les inconnues du problème sont les caractéristiques élastiques locales, et on suppose dans un premier temps que le module d'Young est constant par élément. Pour chaque éprouvette, on définit un maillage uniforme dont la taille caractéristique est  $h$ . Le module de l'élément  $K_{ij}$  (élément du maillage situé à la ligne  $i$  et à la colonne  $j$ ) est alors noté  $E_{ij}$ . Le coefficient de poisson  $\nu$  est supposé constant. Les nœuds autour de l'élément  $K_{ij}$  sont numérotés comme indiqué sur la figure (1a). La composante du déplacement suivant l'axe horizontal (resp. vertical) est notée par la suite  $u$  (resp.  $v$ ).

Pour chaque élément  $K_{i,j}$ , on écrit d'abord l'équilibre sur les frontières de l'élément au niveau d'un nœud milieu à l'aide d'une discrétisation par différences finies centrées d'ordre 2 (voir figure 1b). Sur ce nœud, on obtient ainsi une équation liée au saut de contrainte normale ainsi qu'une équation liée au saut de contrainte tangentielle. L'équation [1] correspond par exemple au saut de contrainte normale entre les éléments  $K_{i-1,j}$  et  $K_{i,j}$ . On traduit ensuite l'équilibre global, obtenant ainsi deux équations. L'équation [2] représente par exemple l'équilibre global pour l'élément  $K_{i,j}$  en projection sur l'axe horizontal. Les éléments aux bords de la grille font l'objet d'un traitement particulier. L'ensemble des équations forme un système linéaire surdéterminé où les inconnues correspondent aux modules  $E_{i,j}$  de tous les éléments considérés. Ce système est résolu par l'utilisation d'un algorithme d'optimisation dans Matlab<sup>®</sup>. L'ensemble des modules d'Young est obtenu à une constante multiplicative près. Cette constante est déterminée grâce à la mesure de l'effort de traction.



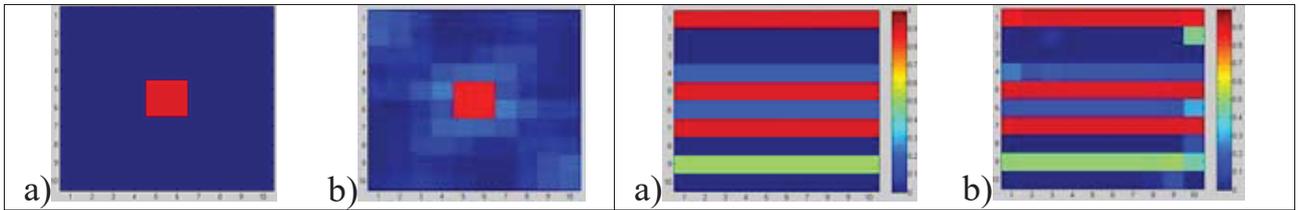
**Figure 1.** a) Numérotation des nœuds autour d'un élément  $K_{i,j}$  b) Ecriture de l'équilibre aux frontières et au centre de l'élément.

$$-\frac{E_{i,j}(u_{i+1/2,j} - u_{i-1/2,j})}{(-1 + \nu^2)h} - \frac{E_{i,j}\nu(v_{i,j+1/2} - v_{i,j-1/2})}{(-1 + \nu^2)h} + \frac{E_{i-1,j}(u_{i-1/2,j} - u_{i-3/2,j})}{(-1 + \nu^2)h} + \frac{E_{i-1,j}\nu(v_{i-1,j+1/2} - v_{i-1,j-1/2})}{(-1 + \nu^2)h} = 0 \quad [1]$$

$$-\frac{E_{i-1,j}(u_{i-1/2,j} - u_{i-3/2,j})}{(-1 + \nu^2)h} - \frac{E_{i-1,j}\nu(v_{i-1,j+1/2} - v_{i-1,j-1/2})}{(-1 + \nu^2)h} + \frac{E_{i+1,j}(u_{i+3/2,j} - u_{i+1/2,j})}{(-1 + \nu^2)h} + \frac{E_{i+1,j}\nu(v_{i+1,j+1/2} - v_{i+1,j-1/2})}{(-1 + \nu^2)h} + \frac{E_{i,j-1}\left(\frac{1}{2}\frac{v_{i+1/2,j-1} - v_{i-1/2,j-1}}{h} + \frac{1}{2}\frac{(u_{i,j-1/2} - u_{i,j-3/2})}{h}\right)}{1 + \nu} - \frac{E_{i,j+1}\left(\frac{1}{2}\frac{v_{i+1/2,j+1} - v_{i-1/2,j+1}}{h} + \frac{1}{2}\frac{(u_{i,j+3/2} - u_{i,j+1/2})}{h}\right)}{1 + \nu} = 0 \quad [2]$$

Dans un premier temps, comme proposé par (Claire *et al*, 2004), la technique est testée à partir de champs cinématiques issus de simulations par E.F. On utilise des éléments à 8 nœuds de classe  $C^0$  (SAMCEF V10). Le module d'Young est supposé constant élément par élément. Des conditions aux limites ad hoc représentent un chargement de type traction. Diverses géométries d'éprouvettes et de configurations de répartition de modules sont testées : bandes horizontales, zone centrale dégradée (voir figure 2a et 2b), répartition aléatoire de module. Les déplacements nodaux obtenus sont alors utilisés en entrée de la méthode d'identification proposée. On compare enfin les champs de propriétés mécaniques ainsi identifiés à ceux imposés dans l'approche par EF. Un bon accord est observé, y compris dans le cas

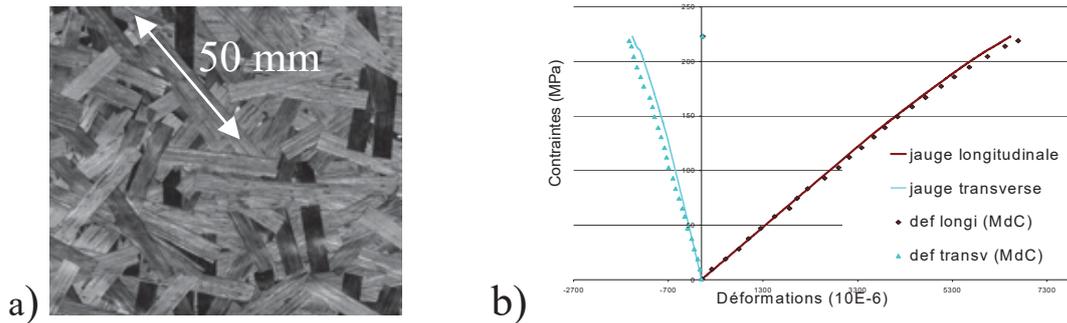
d'éprouvettes « normalisées ». On note toutefois la présence d'effets de bords, ainsi qu'une moindre sensibilité dans le cas de faibles différences de modules. Ces points sont à améliorer. La question de l'influence du type de champ cinématique, et donc de la forme de l'éprouvette, est en cours d'étude.



**Figure 2.** Exemples de cartes de répartition des propriétés mécaniques a) imposées dans l'approche par Eléments Finis b) identifiées (niveaux de gris, échelle de 0 à 1)

### 3. Application à un matériau composite SMC (Sheet-Molding Compound)

La technique d'identification décrite ci-dessus est appliquée à un matériau de type HexMC<sup>®</sup> produit par Hexcel Composites. Des plis constitués de bandelettes de pré imprégné carbone-epoxy (50x10 mm) réparties aléatoirement dans le plan (voir figure 4a) sont stratifiés dans un moule. L'ensemble est compacté puis polymérisé.

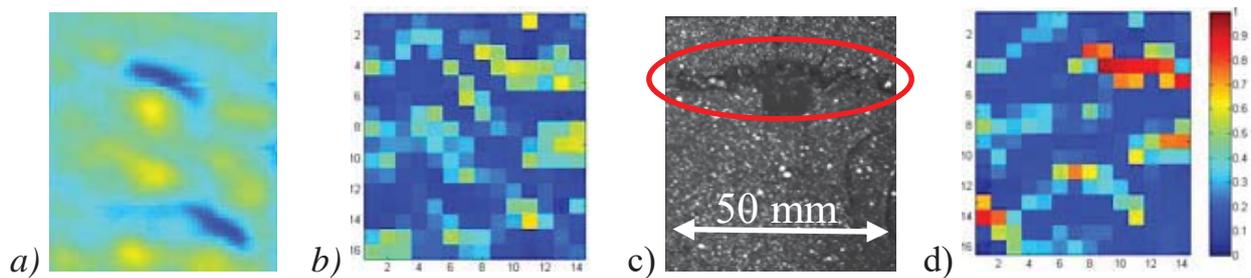


**Figure 3.** a) Répartition aléatoire des bandelettes de carbone dans un pli (HexMC<sup>®</sup>) b) Comparaison de déformations mesurées par jauges et par mesure de champs au cours d'un essai de traction (sens longitudinal et transversal)

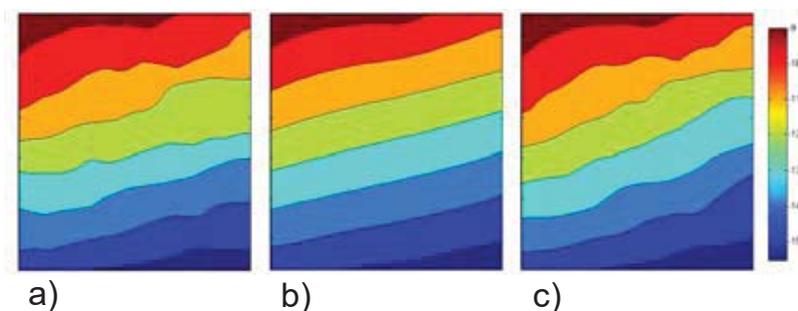
Ce procédé économique conduit à un matériau possédant des propriétés mécaniques honorables ( $E_{\text{moy}} \sim 40$  GPa,  $\sigma_r \sim 220$  MPa), possédant une bonne usinabilité et permettant d'obtenir des formes complexes et de petits rayons de courbure. Ce matériau, de par sa constitution, présente une hétérogénéité spatiale aux échelles classiques (incompatible avec les exigences des normes en vigueur). Des mesures ultrasonores (en transmission) et des caractérisations physico chimiques (taux de fibre) confirment une variabilité des propriétés à l'échelle des éprouvettes considérées (voir figure 4a). Des essais de traction multi instrumentés (jauge, extensomètre et MdC) sont réalisés sur des éprouvettes normalisées de 250x50x4,4 mm. Les MdC par corrélation d'images numériques sont réalisées à l'aide de Correli<sup>LMT</sup> (ZOI de 64x64 px<sup>2</sup> et pas de 32 px). Un logiciel de stéréo corrélation d'image (Vic3D) est également utilisé pour estimer la composante hors plan du

déplacement. La comparaison des déformations mesurées par MdC avec la déformation mesurée par les jauges électriques au même point valide la mesure optique (voir figure 4b). Les champs de déplacements obtenus dès le début de l'essai révèlent la présence d'hétérogénéités (voir figure 4 b).

Les MdC sont utilisées en entrée de la méthode d'identification proposée. Une carte d'hétérogénéité du matériau est ainsi établie pour chaque incrément de charge. Dans un premier temps, on observe le même type de carte d'un pas de temps à l'autre, ce qui confirme la présence d'hétérogénéité. Des différences de modules atteignant 20% sont ainsi identifiées. À partir d'un certain stade de chargement, des chutes locales de modules apparaissent. Cet endommagement apparaît en différents points de l'éprouvette, et notamment sur la zone où se produira la rupture (voir les figures 4c et 4d). Pour un pas de temps donné, le champ de modules d'Young identifié est intégré élément par élément dans le code Eléments Finis. Sur les deux bords non libres de l'éprouvette, les conditions aux limites imposées sont issues des mesures de champs. La figure 5 permet de comparer les iso déplacements dans la direction de traction issus des mesures de champs (figure 5a), d'un calcul avec CL issues des MdC mais supposant un matériau homogène (figure 5b) le champ de déplacements calculé par éléments finis en prenant en compte la carte de modules identifiés (figure 5c). On note un bien meilleur accord dans le cas où la carte de modules identifiés est utilisée.



**Figure 4.** a) Contrastes d'amplitudes ultrasonores (C-scan en transmission) avant l'essai b) contrastes de modules identifiés à partir des champs de déplacements en début d'essai c) faciès de rupture d) carte identifiée à partir de l'avant dernière image saisie avant rupture



**Figure 5.** iso déplacements dans la direction de traction a) issus des mesures de champs b) calculés par E.F. en supposant le matériau homogène c) calculés par E.F. en utilisant le champ d'hétérogénéités identifié

## 4. Conclusion

Une méthode d'identification de champs de propriétés élastiques basée sur l'« Equilibrium Gap Method » (Claire *et al*, 2004), mais construite sur une approche de type différences finies, est présentée. Les performances de cette approche, pour l'instant limitée aux matériaux isotropes, sont dans un premier temps illustrées par l'utilisation de données simulées. Les cartes de modules sont retrouvées mais des effets de « bords » et une moindre précision dans des zones peu contrastées sont observés. La méthode est ensuite appliquée lors d'essais de traction normalisés sur un matériau composite SMC. Des écarts de modules initiaux de l'ordre de 20% sont ainsi identifiés. De plus, les zones de rupture coïncident avec des zones dans lesquels des endommagements sont identifiés. Les informations récoltées sont en cours de croisement avec des mesures US et des mesures de taux de fibres.

Plusieurs développements sont en cours. L'influence de la géométrie de l'éprouvette (entaillée, percée, etc.) sur la précision de l'identification est en particulier étudiée. Un indicateur d'erreur (erreur en relation de comportement par exemple) doit être mis en place afin de juger plus objectivement de la qualité des résultats obtenus. Par ailleurs, une modélisation doit être proposée afin de lier les données physico chimiques et les échographies US aux cartes de modules identifiés. Enfin, la technique présentée est en cours d'extension aux matériaux orthotropes. Des essais multi axiaux sur des tubes réalisés par enroulement filamenteux ont été réalisés. La méthode proposée doit permettre d'obtenir « directement » un champ de propriétés mécaniques.

Remerciements : Nous tenons à remercier la société DDL-Consultants (83330 Le Beausset) et la société Hexcel Composites (01120 Dagneux) pour la fourniture de HexMC, ainsi que le laboratoire Physique de l'Homme Appliquée à Son Environnement (PHASE, Toulouse) pour la mise a disposition des moyens CND.

## Références bibliographiques

- Bonnet M., Dong Bui H., Constantinescu A., “Principes variationnels et exploitation de mesures de champs en élasticité”, *Mécanique et Industries*, vol 4, Issue 6, 2003, p. 687-697.
- Claire D., Hild F., Roux S., “A finite element formulation to identify damage fields: the equilibrium gap method”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol 61, n°2, 2004, p. 189-208.
- Grédiac M., Toussaint E., Pierron F., “Special virtual fields for the direct determination of material parameters with the virtual fields method: 1- Principle and definition”, *International Journal of Solids and Structures*, vol. 39, n° 10, 2002, p. 2691-2705.
- Molimard J., Le Riche R., Vautrin A., Lee J.R., “Identification of the Four Orthotropic Plate Stiffnesses Using a Single Open-hole Tensile Test”, *Experimental Mechanics*, Vol. 45, n° 5, 2005, p. 404-411.